

有限コクセター群の余不変式環の強レフシェッツ元 (Strong Lefschetz elements of coinvariant rings of finite Coxeter groups)

前野俊昭 (京都大学大学院理学研究科),
和地輝仁 (北海道工業大学総合教育研究部)

Toshiaki Maeno (Kyoto University)

and

Akihito Wachi (Hokkaido Institute of Technology)

abstract

For coinvariant rings of finite Coxeter groups, we show that strong Lefschetz elements are not fixed by any reflections. When the group is a Weyl group, we prove that an element is a strong Lefschetz element if and only if the element is not fixed by any reflections.

1 Introduction

本講演では, 有限コクセター群の余不変式環の強レフシェッツ元の特徴付けに関する結果を述べる. 強レフシェッツ元あるいは強レフシェッツ性とは, 次数環に対する概念であるが, これはコンパクトケーラー多様体のコホモロジー環の性質の抽象化であるといえる. コンパクトケーラー多様体 X に対する Hard Lefschetz Theorem (see [GH78], e.g.) は次のように述べられる:

Hard Lefschetz Theorem: X を実次元 $2m$ であるコンパクトケーラー多様体とし, $L \in H^2(X, \mathbb{R})$ をケーラー形式のクラスとする. コホモロジー環 $H^*(X, \mathbb{R})$ において, L^{2m-2i} を掛ける写像

$$\times L^{2m-2i} : H^i(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{2m-i}(X, \mathbb{R}) \quad (x \mapsto L^{2m-2i}x)$$

は各 $i = 0, 1, \dots, m$ に対して全単射である.

コホモロジー環のこのような性質の抽象化として、次数環 $R = \bigoplus_{d=0}^m R_d$ に対して、ある $l \in R_1$ が存在して、掛け算写像 $\times l^{m-2i} : R_i \rightarrow R_{m-i}$ が各 i について全単射であるとき、 R は強レフシェッツ性を持つといい、 l を強レフシェッツ元であるという。つまり、Hard Lefschetz Theorem の主張は、ケーラー形式のクラスはコホモロジー環の中で強レフシェッツ元である、と言い換えられる。本講演の目標は、 R として有限コクセター群の余不変式環を考え、 R_1 の中で強レフシェッツ元のなす部分集合を決定することである。これは、 R がコンパクトケーラー多様体のコホモロジー環である場合も、自明な問ではない。つまり、ケーラー計量の入れ方が変わればケーラー形式も変わるが、こうして得られる強レフシェッツ元の集合（ケーラー錘）は強レフシェッツ元全体の集合の一部分でしかないので、強レフシェッツ元全体のなす集合が決定されるわけではない。

W を、 n 次元実ベクトル空間 V に作用している有限コクセター群とする。既約有限コクセター群は、表 1 のように分類される。 V 上の実係数多項式環 $\mathbb{R}[V]$ にも W の作用が入るが、 J を $\mathbb{R}[V]$ の斉次イデアルで、定数項のない W -不変式で生成されるものとするとき、 $R = \mathbb{R}[V]/J$ で定まる次数環を、 W の余不変式環という。特に有限コクセター群 W がワイル群であるときは、 R はそのワイル群に対応するリー群から作られる旗多様体のコホモロジー環に次数環として同型であることが知られている。本講演で述べる結果は、次の定理である。

定理. W を既約有限コクセター群とする (see 表 1). このとき、

- (1) $C \subset C'$.
- (2) W が H_3, H_4 ではないとき、 $C = C'$.

ここに、 C, C' は以下で定める R_1 の部分集合である。

$$C = \{l \in R_1 \mid l \text{ は強レフシェッツ元}\},$$

$$C' = \{l \in R_1 \mid l \text{ は } W \text{ のどの鏡映でも固定されない}\}.$$

W が H_3 や H_4 の時も $C = C'$ であることを予想しているが、証明してはいない。

証明についてコメントする。ワイル群ではない、非結晶的と呼ばれる有限コクセター群については、旗多様体のコホモロジー環として実現できるわけではないので幾何を用いない証明でなければならないが、上記定理の (1) は代数的な議論のみで証明できる (§ 2). 上記定理の (2) については、 W がワイル群である時、余不変式環 R が旗多様体のコホモロジー環に同型であることを利用し、Hard Lefschetz Theorem を用いて証明する (§ 4). また、 W が有限コクセター群 $I_2(m)$ であるときは、幾何を用いることができないため代数的な別の議論を行い、上記定理の (2) を示す (§ 5).

表 1: 既約有限コクセター群

type	A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$\#W$	$(n+1)!$	$2^n n!$	$2^{n-1} n!$	$2^7 3^4 5$	$2^{10} 3^4 5^7$	$2^{14} 3^5 5^2 7$	$2^7 3^2$	12
$\#(\text{鏡映})$	$n(n+1)/2$	n^2	$n(n-1)$	36	63	120	24	6

type	H_3	H_4	$I_2(m)$
$\#W$	120	$2^6 3^2 5^2$	$2m$
$\#(\text{鏡映})$	15	60	m

2 強レフシェッツ元の必要条件

この節では, Introduction の定理の (1) を証明する. まず始めに, 有限コクセター群の余不変式環の構造を簡単に復習する. 既約有限コクセター群は, 表 1 のように分類される (例えば [Hum90] を見よ). このうち, H_3 , H_4 , $I_2(m)$ が非結晶的と呼ばれ, 残りは結晶的と呼ばれる. 結晶的な有限コクセター群は, あるルート系に付随するワイル群である. W を, n 個の鏡映 $s_1, s_2, \dots, s_n$ で生成される既約有限コクセター群とし, n 次元実ベクトル空間 V に作用しているとする. W の元 w を $s_1, s_2, \dots, s_n$ の積で書いたときの最短の長さを $l(w)$ で表し, w の長さという. W には長さ最長の元 w_0 が一意的存在することが知られていて, w_0 を W の最長元と呼ぶ. また, 最長元の長さは W に属する鏡映の個数と等しいことも知られている. J を V 上の多項式環 $\mathbb{R}[V]$ の斉次イデアルで, 定数項を持たない W -不変式で生成されるものとする. 次数環 $R = \mathbb{R}[V]/J$ を, W の余不変式環と呼ぶ. R の d 次斉次成分を R_d と書くと, R_d のベクトル空間としての次元は, 長さ d である W の元の個数に等しいことが知られている. したがって, 次のような R の分解がある.

$$R = \bigoplus_{d=0}^m R_d \quad (m = l(w_0), \quad \dim R_d = \#\{w \in W ; l(w) = d\}).$$

定義 1. 次数環 $R = \bigoplus_{d=0}^m R_d$ が強レフシェッツ性を持つとは, $l \in R_1$ が存在し, 掛け算写像 $\times l^{m-2i} : R_i \rightarrow R_{m-i}$ ($f \mapsto l^{m-2i} f$) が, 各 $i = 0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor$ に対して全単射であることをいう. このとき, l を強レフシェッツ元と呼ぶ.

次数環 $R = \bigoplus_{d=0}^m R_d$ が強レフシェッツ性を持つとすると, 明らかに $\dim R_d = \dim R_{m-d}$ が各 $d = 0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor$ に対して成立し, また, $\dim R_d \leq \dim R_{d+1}$ が各 $d = 0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor - 1$ に対して成立する. $\square$

W がワイル群の場合は, W の余不変式環は強レフシェッツ性を持つことが知られている. 次の定理が, Introduction の定理 (1) で述べた, 本講演の第一の結果である.

定理 2. $R = \bigoplus_{d=0}^m R_d$ を, 結晶的とは限らない有限コクセター群 W の余不変式環とする. $l \in R_1$ が強レフシェッツ元ならば, l は W のどの鏡映でも固定されない. 言い換えると, l はどの鏡映面にも含まれない.

Proof. R の最高次数の斉次成分 R_m は, W の最長元が一意的だからベクトル空間として 1 次元であるが, さらに反不変元で張られることが知られている ([BGG73], [Hil81]). $f \in R$ が反不変元であるとは, f をどの鏡映でうつしても, -1 倍されることを言う.

さて, 強レフシェッツ元 $l \in R_1$ をとり, l はある鏡映 $s \in W$ で固定されると仮定する. 一方では, $l^m \in R_m$ は s で固定され, かつ, 反不変元だから, $l^m = 0$ である. 他方, l は強レフシェッツ元だから, 掛け算写像 $\times l^m : R_0 \rightarrow R_m$ が全単射であるので, $l^m \neq 0$ であり, 矛盾が生じた. 従って, l はどの鏡映でも固定されない. $\square$

例 3 (type A_{n-1}). W を n 文字の上の置換群 S_n とし, 多項式環 $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 上に, 変数の置換により作用しているとする. $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ の斉次イデアル J を, 定数項のない対称式で生成されるものとする. この場合, 定理 2 により, $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \in R_1$ が強レフシェッツ元ならば, すべての $i \neq j$ に対して $a_i \neq a_j$ である. つまり, ベクトル空間 R_1 の部分集合 $\{x_i - x_j; i \neq j\}$ を A_{n-1} 型ルート系と思ったとき, l はあるワイルチェンバーの内部に属する. $\square$

例 3 を見ると, どの鏡映でも固定されない R_1 の元 l が, いつも強レフシェッツ元なのかどうかという問題が自然に浮かぶ. 以降の節では, H_3, H_4 以外の有限コクセター群に対して, この問題を肯定的に解決する.

3 強レフシェッツ元の必要十分条件

この節では, Introduction の定理の (2) を改めて述べる.

定理 4. W を, H_3, H_4 ではない, 既約有限コクセター群とし (see 表 1), $R = \bigoplus_{d=0}^m R_d$ を W の余不変式環とする. R_1 の元 l が強レフシェッツ元であるための必要十分条件は, l が W のどの鏡映でも固定されないことである. $\square$

この予稿の残りの部分は, この定理の証明に費す. まず, W が結晶的, つまり, W がワイル群であるときは, 幾何を用いて § 4 で証明を与える. 非結晶的な既約有限コクセター群には, 表 1 に分類されるように, H_3, H_4 および $I_2(m)$ の 3 つがあるが, そのうち定理の主張に含まれる $W = I_2(m)$ の場合を § 5 で証明する.

4 旗多様体のコホモロジー環とワイル群の余不変式環

この節では, 結晶的な有限コクセター群の余不変式環 $R = \bigoplus_{d=0}^m R_d$ に対して, R_1 の元が強レフシェッツ元であるための必要十分条件を与える. 有限コクセター群 W が結晶的であるならば, その余不変式環は対応する旗多様体のコホモロジー環に同型である. この節の議論は旗多様体の幾何的性質に基くものであり, 従って, 非結晶的なコクセター群に対しては適用できない.

G を連結単連結半単純複素リー群とする. $\mathfrak{h}$ を, G のリー環のカルタン部分代数とし, $\mathfrak{h}$ に対応する G の部分群を含む G のボレル部分群 B を固定する. W をワイル群とすると, W は $\mathfrak{h}$ に作用し, 従って, $\mathfrak{h}$ の双対空間 $V = \mathfrak{h}^*$ にも作用する. このとき, 旗多様体 G/B のコホモロジー環 $H^*(G/B, \mathbb{R})$ は, W の余不変式環 R に同型であり, この同型のもと, 特に, $H^2(G/B, \mathbb{R})$ は $\mathfrak{h}^*$ に一致する.

さて, 豊富性に関する Kleiman の判定条件を思いだそう. 複素射影多様体 X に対して,

$$N^1(X) := \text{Pic}(X)_{\mathbb{R}} / (\text{数値的に同値})$$

と定義する. $Z_1(X)_{\mathbb{R}}$ を X の曲線の形式的 $\mathbb{R}$ 係数 1 次結合のなす実ベクトル空間とし,

$$N_1(X) := Z_1(X)_{\mathbb{R}} / (\text{数値的に同値})$$

と定める. $\overline{\text{NE}}(X)$ により, $Z_1(X)$ の曲線の像により張られる閉な凸包を表す.

命題 5. $L \in N^1(X)$ が豊富錘に属するための必要十分条件は, すべての $C \in \overline{\text{NE}}(X) \setminus \{0\}$ に対して, $(L, C) > 0$ が成り立つことである. $\square$

$\Delta \subset \mathfrak{h}$ をルート系とする. B の選び方に合わせて, 単純ルートの集合 Σ をとる. 単純ルートの双対のなす集合 $\Sigma^\vee$ も $\mathfrak{h}$ の部分集合とみなすと,

$$\overline{\text{NE}}(G/B) = \sum_{\alpha^\vee \in \Sigma^\vee} \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \alpha^\vee$$

が, 同一視 $H_2(G/B, \mathbb{R}) = \mathfrak{h}$ の下で成立する. 言い換えると, 豊富錘と基本ワイルチェンバーは, 同一視 $H^2(G/B, \mathbb{R}) = \mathfrak{h}^*$ の下で一致する. すべての豊富な直線束は, $H^2(G/B, \mathbb{R})$ の中のケーラー形式のクラスに対応するから, Hard Lefschetz Theorem より, それは $H^*(G/B, \mathbb{R})$ の強レフシェッツ元を与え, 次の命題を得る.

命題 6. $l \in \mathfrak{h}^* = H^2(G/B, \mathbb{R})$ が, すべての $\alpha^\vee \in \Sigma^\vee$ に対して条件 $\langle l, \alpha^\vee \rangle > 0$ をみたすならば, l は R の強レフシェッツ元である. $\square$

そして, ワイル群はワイルチェンバーたちのなす集合に推移的に作用するから, 次のような強レフシェッツ元の特徴付けを得る.

系 7. R をワイル群の余不変式環とする. R_1 の元 l が強レフシェッツ元であるための必要十分条件は, l が W のどの鏡映でも固定されないことである. $\square$

5 $I_2(m)$ の余不変式環

この項では, $I_2(m)$ の余不変式環 $R = \bigoplus_{d=0}^m R_d$ において, どの鏡映でも固定されない R_1 の元は, 強レフシェッツ元であることを示す.

s_β で、ゼロでないベクトル $\beta \in \mathbb{R}^2$ に関する鏡映を表し、 $i = 1, 2$ に対して、単純ルートを s_i を $s_i = s_{\alpha_i}$ で定め、単純鏡映と呼ぶ。単純鏡映は $(s_1 s_2)^m = e$ という関係式をみたす。ここに、 e は $I_2(m)$ の単位元である。各元 $w \in I_2(m)$ は、 s_1 と s_2 の積で書けるが、 w を s_1 と s_2 で書く最短の長さを $l(w)$ で表し、 w の長さと呼ぶ。 $k \geq 0$ に対して、 $I_2(m)$ の元 a_k と b_k を、 s_1 と s_2 が交互に現れる積で次のように定める。

a_k も b_k も, $0 \leq k \leq m$ のときに限り, 長さ k であることに注意しておく.

$$(4) \quad b_{2k+1} = s_{\beta(-(k+1)\theta)}.$$

Proof. (1) と (2) は明らかである. (3) は $k = 0$ に対しては明らかであり, $s_1 s_2$ が角度 2θ の回転であることから, $k > 0$ に対しても帰納的に証明できる. (4) も (3) と同様に証明できる. $\square$

$$e \begin{array}{c} \nearrow s_1 \\ \searrow s_2 \end{array} \begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \end{array} \xrightarrow[a_3]{s_2} \begin{array}{c} a_2 \\ b_2 \end{array} \cdots \begin{array}{c} a_k \\ b_k \end{array} \xrightarrow[b_{2k+1}]{s_2} \begin{array}{c} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{array} \cdots \begin{array}{c} a_{m-1} \\ b_{m-1} \end{array} \xrightarrow[s_1]{s_2} a_m = b_m, \quad (1)$$

$\mathbb{R}^2$ の標準内積を $(\cdot, \cdot)$ で表す. 正ルート β の余ルートを, $\beta^\vee = 2\beta/(\beta, \beta) = 2\beta$ で定義し, 基本ウェイト ϖ_1, ϖ_2 を, $(\alpha_i^\vee, \varpi_j) = \delta_{i,j}$ により定める. $(\beta(\phi), \beta(\psi)) = \cos(\phi - \psi)$ であることに注意すると,

— 6 —

である. $R = \mathbb{R}[x_1, x_2]/J$ を $I_2(m)$ の余不変式環とする. ここに J は定数項のない $I_2(m)$ -不変多項式で生成される斉次イデアルである. すると [Hil81] より, R は, X_w の次数が $l(w)$ に等しいような線型基底 $\{X_w \mid w \in I_2(m)\}$ を持ち, この基底は次の Pieri 公式をみたす.

$$X_{s_\alpha} X_w = \sum_{\substack{\beta: \text{正ルート}, \\ l(ws_\beta)=l(w)+1}} (\beta^\vee, \varpi_\alpha) X_{ws_\beta} \quad (\alpha: \text{単純ルート}). \quad (2)$$

この Pieri 公式 (2) を用いて, $l \in R_1$ がどの鏡映でも固定されないならば, l は強レフシェッツ元であることを示す. まず, 2次元空間 R_k の基底 X_{a_k}, X_{b_k} に関する, 掛け算写像 $\times X_{s_i} : R_k \rightarrow R_{k+1}$ の作用を, $k = 1, 2, \dots, m-2$ に対して具体的に計算する.

$$\begin{aligned} X_{s_1} X_{a_k} &= \sum_{\beta=\beta(\pi-\theta), \beta(k\theta)} (\beta^\vee, \varpi_1) X_{a_k s_\beta} \\ &= \left(2\beta(\pi-\theta), \frac{\beta(\pi/2-\theta)}{2\sin\theta} \right) X_{b_{k+1}} + \left(2\beta(k\theta), \frac{\beta(\pi/2-\theta)}{2\sin\theta} \right) X_{a_{k+1}} \\ &= \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} X_{a_{k+1}}. \end{aligned}$$

同様に, 掛け算写像 $\times X_{s_i}$ の X_{a_k} と X_{b_k} の上の他の作用も計算できる.

$$\begin{aligned} X_{s_1} X_{b_k} &= X_{a_{k+1}} + \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} X_{b_{k+1}}, \\ X_{s_2} X_{a_k} &= X_{b_{k+1}} + \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} X_{a_{k+1}}, \quad X_{s_2} X_{b_k} = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} X_{b_{k+1}}. \end{aligned}$$

言い換えると, 掛け算写像 $\times X_{s_i} : R_k \rightarrow R_{k+1}$ の基底 $\{X_{a_k}, X_{b_k}\}$ と $\{X_{a_{k+1}}, X_{b_{k+1}}\}$ に関する行列表現は,

$$X_{s_1} = \begin{pmatrix} p_k & 1 \\ 0 & p_{k+1} \end{pmatrix}, \quad X_{s_2} = \begin{pmatrix} p_{k+1} & 0 \\ 1 & p_k \end{pmatrix}, \quad \text{where } p_k = \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}, \quad (3)$$

である. 以上の準備のもと, 目的の主張が証明できる.

命題 9. $R = \bigoplus_{d=0}^m R_d$ を, 二面体群 $I_2(m)$ の余不変式環とする. $l \in R_1$ が強レフシェッツ元であるための必要十分条件は, l が $I_2(m)$ のどの鏡映でも固定されないことである.

Proof. 必要性は定理 2 から従う.

R_1 の元 $l = aX_{s_1} + bX_{s_2}$ を, どの鏡映でも固定されない元とする ($a, b \in \mathbb{R}$). l が強レフシェッツ元であることを証明するためには, 掛け算写像 $\times l^{m-2i} : R_i \rightarrow R_{m-i}$ が, すべての $i = 0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor$ に対して全単射であることを言えばよい.

第一に、掛け算写像 $\times l^m : R_0 \rightarrow R_m$ が全単射であることを証明する。この写像の (唯一の) 行列要素は、 a, b に関する全次数 m の多項式である。各正ルート β について、この多項式は、 l が鏡映 s_β で固定されると仮定したときにゼロになるような因数を含まなくてはならない。したがって、この多項式は m 個の正ルートに対応する m 個の異なる因数の積に、定数倍を除いて等しい。 l はどの鏡映でも固定されないから、この多項式はゼロになり得ず、写像 $\times l^m : R_0 \rightarrow R_m$ は全単射である。

第二に、掛け算写像 $\times l^{m-2i} : R_i \rightarrow R_{m-i}$ が、 $k = 1, 2, \dots, \lfloor m/2 \rfloor$ に対して全単射であることを証明するためには、 $\times l : R_k \rightarrow R_{k+1}$ が全単射であることを、 $k = 1, 2, \dots, m-2$ に対して証明すればよい。掛け算写像 $\times l : R_k \rightarrow R_{k+1}$ の行列表現は、式 (3) より

$$\begin{pmatrix} ap_k + bp_{k+1} & a \\ b & ap_{k+1} + bp_k \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } p_k = \frac{\sin k\theta}{\sin \theta},$$

であり、この行列式は、 $(ap_k + bp_{k+1})(ap_{k+1} + bp_k) - ab = (a^2 + b^2)p_k p_{k+1} + ab(p_k^2 + p_{k+1}^2 - 1)$ に等しい。ここに、 $l \neq 0$ だから、 a, b の少なくとも一方はゼロではなく、 $b \neq 0$ としてよい。 $t = a/b$ とおくと、この行列式は、 $b^2(p_k p_{k+1} t^2 + (p_k^2 + p_{k+1}^2 - 1)t + p_k p_{k+1})$ に等しい。この行列式がゼロにならないことを証明するためには、この t に関する 2 次式の判別式が負であることを示せばよい。判別式は $(p_k^2 + p_{k+1}^2 - 1)^2 - 4(p_k p_{k+1})^2$ 、であり、これは

$$\begin{aligned} & (\sin k\theta + \sin(k+1)\theta + \sin \theta)(\sin k\theta + \sin(k+1)\theta - \sin \theta) \\ & \times (\sin k\theta - \sin(k+1)\theta + \sin \theta)(\sin k\theta - \sin(k+1)\theta - \sin \theta) / \sin^4 \theta, \end{aligned}$$

に等しい。この式において、4 つめの因数が負であり、残りの 3 つの因数は正であることが簡単に示される。こうして、掛け算写像 $\times l : R_k \rightarrow R_{k+1}$ は $k = 1, 2, \dots, m-2$ に対して全単射であることが示されたので、命題が証明された。□

参考文献

- [BGG73] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel'fand, and S. I. Gel'fand, *Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P* , Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), no. 3(171), 3–26, This article has appeared in English translation [Russian Math. Surveys 28 (1973), no. 3, 1–26]. MR MR0429933 (55 #2941)
- [GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, Pure and Applied Mathematics. MR MR507725 (80b:14001)
- [Hil81] Howard L. Hiller, *Schubert calculus of a Coxeter group*, Enseign. Math. (2) **27** (1981), no. 1-2, 57–84. MR MR630960 (82m:14031)

- [Hum90] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR MR1066460 (92h:20002)