

A Scaling Limit for t -Schur Measures

松本 詔 (九州大学大学院数理学府)

1 序章

いわゆる random permutation の最長増加部分列の長さの分布は, random matrix の固有値の分布に密接に関連している. π を対称群 $\mathfrak{S}_N$ の元とし, $\ell(\pi)$ を π の最長増加部分列の長さとする. このとき, 対称群上の一様分布 $P_{\text{uniform}, N}(\{\pi\}) = \frac{1}{N!}$ ($\pi \in \mathfrak{S}_N$) に関して確率変数 $\ell(\pi)$ の分布を考える. その極限分布は Baik-Deift-Johansson [BDJ] によって,

$$(1.1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P_{\text{uniform}, N} \left(\frac{\ell(\pi) - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}} \leq s \right) = F_2(s)$$

となることが示されている. ここで $F_2(s)$ は Tracy-Widom 分布である. Tracy-Widom 分布とは Gaussian Unitary Ensemble (GUE) における random matrix のスケーリングされた最大固有値の極限分布である. また, $F_2(s)$ は次のようにも書ける. $\text{Ai}(x)$ を Airy 関数

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\infty e^{-\pi\sqrt{-1}/3}}^{\infty e^{\pi\sqrt{-1}/3}} e^{z^3/3 - xz} dz$$

とし, $K_{\text{Airy}}(x, y)$ を Airy kernel

$$K_{\text{Airy}}(x, y) = \frac{\text{Ai}(x)\text{Ai}'(y) - \text{Ai}'(x)\text{Ai}(y)}{x - y} = \int_0^\infty \text{Ai}(x+z)\text{Ai}(z+y)dz$$

とする. ここで, 二番目の等式は [TW1] で示されている. 分布関数 $F_2(s)$ は Fredholm 行列式

$$(1.2) \quad F_2(s) = \det(I - K_{\text{Airy}})|_{L^2([s, \infty))} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{[s, \infty)^k} \det(K_{\text{Airy}}(x_i, x_j))_{i,j=1}^k dx_1 \dots dx_k.$$

で与えられる. さらに, 関数 $F_2(s)$ は $u(x) \sim \text{Ai}(x)$ ($x \rightarrow \infty$) を満たすような, Painlevé 第 II 方程式

$$u'' = 2u^3 + xu$$

の唯一解 $u(x)$ を用いて,

$$F_2(s) = \exp \left(- \int_s^\infty (x-s)u(x)^2 dx \right)$$

とも書ける．これらの表示が同値であることは，[TW1] で示されている．

さて random permutation の最長増加部分列の長さの問題は，random partition の問題に言い換えられる． $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$, $\sum_j \lambda_j = N$ を N の partition とする．また partition の Young 図形を partition と同じ記号 λ で表す． f^λ を λ に対する standard tableaux 全体の個数とする．Plancherel 測度は，各 λ に対して，確率

$$P_{\text{Plan}, N}(\{\lambda\}) = \frac{(f^\lambda)^2}{N!}$$

を与えるものである．この測度は Robinson-Schensted-Knuth (RSK) 対応により $\mathfrak{S}_N$ の一様分布から導かれる．RSK 対応 ([Sa2]) とは，置換 $\pi \in \mathfrak{S}_N$ と $\lambda \vdash N$ に対する standard tableaux のペアとの 1 対 1 対応で，この対応により partition の第一行の長さ λ_1 は $\ell(\pi)$ に等しい．ここで， $\lambda \vdash N$ は λ が N の partition であることを意味する．よって，第一行の長さ λ_1 は，極限 $N \rightarrow \infty$ では GUE の random matrix の最大固有値のように振舞う．さらに，Borodin-Okounkov-Olshanski [BOO] と Johansson [J2] により，適当にスケールリングすると各 λ_j の分布と GUE の random matrix の j 番目に大きい固有値の分布が同等であるということが，独立に示された．またこの事実は Okounkov [Ok1] によって，直接的対応を与える幾何的証明もされている．

一方，Okounkov [Ok2] は partition の上に，Schur 測度という別の測度を導入した． $x = (x_1, x_2, \dots)$ と $y = (y_1, y_2, \dots)$ を変数の列とし， $\mathcal{P}$ を partition 全体の集合とする． $e_n(x)$ を基本対称関数 $e_n(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ とし，partition λ に対し，Schur 関数 s_λ を

$$s_\lambda(x) = \det(e_{\lambda'_i - i + j}(x))$$

と定義する．ここで， λ' は partition λ の共役な partition，すなわち， λ'_i は λ の第 i 列の長さである．Schur 測度は各 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対して，

$$(1.3) \quad P_{\text{Schur}}(\{\lambda\}) = \frac{1}{Z_0} s_\lambda(x) s_\lambda(y)$$

と定義される．ここで Z_0 は正規化するための定数である．

この測度を特殊化しよう． α を $0 < \alpha < 1$ なる実数とし固定する． $1 \leq i \leq m$ と $1 \leq j \leq n$ に対して， $x_i = y_j = \alpha$ とし，残りを 0 とする．ここで， $\tau = m/n$ を固定する．この特殊化を α -specialization という．Johansson [J1], [J3], [J4] は， $n \rightarrow \infty$ のとき， α -specialization された Schur 測度における λ_1 の分布がやはり Tracy-Widom 分布 $F_2(s)$ に収束することを示した．

さらに Tracy-Widom [TW2] は strict partition の上の確率測度，すなわち Schur 関数の代わりに Schur Q -関数を用いて定義された shifted Schur 測度に対しても同様の結果を得た．

そこでわれわれは，Schur 測度にパラメータ t を加えた一般化を導入する．対称関数 $e_n(x; t)$ を母関数

$$(1.4) \quad E_{x,t}(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + x_i z}{1 + t x_i z} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x; t) z^n$$

により定義し, Schur 関数 $S_\lambda(x; t)$ を

$$S_\lambda(x; t) := \det(e_{\lambda'_i - i + j}(x; t))$$

と定義する. 関数 $S_\lambda(x; t)$ は Cauchy 恒等式 ([Mac])

$$(1.5) \quad Z_t := \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} S_\lambda(x; t) s_\lambda(y) = \prod_{i,j=1}^{\infty} \frac{1 - tx_i y_j}{1 - x_i y_j},$$

を満たす. $t = 0$ のとき $E_x(z) = E_{x,0}(z)$ は基本対称関数 $e_n(x)$ の母関数だから, $S_\lambda(x; 0) = s_\lambda(x)$ である.

このとき, $\mathcal{P}$ 上の測度が

$$(1.6) \quad P_t(\{\lambda\}) := \frac{1}{Z_t} S_\lambda(x; t) s_\lambda(y)$$

と定義される. これは (1.5) より, 確率測度である. この測度を **t -Schur 測度** と呼ぶことにする. これは $t = 0$ のとき (1.3) の Schur 測度 P_{Schur} になる. P_σ を α -specialization 後の t -Schur measure とする. ここで $\sigma = (m, n, \alpha, t)$ はパラメータである. このとき, 次を得た.

定理 1. $-\infty < t \leq 0$ と仮定する. そのときある定数 $c_1(t) = c_1(\alpha, \tau, t)$ と $c_2(t) = c_2(\alpha, \tau, t)$ が存在して次を満たす.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\sigma \left(\frac{\lambda_1 - c_1(t)n}{c_2(t)n^{1/3}} \leq s \right) = F_2(s).$$

ここで, 関数 $F_2(s)$ は (1.2) で定義された Tracy-Widom 分布である.

この定理は, λ_1 の挙動がパラメータ t に依らないことを述べている. $t = 0$ のとき, この定理は Johansson [J1] による結果である.

2 Schur 関数, marked tableaux, RSK 対応

この章では, 前章で定義された t -Schur 測度に組合せ論的解釈を与えるために, Schur 関数と marked tableaux の関係について簡単に述べよう. くわしくは [Mac] や [Sa2] を見られたい.

$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とし, $\mathbb{P}$ を全順序集合 $\{1' < 1 < 2' < 2 < \dots\}$ とする. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して, 記号 k' と k はそれぞれ, **マークつき**, **マークなし** であるという. マークつき k' とマークなし k を区別したくないときは $|k|$ と書くことにする.

λ に対する **marked tableau** T とは, λ の Young 図形の箱の中に次の性質をみたすように $\mathbb{P}$ の元を入れたものである.

T1 右へ下へ行くほど成分が弱い意味で増大する.

T2 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し, 各行にマークつき k' は高々 1 個で, また, 各列にマークなし k は高々 1 個である.

条件T2は任意の $k \geq 1$ に対して, k (resp. k') の入った箱の集合が horizontal (resp. vertical) strip であることを述べている.

例えば,

$$\begin{array}{cccccc} 1' & 1 & 1 & 2' & 3' & 3 \\ 1' & 2 & & & & \\ 3 & 3 & & & & \end{array}$$

は, partition $(6, 2, 2)$ に対する marked tableau である.

marked tableau T に対し, 単項式 $x^T = \prod_{i \geq 1} x_i^{m_i(T)}$ を対応させる. ここで $m_i(T)$ は T の成分の $|i|$ の個数である. 例えば, 上の例の marked tableau に対しては $x^T = x_1^4 x_2^2 x_3^4$ となる.

$S_\lambda(x; t)$ の定義と [Mac] の Chapter I, §5, Example 23 により,

$$(2.1) \quad S_\lambda(x; t) = \sum_T (-t)^{\text{mark}(T)} x^T$$

と書ける. ここで, 和は λ に対する marked tableaux 全体を走り, $\text{mark}(T)$ は T 中のマークつきの元の個数である. 特に $t = 0$ として,

$$s_\lambda(x) = S_\lambda(x; 0) = \sum_T x^T$$

を得る. ここで, 和は λ に対する unmarked tableaux, すなわち semi-standard tableaux 全体にわたる.

$\mathbb{P}$ -行列と tableaux の間の RSK 対応を説明しよう ([K], [Sa1], [HH] を見られたい). ここで, $\mathbb{P}$ -行列とは成分が $\mathbb{P} \cup \{0\}$ の元がある行列である. 各 $\mathbb{P}$ -行列 A に対して, 次のようにバイワード w_A を対応させる. 行を固定し, 左から右に行列の成分を読みとる. w_A においてペア $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ を $|a_{ij}|$ 回繰り返す. a_{ij} がマークつきならば, w_A に現れている最初のペア $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ の下の成分 j にマークをつける. 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1' & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2' \\ 1' & 1' & 0 \end{pmatrix} \mapsto w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1' & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3' & 3 & 1' & 2' \end{pmatrix}.$$

バイワード $w_A = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ に対し, 上のライン $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ は弱い意味での増加列である. また, $\beta_k = \beta_{k+1}$ ならば, $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ であるか, または α_k と α_{k+1} が等しくかつマークなしであるかのいずれかである.

では一般化された RSK アルゴリズムを述べる. S を marked tableau, α を $\mathbb{P}$ の元とする. α の S への挿入を次のように行う.

I1 $R := (S \text{ の第一行})$ とする.

I2 α がマークなしならば,

I2a α より大きい R の元の中で, 最小の元を β とし, β を α で置き換える. (この操作を BUMP という.)

I2b $\alpha := \beta$, $R :=$ 次の行.

I3 α がマークつきならば,

I3a α より大きいまたは等しい R の元の中で, 最小の元を β とし, それを α で置き換える. (この操作を EQBUMP という.)

I3b $\alpha := \beta$, $R :=$ 次の行.

I4 α がマークなしでかつ R のすべての元よりも大きいまたは等しいならば, もしくは α がマークつきでかつ R のすべての元よりも大きいならば, α を R の右端に置いて, 止める.

この結果を $I_\alpha(S)$ で表そう.

与えられたバイワード $w_A = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ に対し, marked tableau と semi-standard tableau のペアの列

$$(S_0, U_0) = (\emptyset, \emptyset), (S_1, U_1), \dots, (S_n, U_n) = (S, U)$$

を構成する. (S_{k-1}, U_{k-1}) が構成されたとき, (S_k, U_k) を次のように構成する. marked tableau S_k は $I_{\alpha_k}(S_{k-1})$ と定義し, semi-standard tableau U_k は U_{k-1} の, α が S_{k-1} に挿入されるときにできた新しい箱の場所に, β_k を入れてできた tableau とする.

例えば, バイワード $w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1' & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3' & 3 & 1' & 2' \end{pmatrix}$ に対応する tableau のペアは

$$S = \begin{array}{ccccccccc} 1' & 1 & 1 & 2' & 3' & 3 & & & & \\ 1' & 2 & & & & & & & & \\ 3 & 3 & & & & & & & & \end{array}, \quad U = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & & & & \\ 2 & 2 & & & & & & & & \\ 3 & 3 & & & & & & & & \end{array}$$

である. 一般化された RSK 対応は次のように述べられる.

定理 2. $\mathbb{P}$ -行列 $A = (a_{ij})$ と, $\sum_i |a_{ij}| = s_j$, $\sum_j |a_{ij}| = u_i$ を満たす同じ partition に対する marked tableau S と semi-standard tableau U のペア (S, U) は 1 対 1 対応している. ここで, 各 $k \geq 1$ に対して, $s_k = m_k(S)$ かつ $u_k = m_k(U)$ であり, また A のマークつきの成分の個数 $\text{mark}(A)$ と $\text{mark}(S)$ は等しい.

このとき, tableau S (resp. U) は type が $s = (s_1, s_2, \dots)$ (resp. $u = (u_1, u_2, \dots)$) であるという. この対応の重要な点はバイワード w_A の最長増加部分列の長さとの関係である. w_A の増加部分列とは w_A の下のラインの, 弱い意味での増加部分列で, 各自然数 k に対しマークつき k' が高々一個であるようなものをいう.

たとえば上のバイワードに対しては $(1' 1 1 2 3' 3)$ が w_A のそのような部分列である. $\ell(w_A)$ を w_A の最長増加部分列の長さとする, 次が成り立つ.

定理 3. $\mathbb{P}$ -行列 A が, partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ の tableaux のペアに対応するとき, $\ell(w_A) = \lambda_1$ が成り立つ.

注意 1. $\mathbb{P}$ -行列と shifted marked tableaux のペアとの対応を与える shifted RSK 対応によると, λ_1 はバイワード w_A の最長の **ascent pair** の長さを与える ([TW2], [HH]). 一般に, 上で述べた一般化された RSK アルゴリズムにより得られた partition と shifted RSK アルゴリズムにより得られた strict partition は異なるものである.

3 $\mathbb{P}$ -行列の上の t -Schur 測度

前の章で述べた事実を使って, t -Schur 測度に組合せ論からの解釈を与えよう. $x = (x_1, x_2, \dots)$ かつ $y = (y_1, y_2, \dots)$ とし, すべての i, j に対して $0 \leq x_i, y_j \leq 1$ かつ $t \leq 0$ と仮定する. $\mathbb{P}_{m,n}$ でサイズ $m \times n$ の $\mathbb{P}$ -行列全体の集合を表すものとする. $\mathbb{P}$ -行列 A に対して $\ell(w_A)$ を単に $\ell(A)$ と略す. A の要素 a_{ij} がパラメータ $x_i y_j$ に関する次のような分布で, 独立に分布しているものとする. すなわち, 各 $k \geq 1$ に対し,

$$P(a_{ij} = k) = \frac{1 - x_i y_j}{1 - t x_i y_j} (x_i y_j)^k \quad \text{かつ} \quad P(a_{ij} = k') = \frac{1 - x_i y_j}{1 - t x_i y_j} (-t) (x_i y_j)^k$$

とし, また

$$P(a_{ij} = 0) = \frac{1 - x_i y_j}{1 - t x_i y_j}$$

と定める. これは $\mathbb{P} \cup \{0\}$ 上の確率測度を定めている. 実際, $\sum_{k=0}^{\infty} P(|a_{ij}| = k) = 1$ で, かつ $t \leq 0$ よりすべての k について $P(a_{ij} = k') \geq 0$ である.

この定義によるとこの測度は $t = 0$ のとき $\mathbb{N}$ -行列の上の Schur 測度に一致し ([J1]), $t = -1$ のときは $\mathbb{P}$ -行列の上の shifted Schur 測度である ([TW2]).

$s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$, $0 \leq r \leq mn$ に対して,

$$\mathbb{P}_{m,n,s,u,r} := \{A \in \mathbb{P}_{m,n} \mid \sum_{1 \leq i \leq m} |a_{ij}| = s_j, \sum_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}| = u_i, \text{mark}(A) = r\}$$

と定める. そのとき $A \in \mathbb{P}_{m,n,s,u,r}$ に対して,

$$(3.1) \quad P(\{A\}) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \left(\frac{1 - x_i y_j}{1 - t x_i y_j} \right) (-t)^r x^s y^u = \frac{1}{Z_t} (-t)^r x^s y^u$$

となる.

$P_{m,n}$ を $i > m$ と $j > n$ に対して $x_i = y_j = 0$ とした測度とすると, (3.1) により

$$\begin{aligned} P_{m,n}(\ell \leq h) &= P(\{A \in \mathbb{P}_{m,n} \mid \ell(A) \leq h\}) \\ &= \sum_{s,u,r} P(\{A \in \mathbb{P}_{m,n,s,u,r} \mid \ell(A) \leq h\}) \\ &= \sum_{s,u,r} \#\{A \in \mathbb{P}_{m,n,s,u,r} \mid \ell(A) \leq h\} \frac{1}{Z_t} (-t)^r x^s y^u \end{aligned}$$

となり, さらに定理 2 と定理 3 から

$$= \sum_{s,u,r} \#\{(S, U) \mid \text{type } s \text{ and } u, \text{ mark}(S) = r, \lambda_1 \leq h\} \frac{1}{Z_t} (-t)^r x^s y^u,$$

また (2.1) から

$$= \frac{1}{Z_t} \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \lambda_1 \leq h}} S_\lambda(x_1, \dots, x_m; t) s_\lambda(y_1, \dots, y_n)$$

を得る. ここで集合 $\{(S, U) \mid \text{type } s \text{ and } u, \text{ mark}(S) = r, \lambda_1 \leq h\}$ は $\lambda_1 \leq h$ をみたすような λ の tableaux のペア (S, U) 全体からなる. ただし, S は type が s の marked tableau であり $\text{mark}(S) = r$ をみたし, u は type が u の semi-standard tableau である.

上の等式の最右辺は 1 章で定義された t -Schur 測度の, 集合 $\{\lambda \in \mathcal{P} \mid \lambda_1 \leq h\}$ における値である.

注意 2. 定理 1 は中心化かつ正規化された $\ell(w_A)$ の分布が w_A の最長 ascent pair の長さ $L(w_A)$ の分布 ([TW2]) と同等であることを述べている.

4 定理 1 の証明のスケッチ

我々は Tracy-Widom [TW2] の方法を用いて定理 1 を示す. Toeplitz 行列 $T(\phi) = (\phi_{i-j})_{i,j \geq 0}$ と Hankel 行列 $H(\phi) = (\phi_{i+j+1})_{i,j \geq 0}$ を思い出そう. ここで ϕ_n は関数 ϕ の z^n の Fourier 係数である. これらの無限次行列は Hilbert 空間 $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ ($\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$) に作用している. また $T_h(\phi) = (\phi_{i-j})_{0 \leq i,j \leq h-1}$, $\tilde{\phi}(z) := \phi(z^{-1})$ とおく. P_h を $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ から部分空間 $\ell^2(\{0, 1, \dots, h-1\})$ への射影作用素とし, $Q_h := I - P_h$ とする. ここで I は $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ 上の恒等作用素である.

次の二つの補題は証明の鍵になる.

補題 1 ([Ge]).

$$(4.1) \quad \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \lambda_1 \leq h}} S_\lambda(x; t) s_\lambda(y) = \det T_h(\tilde{E}_{x,t} E_y).$$

ここで, $E_{x,t}$ は (1.4) で定義された関数である.

補題 2 ([BO]). $\phi = \tilde{E}_{x,t} E_y$ とおくと,

$$(4.2) \quad \det T_h(\phi) = E(\phi) \det(I - H_1 H_2) \big|_{\ell^2(\{h, h+1, \dots\})}$$

である. ここで, $H_1 = H(\tilde{E}_{x,t} E_y^{-1})$, $H_2 = H(E_{x,t}^{-1} \tilde{E}_y)$ かつ $E(\phi) = \exp\{\sum_{k=1}^{\infty} k(\log \phi)_k (\log \phi)_{-k}\}$. (4.2) の右辺の行列式は, 任意のトレース作用素 K に対して定義される Fredholm 行列式

$$\det(I - K) \big|_{\ell^2(\{h, h+1, \dots\})} := \det(Q_h - Q_h K Q_h)$$

である.

$\phi = \tilde{E}_{x,t} E_y$ に対して, $E(\phi) = Z_t$ である.

J を i 番目の成分が $(-1)^i$ であるような対角行列とすると $\det(I - H_1 H_2) = \det(I - J H_1 H_2 J)$ である. 一般に任意の関数 $\phi(z)$ に対して, $-J H(\phi(z)) J = H(\phi(-z))$ である.

(1.6), (4.1), (4.2) より

$$P_t(\lambda_1 \leq h) = \det(Q_h - Q_h J H_1 H_2 J Q_h)$$

を得る.

ここで, α -specialization とスケーリングをする. $1 \leq i \leq m$ と $1 \leq j \leq n$ に対して, $x_i = y_j = \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) とおき, $i > m$ と $j > n$ に対しては $x_i = y_j = 0$ とする. $h = cn + n^{1/3}s$ とし, さらに $i = h + n^{1/3}x$, $j = h + n^{1/3}y$ とおく. 正の定数 c は適当に定められる.

そのとき $-Q_h J H_1 J$ や $-J H_2 J Q_h$ の (i, j) 成分は

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \psi(z) z^{-n^{1/3}s-i-j} \frac{dz}{z^2}, \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \psi(z)^{-1} z^{n^{1/3}s+i+j} dz$$

と書かれる. ここで積分路は共に単位円であり, また

$$\psi(z) = \left(\frac{z - \alpha}{z - t\alpha} \right)^m \left(\frac{1}{1 - \alpha z} \right)^n z^{-cn}$$

と置いた. これらの積分を steepest descent method を用いて評価することで, Airy 関数を得る. くわしくは [M] を見られたい.

5 補足

置換 $\pi \in \mathfrak{S}_N$ の増加部分列の代わりに ascent pair を扱い, (1.1) の類似の問題を考える. ただし, π の ascent pair とは π の減少部分列 $\phi^{\text{de}} = (\pi(i_1) > \dots > \pi(i_k))$ と増加部分列 $\phi^{\text{in}} = (\pi(j_1) < \dots < \pi(j_l))$ のペア $(\phi^{\text{de}}, \phi^{\text{in}})$ で, $(\pi(i_k), \dots, \pi(i_1), \pi(j_1), \dots, \pi(j_l))$ が弱い意味で増加列になっているものをいう. すなわち $\pi(i_1) \leq \pi(j_1)$ を満たすことである. この ascent pair の長さを $k + l - 1$ と定め, π の最長 ascent pair の長さを $L(\pi)$ で表す. 最長増加部分列の長さ $\ell(\pi)$ が RSK 対応で得られるように, $L(\pi)$ は shifted RSK 対応により得られる. さてこの $L(\pi)$ に対して, (1.1) のような結果が得られないだろうか. 時間が許せば, その研究についても話したい.

References

- [BDJ] J. Baik, P. A. Deift and K. Johansson, On the distribution of the length of the longest increasing subsequence in a random permutation, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), 1119–1178.
- [BW] E. Basor and H. Widom, On a Toeplitz determinant identity of Borodin and Okounkov, *Int. Eqns. Oper. Th.* **37** (2000), 397–401.
- [BO] A. Borodin and A. Okounkov, A Fredholm determinant formula for Toeplitz determinants, *Int. Eqns. Oper. Th.* **37** (2000), 386–396.
- [BOO] A. Borodin, A. Okounkov and G. Olshanski, On asymptotics of the Plancherel measures for symmetric group, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), 481–515.
- [Ge] I. M. Gessel, Symmetric functions and P -recursiveness, *J. Comb. Theory, Ser. A*, **53** (1990), 257–285.
- [HH] P. N. Hoffman and J. F. Humphreys, *Projective Representations of the Symmetric Groups: Q -Functions and Shifted Tableaux*, Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [J1] K. Johansson, Shape fluctuations and random matrices, *Commun. Math. Phys.* **209** (2000), 437–476.
- [J2] K. Johansson, Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure, *Ann. of Math. (2)* **153** (2001), 259–296.
- [J3] K. Johansson, *Random growth and random matrices*, *Progr. Math.*, 201 Birkhäuser, Basel, 2001.
- [J4] K. Johansson, Toeplitz determinants, random growth and determinantal process, *Proceeding of the international congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002)*, 53–62.
- [K] D. E. Knuth, Permutations, matrices and generalized Young tableaux, *Pacific J. Math.* **34** (1970), 709–727.
- [Mac] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, second Edition, Oxford, 1995.
- [M] S. Matsumoto, A scaling limit for t -Schur measures, preprint, [math.PR/0309037](https://arxiv.org/abs/math.PR/0309037).
- [Ok1] A. Okounkov, Random matrices and random permutations, *Internat. Math. Res. Notices* (2000), 1043–1095.

- [Ok2] A. Okounkov, Infinite wedge and random partitions, *Selecta Math. (N.S.)* **7** (2001), 57–81.
- [Sa1] B. E. Sagan, Shifted tableaux, Schur Q -functions, and a conjecture of Stanley, *J. Comb. Theory, A* **45** (1987), 62–103.
- [Sa2] B. E. Sagan, *The symmetric group: Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, Wadsworth & Brooks / Cole, Pacific Grove, Calif., 1991.
- [TW1] C. A. Tracy and H. Widom, Level-spacing distributions and the Airy kernel, *Commun. Math. Phys.* **159** (1994), 151–174.
- [TW2] C. A. Tracy and H. Widom, A limit theorem for shifted Schur measures, preprint, math.PR/0210255.