

楕円 Hecke 環の中心拡大の Kazhdan-Lusztig 多項式

竹林 忠吉

1 はじめに

楕円ルート系と楕円 Weyl 群は、斉藤恭司氏 ([1]) によって導入され、楕円 Weyl 群の生成元の関係式は、楕円 Dynkin 図形を用いて Coxeter 群の一般化の観点から記述することができる ([2])。\$X_l^{(1,1)}\$ 型の楕円 Artin 群 (楕円 Braid 群) の生成元の関係式も同様に、楕円 Dynkin 図形、あるいはすべての \$\alpha_i, \alpha_i^*\$ (\$0 \leq i \leq l\$) が対になるようにいくつかの \$\alpha_i^*\$ を付け加えた完備な楕円 Dynkin 図形を用いて記述される ([6], [3], [4])。楕円 Hecke 環とその中心拡大は、楕円 Artin 群の群環の二次関係式による商環として定義され、それはまた、Cherednik の二重アフィン Hecke 環の部分代数にもなっている ([3], [4], [5])。Kazhdan と Lusztig ([7], [8]) は、Coxeter 群 \$(W, S)\$ の要素 \$x, y\$ に対して定まる、ある多項式 \$P_{x,y}\$ (Kazhdan-Lusztig 多項式) を導入しそのコホモロジー論的な解釈を与えた。それは、\$G\$ を代数閉体 \$K\$ 上の連結な簡約代数群とし、\$B \subset G\$ を Borel 部分群、\$W\$ を \$G\$ の Weyl 群とすると、\$G = \bigcup_{w \in W} BwB\$ と分解さ

れ、\$B_w := BwB/B\$ (Bruhat cell) とすると、その閉包は、\$\overline{B_w} = \bigcup_{y \in W, y \leq w} B_y\$ (Schubert 多様体) となる。このとき、\$\dim \overline{B_w} = l(w)\$ である。intersection chain 複体 \$IC^*(\overline{B_w})\$ の cohomology sheaf \$H^*(\overline{B_w})\$ を考えると \$y \leq w\$ に対してすべての点 \$p_y \in B_w\$ での茎 \$H_{p_y}^i(\overline{B_w})\$ は、同型であり、\$H_{p_y}^{2i+1}(\overline{B_w}) = 0\$ for all \$y \leq w\$, and \$i\$。さらに、\$P_{y,w}(t) = \sum_{i \geq 0} \dim H_{p_y}^{2i}(\overline{B_w}) t^i\$、これより、

\$P_{y,w}(t)\$ の係数は、すべて正である、というものであった。本稿では、\$X_l^{(1,1)}\$ 型の楕円 Hecke 環の中心拡大に対して Kazhdan-Lusztig 多項式を定義する。そして、それが \$R\$-多項式 \$R_{x,y}\$ を用いて、条件 \$P_{w,w} = 1, \overline{P_{x,w}} = \sum_{x \leq y \leq w} R_{x,y} P_{y,w}\$ for \$x, y, w \in \tilde{A}(R)\$, \$P_{y,w} \in \Gamma_-\$ で定まる

ことを示す。ここで、\$\tilde{A}(R)\$ は楕円 Artin 群 \$A(R)\$ の中ですべての生成元に対する \$a^2\$ と \$a^{-1}\$ を含まないような部分集合である。

2 \$X_l^{(1,1)}\$ 型の楕円 Artin 群 と 楕円 Hecke 環の中心拡大

\$R\$ を type \$X\$ (\$X = A_l, B_l, \dots, G_2\$), のルート系。\$Q\$ をルート格子、\$Q^\vee\$ を \$R\$ のコルート格子とする。\$R^a = R \oplus \mathbb{Z}b\$ は、\$X_l^{(1)}\$ 型のアフィンルート系であり、対応するアフィン Weyl 群 \$W^a\$ は、半直積 \$W \ltimes Q^\vee\$ と同型である。また、\$R^{el} = R \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}a\$ は、\$X_l^{(1,1)}\$ 型の楕円ルート系であり、対応する楕円 Weyl 群 \$W^{el}\$ は、半直積 \$W \ltimes (Q^\vee \times Q^\vee)\$ と同型である。楕円 Dynkin 図形で、すべての \$\alpha_i\$ と \$\alpha_i^*\$ が組になるように、いくつかの \$\alpha_i^*\$ を加えた図形を完

備な楕円 Dynkin 図形と呼ぶとき、次の結果が成立。

命題 2.1 ([4])

$X_l^{(1,1)}$ 型の楕円 Artin 群は、完備な楕円 Dynkin 図形を用いて、次の生成元と関係式で記述される。

生成元： a, a^* for $\alpha \in \{\alpha_0, \dots, \alpha_l\}$

関係式：

$$\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \alpha \quad \beta \end{array} \Rightarrow ab = ba$$

$$\begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \alpha \quad \beta \end{array} \Rightarrow aba = bab$$

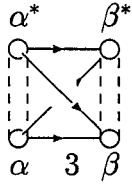
$$\begin{array}{c} \circ \xrightarrow{2} \circ \\ \alpha \quad \beta \end{array} \Rightarrow (ab)^2 = (ba)^2$$

$$\begin{array}{c} \circ \xrightarrow{3} \circ \\ \alpha \quad \beta \end{array} \Rightarrow (ab)^3 = (ba)^3$$

$$\begin{array}{c} \alpha^* \quad \beta^* \\ \circ \text{---} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \text{---} \circ \\ \alpha \quad \infty \quad \beta \end{array} \Rightarrow aa^*bb^* = a^*bb^*a = bb^*aa^* = b^*aa^*b$$

$$\begin{array}{c} \alpha^* \quad \beta^* \\ \circ \text{---} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \text{---} \circ \\ \alpha \quad \beta \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} bb^*a &= a^*bb^*, & aa^*b &= b^*aa^* \\ aa^*bb^* &= bb^*aa^* \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \alpha^* \quad \beta^* \\ \circ \xrightarrow{2} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \xrightarrow{2} \circ \\ \alpha \quad 2 \quad \beta \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} aa^*bb^* &= a^*bb^*a, & aa^*b &= b^*aa^* \\ aa^*bb^* &= bb^*aa^* \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} aa^*bb^*a &= a^*aa^*bb^*, & aa^*b &= b^*aa^* \\ aa^*bb^* &= bb^*aa^* \end{aligned}$$

定義 2.2 $\mathbb{C}_t$ を独立変数 $\{t_j^{\frac{1}{2}} := t_{\alpha_j}^{\frac{1}{2}} \ (0 \leq j \leq l)\}$ の有理関数体とすると、 $X_l^{(1,1)}$ 型の楕円 Hecke 環 $\mathcal{H}$ の中心拡大 $\widetilde{\mathcal{H}}$ は、体 $\mathbb{C}_t$ 上 $\{T_j, T_j^* \ (0 \leq j \leq l)\}$ で生成され、命題 2.1 の関係式と次の関係式で定義される： $(T_\alpha - t_\alpha^{1/2})(T_\alpha + t_\alpha^{-1/2}) = 0$, for $\alpha \in \{\alpha_0, \alpha_0^*, \dots, \alpha_l, \alpha_l^*\}$ ($T_\alpha^* := T_{\alpha^*}$, $t_{\alpha^*} = t_\alpha$).

3 楕円 Hecke 環の中心拡大の Kazhdan-Lusztig 多項式

$A(R)$ を楕円ルート系 R に対する楕円 Artin 群とし、 $S := \{a, \alpha \in D(R)\}$ を $A(R)$ の生成元とする。ここで $D(R)$ は、 R の完備な楕円 Dynkin 図形を表すとする。 $\tilde{A}(R) \subset A(R)$ をすべての $\alpha \in D(R)$ に対する a^2 と a^{-1} を含まない部分集合とする。尚、以下では結果のみを述べるが証明は、[10] を参照。

命題 3.1 Γ を $t_\alpha^{\frac{1}{2}}$, $\alpha \in D(R)$ で生成される自由可換群とすると、 $\widetilde{\mathcal{H}}(R)$ は、群環 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ 上の代数で、 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -加群として自由で基底 T_w ($w \in \tilde{A}(R)$) を持つ。積は、

$$T_{a_1 a_2 \dots a_p} = T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_p} \quad \text{if } a_1 a_2 \dots a_p \in \tilde{A}(R) \quad (1)$$

$$(T_\alpha + t_\alpha^{-\frac{1}{2}})(T_\alpha - t_\alpha^{\frac{1}{2}}) = 0 \quad \text{if } \alpha \in D(R) \quad (2)$$

(ここで、 $T_{a_1} := T_{\alpha_1}$, $t_{a_1} := t_{\alpha_1}$.) で与えられる。

(注) (1) と (2) は、次と同値である。

$$T_s T_w = T_{sw} \quad \text{if } l(sw) > l(w) \quad (3)$$

$$T_s T_w = (t_s^{\frac{1}{2}} - t_s^{-\frac{1}{2}}) T_w + T_w, \quad \text{if } w = sw' \in \tilde{A}(R), \ s \in S \quad (4)$$

ここで、 l は、 $\tilde{A}(R)$ 上の長さ関数である。

$\tilde{A}(R)$ の任意の要素 $w = a_1 a_2 \dots a_p$ に対して、 $t_w := t_{a_1} t_{a_2} \dots t_{a_p}$, $\epsilon_w := (-1)^{l(w)}$ を定義。 $p \rightarrow \bar{p}$ を任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して、 $\gamma \rightarrow \gamma^{-1}$ とする群環 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ の involution とし、これを $\widetilde{\mathcal{H}}(R)$ の involution $\iota: h \rightarrow \bar{h}$ に、

$$\overline{\sum_w a_w T_w} = \sum_w \bar{a}_w T_{\text{rev}(w)}^{-1} \quad (a_w \in \mathbb{Z}[\Gamma])$$

によって拡張する。ここで、 $w = a_1 a_2 \dots a_p \in \tilde{A}(R)$ に対して $\text{rev}(w) := a_p \dots a_2 a_1$ と定義し、以下では、 w^{-1} と書く。 $\leq$ を $\tilde{A}(R)$ 上の Bruhat 順序とする。すなわち、 $x, w \in \tilde{A}(R)$

に対し、 $x \leq w$ とは $x = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_t}$, $w = a_1 a_2 \cdots a_r$, $\forall a_i \in S$, $i_1, i_2, \dots, i_t$ は、 $1, 2, \dots, r$ の部分列と表せることである。ここで、 $x \leq w$ は、おのこの w の表示ごとに考えることとする。例えば、 $w = a^* b b^* = b b^* a$, のとき、

$$\begin{cases} \text{if } x \leq a^* b b^*, & \text{then } x = \{a^*, b, b^*, a^* b, a^* b^*, b b^*, a^* b b^*\}, \\ \text{if } x \leq b b^* a, & \text{then } x = \{b, b^*, a, b b^*, b a, b^* a, b b^* a\}. \end{cases}$$

である。

多項式 $R_{x,w} \in \mathbb{Z}[\Gamma]$, $(x, w \in \tilde{A}(R))$ を、 $T_{w^{-1}}^{-1} = \sum_x \overline{R_{x,w}} T_x$ で定義する。これより、 $x \leq w$ でないときは、 $R_{x,w} = 0$ となり、また $R_{x,w}$ は、 x, w の表示によらないこともわかる。次の公式により、帰納的に $R_{x,w}$ を計算できる。

補題 3.2

- (a) $R_{x,w} = R_{x',w'}$ if $\begin{cases} x = s x', w = s w', & \text{or } x = x' s, w = w' s \\ \text{for } x, w \in \tilde{A}(R), s \in S. \end{cases}$
- (b) $R_{x,w} = (t_s^{\frac{1}{2}} - t_s^{-\frac{1}{2}}) R_{x,w'} + R_{s x, w'}$ if $s x > x$ and $w = s w'$ in $\tilde{A}(R)$.

また次が成立。

補題 3.3

すべての $x, w \in \tilde{A}(R)$ に対し、

(a) $\overline{R_{x,w}} = \epsilon_x \epsilon_w R_{x,w},$

(b) $\sum_{x \leq y \leq w} \overline{R_{x,y}} R_{y,w} = \delta_{x,w}.$

系 3.4 (a) すべての $x \in \tilde{A}(R)$ に対し、 $R_{x,x} = 1$ である。

(b) もし $x < y$ で、 $l(y) = l(x) + 1$ ならば、 x は y の表示から、ある $s \in S$ を取り除いたものであり、このとき、 $R_{x,y} = t_s^{\frac{1}{2}} - t_s^{-\frac{1}{2}}$ である。

(c) もし $x < y$ で、 $l(y) = l(x) + 2$ ならば、 x は y の表示から、ある $s, r \in S$ を取り除いたものであり、このとき、 $R_{x,y} = (t_s^{\frac{1}{2}} - t_s^{-\frac{1}{2}})(t_r^{\frac{1}{2}} - t_r^{-\frac{1}{2}})$ である。

Γ の群構造と両立するような、 Γ 上の全順序が与えられているとする。 Γ_+ をこの順序に関して正である要素の集合とし、 $\Gamma_- = (\Gamma_+)^{-1}$ とおく。すべての $s \in S$ に対し、 $t_s^{\frac{1}{2}} \in \Gamma_+$ と仮定する。Kazhdan-Lusztig 多項式を定義するために、 $w \in \tilde{A}(R)$ のおのこの表示ごとに定められ、involution ι で不変な要素からなる $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -加群 $\tilde{\mathcal{H}}(R)$ の部分集合 $\{C_w\}$ を導入する。 $s \in S$ に対して、 $C_s := T_s - t_s^{\frac{1}{2}}$ とし、 $s \neq r$ においては、 $C_{sr} := C_s C_r = T_s T_r - t_s^{\frac{1}{2}} T_s - t_r^{\frac{1}{2}} T_r + t_s^{\frac{1}{2}} t_r^{\frac{1}{2}}$ と定義する。一般に、 ι 不変な要素 $\{C_w\}$ は、次のように与えられる。

命題 3.5 $w \in \tilde{A}(R)$ のおのこの表示に対し、次を満たすような唯一つの $C_w \in \tilde{\mathcal{H}}(R)$

が存在する。

(a) $\overline{C_w} = C_w$.

(b) $C_w = \sum_{x \leq w} \epsilon_x \epsilon_w \overline{P_{x,w}} T_x$, ここで、 $P_{x,w} \in \mathbb{Z}[\Gamma]$ は、 $x < w$ に対して Γ_- の要素の

$\mathbb{Z}$ 上の線型結合であり、 $P_{w,w} = 1$ である。

(注) $\tilde{A}(R)$ 内では、 $a_1 a_1^* a_2 = a_2^* a_1 a_1^*$ が成立しているとし、 $t_{a_1}^{\frac{1}{2}} = t_{a_2}^{\frac{1}{2}} = t$ とおく。このとき、

$$\begin{cases} C_{a_1 a_1^* a_2} = T_1 T_1^* T_2 - t(T_1 T_1^* + T_1 T_2 + T_1^* T_2) + t^2(T_1 + T_1^* + T_2) - t^3, \\ C_{a_2^* a_1 a_1^*} = T_2^* T_1 T_1^* - t(T_2^* T_1 + T_2^* T_1^* + T_1 T_1^*) + t^2(T_2^* + T_1 + T_1^*) - t^3. \end{cases}$$

これより、 $C_{a_1 a_1^* a_2} \neq C_{a_2^* a_1 a_1^*}$ である。それゆえ、 $w \in \tilde{A}(R)$ のおののの表示に対して、 C_w を考えている。

しかしながら、次が成立。

命題 3.7 もし $\tilde{A}(R)$ 内で、 $w = w'$, $x = x'$ ならば、 $P_{x,w} = P_{x',w'}$ である。

$s \in S$, $w \in \tilde{A}(R)$ は、 $w < sw$ を満たしているとし、 $y = sy' < w$ となるような y に対し、 $M_{y,w}^s \in \mathbb{Z}[\Gamma]$ を次の帰納的条件、

(3.3) $\sum_{\substack{y \leq z < w \\ z = sz'}} \overline{P_{y,z}} M_{z,w}^s - t_s^{-\frac{1}{2}} \overline{P_{y,w}}$ は、 Γ_+ の要素の結合である、

と対称条件、

(3.4) $\overline{M_{y,w}^s} = M_{y,w}^s$,

で定義する。条件 (3.3) は、すべての $\gamma \in \Gamma - \Gamma_+$ に対する、 $M_{y,w}^s$ の γ の係数を一意的に決定し、条件 (3.4) は、残りの係数を決定する。

命題 3.8 $s \in S$, $w \in \tilde{A}(R)$ とするとき、次が成立。

(a) $(T_s - t_s^{\frac{1}{2}})C_w = C_{sw} - \sum_{\substack{z < w \\ z = sz'}} \epsilon_z \epsilon_w M_{z,w}^s C_z$ if $w < sw$.

(b) $(T_s + t_s^{-\frac{1}{2}})C_w = 0$ if $w = sw'$.

命題 3.9 $y < w$ は、 $l(w) = l(y) + 1$ を満たし、 y はある s を w の表示から取り除いて得られるとするとき、次が成立。

(a) $P_{y,w} = t_s^{-\frac{1}{2}}$.

(b) さらに、 $r \in S$ が $y = ry' < w < rw$ を満たすとき、次が成立：

$$M_{y,w}^r = \begin{cases} 0 & \text{if } t_r^{\frac{1}{2}} < t_s^{\frac{1}{2}} \\ 1 & \text{if } t_r^{\frac{1}{2}} = t_s^{\frac{1}{2}} \\ t_s^{\frac{1}{2}} t_r^{-\frac{1}{2}} + t_s^{-\frac{1}{2}} t_r^{\frac{1}{2}} & \text{if } t_r^{\frac{1}{2}} > t_s^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

以下で、 $t_0^{\frac{1}{2}} = \dots = t_l^{\frac{1}{2}} = t$, とおくとき、つぎの帰納的な公式が成立。

命題 3.10 $w = sw'$ の場合に、

$$(i) \quad \text{もし } y < sy \text{ ならば } P_{y,w} = t^{-1} P_{y,w'} + P_{sy,w'} - \sum_{\substack{y \leq z < w' \\ z = sz'}} M_{z,w'} P_{y,z}.$$

$$(ii) \quad \text{もし } y = sy' \text{ ならば } P_{y,w} = t P_{y,w'} + P_{y',w'} - \sum_{\substack{y \leq z < w' \\ z = sz'}} M_{z,w'} P_{y,z}.$$

ここで、 $M_{z,w'}$ は、 $P_{z,w'}$ での $t^{l(w')-l(z)-1}$ の係数である。

系 3.10 もし $x \leq w$ で、 $l(w) - l(x) \leq 2$ ならば、 $P_{x,w} = t^{l(x)-l(w)}$ である。

4 Appendix

B_2 型の場合

Coxeter 群を (W, S) とすると、 $S = \{s_1, s_2\}$ であり、関係式は、 $s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^4 = 1$, で与えられる。

R -多項式は、

$$\begin{aligned} R_{x,x} &= 1, & \text{以下では、例えば } R_{s_1, s_2 s_1} &=: R_{1,21} \quad t_{s_i} =: t_i \text{ で表す} \\ R_{e,1} &= R_{2,21} = R_{12,121} = R_{212,2121} = R_{2,12} = R_{21,121} = t_1^{\frac{1}{2}} - t_1^{-\frac{1}{2}}, \\ R_{e,2} &= R_{1,12} = R_{21,212} = R_{121,1212} = R_{1,21} = R_{12,212} = t_2^{\frac{1}{2}} - t_2^{-\frac{1}{2}}, \\ R_{e,12} &= R_{2,212} = R_{12,1212} = R_{id,21} = R_{1,121} = R_{21,1212} = (t_1^{\frac{1}{2}} - t_1^{-\frac{1}{2}})(t_2^{\frac{1}{2}} - t_2^{-\frac{1}{2}}), \\ R_{2,121} &= (t_1^{\frac{1}{2}} - t_1^{-\frac{1}{2}})^2, \\ R_{1,212} &= (t_2^{\frac{1}{2}} - t_2^{-\frac{1}{2}})^2, \\ R_{e,121} &= R_{2,2121} = (t_2^{\frac{1}{2}} - t_2^{-\frac{1}{2}})(t_1 + t_1^{-1} - 1), \\ R_{e,212} &= R_{1,2121} = (t_1^{\frac{1}{2}} - t_1^{-\frac{1}{2}})(t_2 + t_2^{-1} - 1), \\ R_{e,1212} &= (t_1 + t_1^{-1})(t_2 + t_2^{-1}) - (t_1 + t_1^{-1} + t_2 + t_2^{-1}). \end{aligned}$$

Kazhdan-Lusztig 多項式は、

$$\begin{aligned}
P_{2,212} &= t_2^{-\frac{1}{2}}(t_1^{-\frac{1}{2}} - t_1^{\frac{1}{2}}), \\
P_{e,212} &= t_2^{-1}(t_1^{-\frac{1}{2}} - t_1^{\frac{1}{2}}), \\
P_{1,121} &= t_2^{-\frac{1}{2}}(t_1^{-\frac{1}{2}} + t_1^{\frac{1}{2}}), \\
P_{e,121} &= t_1^{-\frac{1}{2}}t_2^{-\frac{1}{2}}(t_1^{-\frac{1}{2}} + t_1^{\frac{1}{2}}), \\
P_{y,w} &= t_y^{\frac{1}{2}}t_w^{-\frac{1}{2}} \quad \text{for all other pairs } y \leq w.
\end{aligned}$$

($P_{y,w}$ は、負の係数を持つ場合もある。)

$\leq_{\overline{L}}$ を次で定義される、Coxeter 群 W 上の前順序とする。“ $T_s \cdot C_x$ を C_w -基底を用いて表したとき、 $C_{x'}$ が現われるような $s \in S$ が存在するとき、 $x' \leq_{\overline{L}} x$ とする。” これを、左前順序と呼ぶ。 $\leq_{\overline{L}}$ に関する同値関係を $\sim_{\overline{L}}$ で表し、(i.e. $x \sim_{\overline{L}} w \Leftrightarrow x \leq_{\overline{L}} w$ かつ $w \leq_{\overline{L}} x$, (または、 $x = w$)) W の同値類を左 cell と呼ぶ。 $x, y \in W$ に対して、 $\leq_{\overline{L,R}}$ とは W の列 $x = x_0, x_1, \dots, x_r = y$ s.t. $x_i \leq_{\overline{L}} x_{i+1}$ または、 $x_i^{-1} \leq_{\overline{L}} x_{i+1}^{-1}$ for $i = 0, 1, \dots, r-1$, が存在することと定義する。前順序 $\leq_{\overline{L,R}}$ に関する W の同値関係を $\sim_{\overline{L,R}}$ で表し、その同値類を W の両側 cell と呼ぶ。

B_2 型の場合、

$$\begin{aligned}
T_1 \cdot C_1 &= -t_1^{-\frac{1}{2}}C_1, \\
C_2 &= t_1^{\frac{1}{2}}C_2 + C_{12}, \\
C_{12} &= -t_1^{-\frac{1}{2}}C_{12}, \\
C_{21} &= t_1^{\frac{1}{2}}C_{21} + C_{121}, \\
C_{121} &= -t_1^{-\frac{1}{2}}C_{121}, \\
C_{212} &= t_1^{\frac{1}{2}}C_{212} + C_{1212}, \\
C_{1212} &= -t_1^{-\frac{1}{2}}C_{1212}, \\
\\
T_2 \cdot C_1 &= t_2^{\frac{1}{2}}C_1 + C_{21}, \\
C_2 &= -t_2^{-\frac{1}{2}}C_2, \\
C_{12} &= t_2^{\frac{1}{2}}C_{12} + C_{212} + (t_1^{\frac{1}{2}}t_2^{-\frac{1}{2}} + t_1^{-\frac{1}{2}}t_2^{\frac{1}{2}})C_2, \\
C_{21} &= -t_2^{-\frac{1}{2}}C_{21}, \\
C_{121} &= t_2^{\frac{1}{2}}C_{121} + C_{1212} + (t_1^{\frac{1}{2}}t_2^{-\frac{1}{2}} + t_1^{-\frac{1}{2}}t_2^{\frac{1}{2}})C_2, \\
C_{212} &= -t_2^{-\frac{1}{2}}C_{212}, \\
C_{1212} &= -t_2^{-\frac{1}{2}}C_{1212}.
\end{aligned}$$

上の作用より、左 cell は、 $\{e\}, \{s_1\}, \{s_2, s_1 s_2\}, \{s_2 s_1 s_2\}, \{s_2 s_1, s_1 s_2 s_1\}, \{s_1 s_2 s_1 s_2\}$, であり、両側 cell は、 $\{e\}, \{s_1\}, \{s_2 s_1 s_2\}, \{s_2, s_1 s_2, s_2 s_1, s_1 s_2 s_1\}, \{s_1 s_2 s_1 s_2\}$, である。

任意の $x \in W$ に対して、 I_x^L を $C_y, y \leq_L x$ で張られる Hecke 環 $\mathcal{H}$ の $\mathbb{Z}[t_i^{\frac{1}{2}}, t_i^{-\frac{1}{2}}]$ - 部分加群 (i.e. $\mathbb{Z}[t_i^{\frac{1}{2}}, t_i^{-\frac{1}{2}}] - span$) とし、 $\hat{I}_x^L$ を $C_y, y \leq_L x, y \not\sim_L x$ で張られる、部分加群とする。同様に、 $I_x^{L,R}$ と $\hat{I}_x^{L,R}$ を $\leq_L, \sim_L$ をそれぞれ、 $\leq_{L,R}, \sim_{L,R}$ で置き換えたものとする。このとき、 $I_x^L, \hat{I}_x^L$ は、 $\mathcal{H}$ の左イデアルであり、 $I_x^{L,R}, \hat{I}_x^{L,R}$ は、 $\mathcal{H}$ の両側イデアルである。それゆえ、 $I_x^L / \hat{I}_x^L$ は、 x の左 cell での y に対する C_y の像で張られる基底を持つ左 $\mathcal{H}$ -加群となり、 $I_x^{L,R} / \hat{I}_x^{L,R}$ は、両側 $\mathcal{H}$ -加群となる。

$A_1^{(1,1)}$ 型の場合

橢円 Artin 群 (橢円 Braid 群) の生成元と関係式は、

生成元: s_1, s_1^*, s_2, s_2^* ,

関係式: $s_1 s_1^* s_2 s_2^* = s_1^* s_2 s_2^* s_1 = s_2 s_2^* s_1 s_1^* = s_2^* s_1 s_1^* s_2$,
で与えられる。

$w = s_2 s_1 s_1^* s_2$ のとき、 $y \leq w$ とすると、

$y = \{e, s_2, s_1, s_1^*, s_2 s_1, s_2 s_1^*, s_1 s_1^*, s_1 s_2, s_1^* s_2, s_2 s_1 s_1^*, s_2 s_1^* s_2, s_1 s_1^* s_2\}$, であり、

$t_{\alpha_1}^{\frac{1}{2}} = t_{\alpha_1^*}^{\frac{1}{2}} = t_{\alpha_2}^{\frac{1}{2}} = t_{\alpha_2^*}^{\frac{1}{2}} = t$ とおくとき、

R -多項式は、

$$\begin{aligned} R_{e,w} &= (t - t^{-1})^4 + (t - t^{-1})^2, \\ R_{y,w} &= (t - t^{-1})^{4-l(y)} \quad \text{for all other } y \ (l(y) = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Kazhdan-Lusztig 多項式は、($P_{y,w} \in t^{-1}\mathbb{Z}[t^{-1}]$ の下で求められる。)

$$\begin{aligned} P_{e,w} &= t^{-4} + t^{-2}, \\ P_{s_1,w} &= P_{s_1^*,w} = t^{-3}, \quad P_{s_2,w} = t^{-3} + t^{-1}, \\ P_{y,w} &= t^{l(y)-4} \quad \text{for all other } y, \ (l(y) = 2, 3). \end{aligned}$$

(この場合、係数は、すべて正と予想される。尚、Coxeter 群の場合 $t_{\alpha_i} = t$ for all i としたときの Kazhdan-Lusztig 多項式の係数は、すべて正であるという予想があり、crystallographic Coxeter 群 (= Kac-Moody Lie 環の Weyl 群 となる群) の場合は、証明されている。)

References

- [1] K. Saito *Extended affine root systems I,II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **21** (1985), 75-179, **26** (1990), 15-78

- [2] K. Saito and T. Takebayashi *Extended affine root systems III*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **33** (1997), 301-329
- [3] H. Yamada *Elliptic root system and elliptic Artin group*, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **36** (2000), 111-138
- [4] T. Takebayashi *Double affine Hecke algebras and elliptic Hecke algebras*, Journal of Algebra **253** (2002), 314-349
- [5] I. Cherednik *Lectures on Knizhnik-Zamolodchikov equations and Hecke algebras*, MSJ Memoirs, Quantum Many-Body Problems And Representation Theory, (1998), 1-96
- [6] H. van der Lek *Extended Artin groups*, Proc. of Symp. in Pure Math. vol. **40** Part 2 (1983), 117-121
- [7] D. Kazhdan and G. Lusztig *Representations of Coxeter Groups and Hecke algebras*, Inventiones math. **53** (1979), 165-184
- [8] D. Kazhdan and G. Lusztig *Schubert varieties and Poincaré duality*, Proc. Symp. in Pure Math. **36** (1980), 185-203
- [9] J.E. Humphreys *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in advanced mathematics **29**, (1990)
- [10] T. Takebayashi *Kazhdan-Lusztig polynomials of the central extension of the elliptic Hecke algebras*, To appear in Journal of Algebra