

E_8 型アフィン Weyl 群対称性をもつ離散 Painlevé 方程式

野海 正俊 (神戸大学・自然科学)

この講演では, 楕円 (差分) Painlevé 方程式とその超幾何型特殊解についての最近の共同研究

[KMNOY] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada:

${}_{10}E_9$ solution to the elliptic Painlevé equation, J. Phys. A: Math. Gen.

36 (2003), L263-L272

の内容を紹介する.

「楕円 Painlevé 方程式」は, E_8 型のアフィン Weyl 群対称性をもつ 2 階非線形の差分方程式であって, いわゆる離散 Painlevé 方程式 (2 階の非線形差分方程式で「特異点閉込め」の性質をもつものの総称) の最上位に位置すると考えられている対象である. この楕円 Painlevé 方程式には従来, 坂井 (2001) による幾何学的定式化と, 太田-Ramani-Grammaticos (2001) によるルート格子上的 τ 関数による定式化の 2 つアプローチがあった. どちらにも長所と短所があるが, いずれの方法でも 2 階の非線形楕円差分方程式を具体的に書下すのは困難であり, 両者の同等性すら明らかでない状況であった. それに対して, 坂井による幾何学的定義を点配置空間の言葉で再定式化し, その枠組みで然るべく τ 関数を導入すると, 両方のアプローチの同等性が明らかとなり, 同時に楕円差分方程式の明示的な記述や, 鏡映面上の超幾何型特殊解の分析が可能となる — というのが, 本講演の内容である.

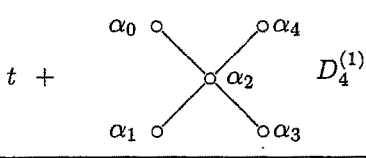
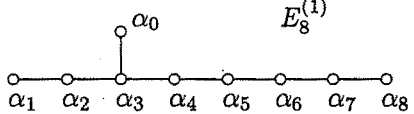
楕円 Painlevé 方程式は, 次のような幾何学的方法で構成される (坂井 2001). 射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の一般の位置にある 9 点の配置に対しその中の 3 点を中心とする標準 Cremona 変換を考えると, 9 点の置換と Cremona 変換から生成される双有理変換群が, E_8 型アフィン Weyl 群の幾何学的実現を与えることはよく知られている. そのアフィン Weyl 群を格子とその上に作用する有限 Weyl 群の半直積に分解すると, 格子部分から $\mathbb{P}^2$ の双有理変換の可換な族が得られる. それを離散力学系と見たものが $E_8^{(1)}$ 型の楕円 Painlevé 方程式である. 一般の 9 点配置に対しては, それらを通る平面 3 曲線 (楕円曲線) が決まる. そこで 9 点配置を楕円曲線上の点の座標でパラメータ付け, $\mathbb{P}^2$ の点の時間発展を非同次座標で表すと, 係数に楕円関数を含む有理変換が得られる. これが, 「楕円 Painlevé 方程式」という名称を付す理由である.

講演では, $\mathbb{P}^2$ の同次座標に対応する 3 個の従属変数 f_1, f_2, f_3 と点配置の 9 点に対応する τ 関数 $\tau_1, \dots, \tau_9$ を導入して, 楕円 Painlevé 方程式をこれらの変数へのアフィン Weyl 群の作用によって記述する方法を紹介する. それを用いると, 楕円 Painlevé 方程式が E_8 格子上的 τ 関数族に対する広田・三輪型の双線形

方程式系 (太田-Ramani-Grammaticos 2001) と等価であることが分かる。また、楕円差分方程式を明示的に書下し、その方程式から鏡映面上の Riccati 方程式を導くと、それが 2 階の線形差分方程式「楕円超幾何方程式」に線形化される。これによって、楕円 Painlevé 方程式が、(有限項の) 楕円超幾何級数 ${}_{10}E_9$ で表される特殊解をもつことが分かる。

楕円 (差分) Painlevé 方程式

離散 Painlevé 方程式 (2 階) の階層の最上位に位置していて、 $E_8^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群対称性をもつ

	非線形	線形
微分方程式	Painlevé 第 VI 方程式 (1 + 4 パラメータ) $t +$  $D_4^{(1)}$	Gauss の超幾何方程式 (1 + 3 パラメータ) ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right)$
差分方程式	楕円 Painlevé 方程式 (8 パラメータ)  $E_8^{(1)}$	楕円超幾何方程式 (7 パラメータ) ${}_{10}E_9(u_0; u_1, \dots, u_7)$ $(2\delta + 3u_0 = u_1 + \dots + u_7)$

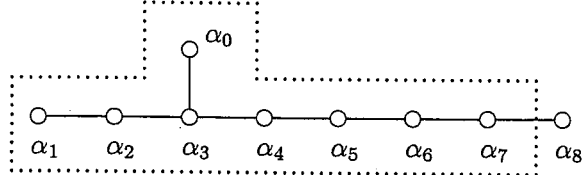
楕円 Painlevé 方程式への 2 つのアプローチ

- Sakai (CMP 2001):
 $\mathbb{P}^2$ を一般の位置にある 9 点で blowup して得られる有理曲面上で
 Cremona 変換によって定義される離散力学系
- Ohta-Ramani-Grammaticos (J.Phys. A 2001):
 E_8 格子の τ 関数に対する双線形方程式系

§1. 楕円 Painlevé 方程式: $W(E_8^{(1)})$ に由来する離散系

パラメータ空間とアフィン Weyl 群

- パラメータ空間: $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^{10} \ni \varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_9)$.



- $E_8^{(1)}$ 型アフィン・ルート系: (単純ルートと零ルート)

$$\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}\varepsilon_0 \oplus \mathbb{C}\varepsilon_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\varepsilon_9, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle \varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle = -1, \quad \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = 1 \quad (i = 1, \dots, 9)$$

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0 \quad (i, j = 0, 1, \dots, 9; i \neq j)$$

$$\alpha_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \quad (i = 1, \dots, 8)$$

$$\delta = 3\varepsilon_0 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8 + \varepsilon_9)$$

- アフィン Weyl 群

$$W = W(E_8^{(1)}) = \langle s_0, s_1, \dots, s_8 \rangle \simeq Q(E_8) \rtimes W(E_8)$$

$$s_j^2 = 1 \quad \begin{array}{ll} s_i s_j = s_j s_i & i \circ \circ j \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & i \circ \text{---} j \end{array}$$

- $W \curvearrowright \mathfrak{h}^*$

$$s_0(\varepsilon_0) = 2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \quad \text{For } k = 1, 2, \dots, 8,$$

$$s_0(\varepsilon_1) = \varepsilon_0 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \quad s_k(\varepsilon_0) = \varepsilon_0$$

$$s_0(\varepsilon_2) = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad s_k(\varepsilon_j) = \varepsilon_{(k,k+1)j}$$

$$s_0(\varepsilon_3) = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (j = 1, 2, \dots, 9)$$

$$s_0(\varepsilon_j) = \varepsilon_j \quad (j = 4, 5, \dots, 9)$$

- シフトの作用素 T_{α_i} ($i = 0, 1, \dots, 8$)

$$T_{\alpha_i}(\lambda) = \lambda + \langle \delta, \lambda \rangle \alpha_i - \langle \alpha_i + \delta, \lambda \rangle \delta \quad (\lambda \in \mathfrak{h}^*)$$

Riemann 関係式を満たす函数

- 記号: Weierstrass の σ 函数または Jacobi の θ 函数

$$[x] = \sigma(x; \omega_1, \omega_2) \text{ or } \vartheta_{11}(x; \tau)$$

$$(1) \quad [x] : \mathbb{C} \text{ 上定義された正則函数で, 奇函数} \quad [-x] = -[x]$$

$$(2) \quad \text{Riemann 関係式}$$

$$[x+y][x-y][u+v][u-v]$$

$$= [x+u][x-u][y+v][y-v] - [x+v][x-v][y+u][y-u]$$

- 実ルート

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j, \quad \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_0 - \varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k$$

$$\Delta^{\text{Re}} = \{\pm \varepsilon_{ij} + n\delta, \pm \varepsilon_{ijk} + n\delta \quad (n \in \mathbb{Z})\}$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}([\alpha]; \alpha \in \Delta^{\text{Re}})$$

楕円差分方程式

$\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_9)$: 独立変数

$z = (z_1, z_2)$: 未知函数 $z_i = z_i(\varepsilon)$ ($i = 1, 2$)

$$T_{\alpha_k}(z_1) = R_{k,1}(\varepsilon; z_1, z_2), \quad T_{\alpha_k}(z_2) = R_{k,2}(\varepsilon; z_1, z_2) \quad (i = 0, 1, \dots, 8)$$

T_{α_7} に関する楕円差分方程式

- 非同次形 : $z_1 = c_1 f_1 / f_3, z_2 = c_2 f_2 / f_3$ に対する 2 階の方程式

$\Rightarrow$ 同次形 : f_1, f_2, f_3 に対する 3 階の方程式

- $f = (f_1, f_2, f_3)$: 未知函数 (従属変数) $f_i = f_i(\varepsilon)$ ($i = 1, 2, 3$)

$$T_{\alpha_7}(f_1) = \frac{G_1(f)}{F_1(f)}, \quad T_{\alpha_7}(f_2) = \frac{G_2(f)}{F_2(f)}, \quad T_{\alpha_7}(f_3) = \frac{G_3(f)}{F_3(f)}$$

$$G_i, F_i \in \mathbb{K}[f_1, f_2, f_3]; \quad \deg G_i = 4, \quad \deg F_i = 3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

明示的な記述 $(\bar{\varphi} = T_{\alpha_7}(\varphi), \quad \varphi = T_{\alpha_7}^{-1}(\bar{\varphi}))$

- f_1, f_2, f_3 : 未知函数 $f_i = f_i(\varepsilon)$ ($i = 1, 2, 3$)

$$f = (f_1, f_2, f_3) \rightarrow g = (g_1, g_2, g_3) \rightarrow \bar{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$$

$$g_1 = \frac{Q_1(f)}{P_1(f)}, \quad g_2 = \frac{Q_2(f)}{P_2(f)}, \quad g_3 = \frac{Q_3(f)}{P_3(f)}$$

$$\bar{f}_1 = \frac{S_1(g)}{R_1(g)}, \quad \bar{f}_2 = \frac{S_2(g)}{R_2(g)}, \quad \bar{f}_3 = \frac{S_3(g)}{R_3(g)}$$

P_i, Q_i, R_i, S_i は次の同次多項式

$$Q_i = -\frac{[\varepsilon_{23j}][\varepsilon_{237}][\varepsilon_{1j7}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{13}][\varepsilon_{123}]} f_2 f_3 + \frac{[\varepsilon_{13j}][\varepsilon_{137}][\varepsilon_{2j7}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]} f_1 f_3 - \frac{[\varepsilon_{12j}][\varepsilon_{127}][\varepsilon_{3j7}]}{[\varepsilon_{13}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]} f_1 f_2$$

$$P_i = \frac{[\varepsilon_{1j}][\varepsilon_{17}][\varepsilon_{1j7}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{13}][\varepsilon_{123}]} f_1 - \frac{[\varepsilon_{2j}][\varepsilon_{27}][\varepsilon_{2j7}]}{[\varepsilon_{12}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]} f_2 + \frac{[\varepsilon_{3j}][\varepsilon_{37}][\varepsilon_{3j7}]}{[\varepsilon_{13}][\varepsilon_{23}][\varepsilon_{123}]} f_3$$

$$(i = 1, 2, 3; j = 7 - i = 6, 5, 4)$$

$$S_i = -\frac{[\varepsilon_{ab6}][\varepsilon_{458}][\varepsilon_{i68}]}{[\varepsilon_{46}][\varepsilon_{56}][\varepsilon_{123}]} g_2 g_3 + \frac{[\varepsilon_{ab5}][\varepsilon_{468}][\varepsilon_{i58}]}{[\varepsilon_{45}][\varepsilon_{56}][\varepsilon_{123}]} g_1 g_3 - \frac{[\varepsilon_{ab4}][\varepsilon_{568}][\varepsilon_{i48}]}{[\varepsilon_{45}][\varepsilon_{46}][\varepsilon_{123}]} g_1 g_2$$

$$R_i = -\frac{[\varepsilon_{i6}][\varepsilon_{679}][\varepsilon_{i68}]}{[\varepsilon_{46}][\varepsilon_{56}][\varepsilon_{123}]} g_1 + \frac{[\varepsilon_{i5}][\varepsilon_{579}][\varepsilon_{i58}]}{[\varepsilon_{45}][\varepsilon_{56}][\varepsilon_{123}]} g_2 - \frac{[\varepsilon_{i4}][\varepsilon_{479}][\varepsilon_{i48}]}{[\varepsilon_{45}][\varepsilon_{46}][\varepsilon_{123}]} g_3$$

$$(i = 1, 2, 3; (a, b) = (2, 3), (1, 3), (1, 2))$$

標準的な楕円函数解

楕円 Painlevé 方程式は、次のような特殊解をもつ (u はパラメータ):

$$f_1 = \frac{[\varepsilon_0 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - u]}{[\varepsilon_1 - u]}, \quad f_2 = \frac{[\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - u]}{[\varepsilon_2 - u]}, \quad f_3 = \frac{[\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - u]}{[\varepsilon_3 - u]}$$

この解は、 $\mathbb{P}^2$ 内の一つの楕円曲線 (平面 3 次曲線) のパラメータ付けを与える。

§2. 楕円超幾何方程式: $W(E_7^{(1)})$ 対称性をもつ 2 階線形差分方程式

$\alpha_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = 0$ のとき、楕円 Painlevé 方程式を $f_3 \rightarrow \infty$ として「特殊化」することができる。その結果、 f_1, f_2 に対する方程式として「線形化済みの」Riccati 方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= af_1 + bf_2 \\ \bar{f}_2 &= cf_1 + df_2 \end{aligned} \quad \left(\bar{\varphi} = \frac{a\varphi + b}{c\varphi + d}, \quad \varphi = \frac{f_1}{f_2} = \frac{c_1 z_1}{c_2 z_2} \right)$$

$(a, b, c, d \in \mathbb{K})$

これを f_1 のみの方程式に書直せば、2 階の線形差分方程式を得る:

$$(*) \quad A\bar{f}_1 + Bf_1 + Cf_1 = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{K})$$

$\Rightarrow$ 「楕円差分超幾何方程式」

表示を見やすくするために、適当な $w \in W(E_8^{(1)})$ による変換 $\Psi = w(f_1)$ を施して、鏡映面 $\alpha_8 = \varepsilon_8 - \varepsilon_9 = 0$ に沿う T_{α_6} に関する超幾何方程式に書直す。

更に、ゲージ変換 $\Psi = G\Phi$ (但し、 G は楕円ガンマ函数の幾つかの積) を行くと、 Φ に対する 2 階の線形差分方程式は次のようになる:

$$\begin{aligned} & \frac{[\varepsilon_{79}][\varepsilon_{799}][\varepsilon_{799} - \delta] \prod_{i=1}^5 [\varepsilon_{i69}]}{[\varepsilon_{76}][\varepsilon_{76} + \delta]} (\bar{\Phi} - \Phi) \\ & + \frac{[\varepsilon_{69}][\varepsilon_{699}][\varepsilon_{699} - \delta] \prod_{i=1}^5 [\varepsilon_{i79}]}{[\varepsilon_{67}][\varepsilon_{67} + \delta]} (\Phi - \Phi) \\ & = -[\varepsilon_{679}] \prod_{i=1}^5 [\varepsilon_{i9}] \Phi \end{aligned}$$

新しい変数

$$u_0 = \varepsilon_0 - 3\varepsilon_9 - \delta, \quad u_i = \varepsilon_i - \varepsilon_9 \quad (i = 1, 2, \dots, 7),$$

を導入して、この変数 $(u_0, u_1, \dots, u_7)$ で書くと次のようになる。

楕円差分超幾何方程式

$$\Phi = \Phi(u_0; u_1, \dots, u_7)$$

$2\delta + 3u_0 = u_1 + \dots + u_7$: パラメータの平衡条件 (balancing condition)

$$\begin{aligned} & \frac{[u_7][u_0 - u_7][\delta + u_0 - u_7] \prod_{i=1}^5 [\delta + u_0 - u_i - u_6]}{[u_7 - u_6][u_7 - u_6 + \delta]} (T_{u_6}^{-1} T_{u_7} - 1) \Phi(u) \\ & + \frac{[u_6][u_0 - u_6][\delta + u_0 - u_6] \prod_{i=1}^5 [\delta + u_0 - u_i - u_7]}{[u_6 - u_7][u_6 - u_7 + \delta]} (T_{u_6} T_{u_7}^{-1} - 1) \Phi(u) \\ & = [u_6 + u_7 - u_0 - \delta] \prod_{i=1}^5 [u_i] \Phi(u) \end{aligned}$$

- $u_1, \dots, u_7$ のいずれかが $u_i = -N\delta$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) となる場合には, この方程式は, 次のような ${}_{10}E_9$ (or ${}_{12}V_{11}$) 型の超幾何級数解をもつ:

$$\Phi(u_0; u_1, \dots, u_7) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[u_0 + 2k\delta]}{[u_0]} \frac{[u_0]_k}{[\delta]_k} \prod_{i=1}^7 \frac{[u_i]_k}{[\delta + u_0 - u_i]_k}$$

$$[x]_k = [x][x + \delta] \cdots [x + (k-1)\delta] \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

⇒ いわゆる “very well-poised ${}_{10}\phi_9$ series” の楕円の拡張

(1) Frenkel-Turaev (1997): *Elliptic 6-j symbols*

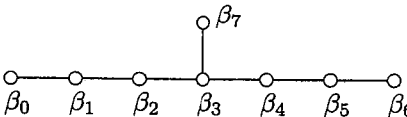
(2) Spiridonov-Zhedanov (2000~):

Biorthogonal rational functions on elliptic grids

(3) BC_1 型の Ruijsenaars 系の 6 パラメータ族

- $W(E_7^{(1)})$ 対称性:

$u = (u_0, u_1, \dots, u_7) \cdots \mathfrak{h}(E_7^{(1)})$ の座標系と見なす



$$\beta_0 = \delta + u_0 - u_1, \quad \beta_7 = \delta + u_0 - u_1 - u_2 - u_3$$

$$\beta_i = u_i - u_{i+1} \quad (i = 1, \dots, 6)$$

§3. 点配置空間と Cremona 変換

配置空間 $X_{3,n}$ ($n > 3$)

$\mathbb{P}^2$ 内の n 個の点の組 $(p_1, \dots, p_n)$ について, どの 3 個 $p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}$ ($1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n$) も同一直線上にはないとき, $(p_1, \dots, p_n)$ は「一般の位置にある」という.

$X_{3,n}$: $\mathbb{P}^2$ 内の一般の位置にある n 点の配置空間

$$X_{3,n} = PGL(3) \backslash \{ (p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{P}^2)^n \text{ で, 一般の位置にあるもの} \}$$

$$= GL(3) \backslash Mat^*(3, n) / T \quad (T = (\mathbb{C}^*)^n)$$

ここで $Mat^*(3, n)$ は, $m \times n$ 複素行列 X で, 3×3 小行列式がすべて 0 でないものの全体を表す. そのような行列

$$X = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3n} \end{pmatrix}$$

が与えられたとき, 第 j 列を p_j の同次座標と見なすことにより

$$[p_1, \dots, p_n] = PGL(3)(p_1, \dots, p_n) \quad \text{と} \quad [X] = GL(3)XT$$

の 2 種類の表示は同値な点配置を表すものとして同一視する.

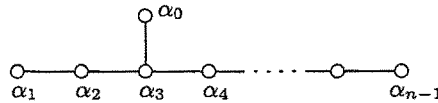
- $X_{3,n}$ はアフィン代数多様体で, $\mathbb{C}^{2(n-4)}$ 内の Zariski 開集合 $\mathcal{U}_{3,n}$ と同型である: ここで $\mathcal{U}_{3,n}$ は, 次の形の $U \in \text{Mat}(3, n)^*$ の全体:

$$U = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & \dots & p_n \\ 1 & 0 & 0 & 1 & u_{15} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & u_{25} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

- 上記の同型 $\mathcal{U}_{3,n} \xrightarrow{\sim} X_{3,n}$ を通じて, 有理函数体 $\mathcal{K}(X_{3,n})$ は $2(n-4)$ 個の変数 $u = (u_{ij})_{ij}$ の有理函数体 $\mathbb{C}(u)$ と同一視できる.

配置空間 $X_{3,n}$ への Weyl 群の双有理作用

$$W_{3,n} = \langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle \quad \begin{array}{l} s_i^2 = 1 \\ s_i s_j = s_j s_i \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_i \end{array} \quad \begin{array}{cc} \alpha_i & \alpha_j \\ \circ & \circ \\ \circ & - \circ \end{array}$$



この Weyl 群が, $(p_1, \dots, p_n)$ の中の 3 点を中心とする「標準 Cremona 変換」によって, $X_{3,n}$ の双有理変換群として実現される.

- $X_{3,n} \curvearrowright W_{3,n}$ (双有理的な右作用)

$\langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle = \mathfrak{S}_n$: n 点の置換

$$[p_1, \dots, p_n] \cdot s_k = [p_1, \dots, p_{k+1}, p_k, \dots, p_n] \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

s_0 : $\{p_1, p_2, p_3\}$ を中心とする「標準 Cremona 変換」

$$[p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n] \cdot s_0 = [p_1, p_2, p_3, \tilde{p}_4, \dots, \tilde{p}_n]$$

ここで Cremona 変換 $p \rightarrow \tilde{p}$ は次のように定める. $\mathbb{P}^2$ の同次座標系 $x = (x_1, x_2, x_3)$ を最初の 3 点が 3 個の座標原点となるようにとる.

$$p_1 = (1:0:0), \quad p_2 = (0:1:0), \quad p_3 = (0:0:1).$$

この座標系を用いて, 一般の点 p に対して

$$p = (x_1 : x_2 : x_3) \rightarrow \tilde{p} = (x_1^{-1} : x_2^{-1} : x_3^{-1})$$

と定める.

Cremona 変換: blow up and blow down

- $X_{3,n} \curvearrowright W_{3,n} \implies W_{3,n} \curvearrowright \mathcal{K}(X_{3,n})$: $W_{3,n} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{K}(X_{3,n}))$
 $w(\varphi)([p_1, \dots, p_n]) = \varphi([p_1, \dots, p_n] \cdot w) \quad (\varphi \in \mathcal{K}(X_{3,n}), w \in W_{3,n})$

$X_{3,n}$ の座標系 $u = (u_{ij})$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & u_{15} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & u_{25} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて表すと, 各 $w \in W_{3,n}$ に対して体の自己同型 $w : \mathbb{C}(u) \rightarrow \mathbb{C}(u)$ が得られる:

$$(*) \quad w(u_{ij}) = S_{w,ij}(u) \in \mathbb{C}(u) \quad (i = 1, 2; j = 5, 6, \dots, n).$$

• 配置空間 $X_{3,n+1}$ において $W_{3,n} \subset W_{3,n+1}$ の作用を考える.

$$\begin{array}{c} [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ \dots \ p_n \ q] \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & u_{15} & \dots & u_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & u_{25} & \dots & u_{2n} & z_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$q = p_{n+1}$ を $\mathbb{P}^2$ の一般の点と見なすと, 各 $w \in W_{3,n}$ に対して, $\mathbb{P}^2$ 上の「パラメータ $u = (u_{ij})$ に依存する相対的な」双有理的な作用が得られる.

$$(**) \quad w(z_1) = R_{w,1}(u; z), \quad w(z_2) = R_{w,2}(u; z).$$

9 点配置の場合 ($n = 9$)

(1) $W_{3,9}$ はアフィン Weyl 群:

$$W_{3,9} = W(E_8^{(1)}) \simeq Q(E_8) \rtimes W(E_8)$$

(2) 一般的な配置 $[p_1, p_2, \dots, p_9] \in X_{3,9}$ に対しては, その $p_1, \dots, p_9$ を通る 3 次曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ が唯一つ存在する.

9 点を通る 3 次曲線 と 一般の点 $q = p_{10}$

(3) その楕円曲線 C と点配置 $[p_1, \dots, p_9]$ を次のようにパラメータ付ける.

$$p(t) = \left(\frac{[\alpha_0 + \varepsilon_1 - t]}{[\varepsilon_1 - t]} : \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_2 - t]}{[\varepsilon_2 - t]} : \frac{[\alpha_0 + \varepsilon_3 - t]}{[\varepsilon_3 - t]} \right) \in \mathbb{P}^2$$

$$[p_1, \dots, p_9] = [p(\varepsilon_1), \dots, p(\varepsilon_9)]$$

こうすると, u_{ij} に対する「方程式」(*) を楕円函数を用いて「解く」ことができる. 実際 (*) の一般解は, 次のように与えられる.

$$u_{1j}(\varepsilon) = \frac{[\varepsilon_{14}][\varepsilon_{3j}][\varepsilon_{124}][\varepsilon_{23j}]}{[\varepsilon_{34}][\varepsilon_{1j}][\varepsilon_{234}][\varepsilon_{12j}]}, \quad u_{2j}(\varepsilon) = \frac{[\varepsilon_{24}][\varepsilon_{3j}][\varepsilon_{124}][\varepsilon_{13j}]}{[\varepsilon_{34}][\varepsilon_{2j}][\varepsilon_{134}][\varepsilon_{12j}]}$$

$$(j = 5, 6, 7, 8, 9)$$

⇒ 楕円 Painlevé 系:

$$w(z_1) = R_{w,1}(\varepsilon; z), \quad w(z_2) = R_{w,2}(\varepsilon; z) \quad (w \in W_{3,9}),$$

$$T_{\alpha_k}(z_1) = R_{\alpha_k,1}(\varepsilon; z), \quad T_{\alpha_k}(z_2) = R_{\alpha_k,2}(\varepsilon; z) \quad (k = 0, 1, \dots, 8).$$

問題: どうすれば, 有理函数 $R_{w,i}(\varepsilon; z)$, $R_{\alpha_k,i}(\varepsilon; z)$ を決定できるか?

§4. τ 関数と ϕ 因子

従属変数

$\tau_1, \dots, \tau_9$... 9 点 $p_1, \dots, p_9$ のそれぞれに対応する τ 関数
 f_1, f_2, f_3 ... $\mathbb{P}^2$ の同次座標系に対応する従属変数.

を導入して, 次の代数 $\mathcal{R}$ を考える.

$$\begin{aligned} S &= \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} S_d, & S_d &= f_3^d \mathbb{K}(f_1/f_3, f_2/f_3), \\ \mathcal{R} &= S[\tau_1^{\pm 1}, \dots, \tau_9^{\pm 1}] & \mathbb{K} &= \mathbb{C}([\alpha]; \alpha \in \Delta^{\text{Re}}) \end{aligned}$$

そこで,

$$z_1 = \frac{[\varepsilon_{14}][\varepsilon_{124}]}{[\varepsilon_{34}][\varepsilon_{234}]} \frac{f_1}{f_3}, \quad z_2 = \frac{[\varepsilon_{24}][\varepsilon_{124}]}{[\varepsilon_{34}][\varepsilon_{134}]} \frac{f_2}{f_3} \in S_0$$

において, 部分環 $S_0 = \mathbb{K}(f_1/f_3, f_2/f_3) \subset \mathcal{R}$ を $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ の函数体 $\mathbb{K}(z_1, z_2)$ と同一視する. この同一視のもとで, Weyl 群 $W_{3,9}$ は S_0 に自己同型群として作用し, その作用が楕円曲線 C 上の点 $q \in \mathbb{P}^2$ への Cremona 変換の作用を記述する.

定理. Weyl 群 $W_{3,9}$ の $S_0 = \mathbb{K}(z_1, z_2)$ への作用は, 次のように, $W_{3,9}$ の代数 $\mathcal{R}$ への作用 (代数の自己同型群としての作用) に拡張される.

$$\begin{aligned} s_0(\tau_i) &= f_i \tau_i \quad (i = 1, 2, 3), & s_0(\tau_j) &= \tau_j \quad (j = 4, 5, \dots, 9), \\ s_k(\tau_j) &= \tau_{(k,k+1)j} & (k &= 1, \dots, 8; j = 1, \dots, 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0(f_i) &= \frac{1}{f_i} & (i &= 1, 2, 3), \\ s_k(f_i) &= f_{(k,k+1)i} & (k &= 1, 2; i = 1, 2, 3), \\ s_3(f_1) &= \frac{\tau_3}{\tau_4} \left(\frac{[\varepsilon_{14}][\varepsilon_{124}]}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{13}]} f_1 - \frac{[\varepsilon_{34}][\varepsilon_{234}]}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{13}]} f_3 \right), \\ s_3(f_2) &= \frac{\tau_3}{\tau_4} \left(\frac{[\varepsilon_{24}][\varepsilon_{124}]}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{23}]} f_2 - \frac{[\varepsilon_{34}][\varepsilon_{134}]}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{23}]} f_3 \right), \\ s_3(f_3) &= \frac{\tau_3}{\tau_4} f_3, \\ s_k(f_i) &= f_i & (k &= 4, 5, \dots, 8; i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

格子上の τ 関数

- $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^{10}$ 内の格子 (Picard 格子)

$$L = \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_9 \subset \mathfrak{h}.$$

に対し Lorentz 内積 $\langle, \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$ を定義し, 座標函数 $\varepsilon_j \in \mathfrak{h}^*$ のそれぞれを e_j との内積として実現する: $\varepsilon_j = \langle e_j, \cdot \rangle$ ($j = 0, 1, \dots, 9$).

$$\langle e_0, e_0 \rangle = -1, \quad \langle e_j, e_j \rangle = 1 \quad (j = 1, \dots, 9), \quad \langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad (i \neq j).$$

L 内の $W_{3,9}$ 軌道

$$\begin{aligned} M &= W_{3,9}\{e_1, \dots, e_9\} = W_{3,9}e_9 \subset L \\ &= \{\Lambda \in L; \langle \Lambda, \Lambda \rangle = 1, \langle c, \Lambda \rangle = -1\} \quad \delta = \langle c, \cdot \rangle \end{aligned}$$

について

定理. $\mathcal{R}$ の元の族 $\tau(\Lambda) \in \mathcal{R}$ ($\Lambda \in M$) で、次の条件を満たすものが唯一つ存在する:

$$\begin{aligned}\tau(e_j) &= \tau_j & (j = 1, \dots, 9), \\ w(\tau(\Lambda)) &= \tau(w.\Lambda) & (w \in W_{3,9}; \Lambda \in M).\end{aligned}$$

M 上の τ 函数の双線形方程式

上記のように定めた τ 函数の族 $\tau(\Lambda) \in \mathcal{R}$ ($\Lambda \in M$) は、相異なる添字 $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, 9\}$ の任意の 4 つ組に対して次のような広田・三輪型の双線形方程式を満たす:

$$\begin{aligned}& [\varepsilon_{jk}][\varepsilon_{kll}] \tau(e_i) \tau(e_0 - e_i - e_l) \\& + [\varepsilon_{ki}][\varepsilon_{kll}] \tau(e_j) \tau(e_0 - e_j - e_l) \\& + [\varepsilon_{ij}][\varepsilon_{ijl}] \tau(e_k) \tau(e_0 - e_k - e_l) = 0.\end{aligned}$$

しかも、代数 $\mathcal{R}$ への $W_{3,9}$ の作用から得られる τ 函数族は、この条件で特徴付けられる。

⇒ Ohta-Ramani-Grammaticos (2001) の双線形方程式系

$$\begin{aligned}& [\beta - \gamma][\lambda - \beta - \gamma] \tau(a) \tau(\Lambda - a) \\& + [\gamma - \alpha][\lambda - \gamma - \alpha] \tau(b) \tau(\Lambda - b) \\& + [\alpha - \beta][\lambda - \alpha - \beta] \tau(c) \tau(\Lambda - c) = 0\end{aligned}$$

広田・三輪型の双線形方程式

ϕ 因子

- $\mathbb{P}^2$ の同次座標系 $x = (x_1, x_2, x_3)$ を

$$x_1 = \frac{[\varepsilon_{14}]\tau_1\tau_2\tau_3}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{234}]} f_1, \quad x_2 = \frac{[\varepsilon_{24}]\tau_1\tau_2\tau_3}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{134}]} f_2, \quad x_3 = \frac{[\varepsilon_{34}]\tau_1\tau_2\tau_3}{[\varepsilon_{123}][\varepsilon_{124}]} f_3$$

で定めると,

$$z_1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad z_2 = \frac{x_2}{x_3}.$$

このとき, 任意の

$$\Lambda = de_0 - \nu_1 e_1 - \dots - \nu_9 e_9 \in M \quad (d, \nu_1, \dots, \nu_9 \in \mathbb{Z}),$$

に対して, τ 関数 $\tau(\Lambda)$ は次のような表示をもつ:

$$\begin{aligned} \tau(\Lambda) &= \tau_1^{-\nu_1} \dots \tau_9^{-\nu_9} \phi(\Lambda), \quad \phi(\Lambda) \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]_d \\ \deg \phi(\Lambda) &= d, \quad \text{ord}_{p_j}(\phi(\Lambda)) \geq \nu_j \quad (j = 1, \dots, 9). \end{aligned}$$

- 同次多項式の族 $\phi(\Lambda)$ ($\Lambda \in M$) を用いると, $\mathbb{P}^2$ の一般の点 $q = p_{10}$ への Cremona 変換 $w \in W_{3,9}$ の作用

$$q = (z_1 : z_2 : 1) \rightarrow q.w = (w(z_1) : w(z_2) : 1)$$

は, 次のように表される:

$$\begin{aligned} & (w(z_1) : w(z_2) : 1) \\ &= \left(\frac{[w(\varepsilon_{14})]}{[w(\varepsilon_{234})]} \frac{\phi(ws_0.e_1)}{\phi(w.e_1)} : \frac{[w(\varepsilon_{24})]}{[w(\varepsilon_{134})]} \frac{\phi(ws_0.e_2)}{\phi(w.e_2)} : \frac{[w(\varepsilon_{34})]}{[w(\varepsilon_{124})]} \frac{\phi(ws_0.e_3)}{\phi(w.e_3)} \right). \end{aligned}$$

今後の課題

- 楕円超幾何関数解の Bäcklund 変換に対して, 明示的な行列式表示を与えよ.
- 楕円超幾何解を頂点として, 超幾何解の退化の機構を, アフィン・ルート系の言葉で完全に記述すること ($\square$ Askey の図式).

$$\begin{array}{ccccccc} E_8^{(1)} & \rightarrow & E_7^{(1)} & \rightarrow & E_6^{(1)} & \rightarrow & D_5^{(1)} \rightarrow A_4^{(1)} \rightarrow \dots \\ & & & & & & \searrow & \searrow \\ & & & & & & & D_4^{(1)} \rightarrow \dots \end{array}$$

- BC_n 型の Ruijsenaars 系に対応する多変数化は?

[fin]

資料

● 楕円超幾何級数 ${}_{10}E_9(u)$

$${}_{10}E_9(u_0; u_1, u_2, \dots, u_7) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[u_0 + 2k\delta]}{[u_0]} \frac{[u_0]_k}{[\delta]_k} \prod_{i=1}^7 \frac{[u_i]_k}{[\delta + u_0 - u_i]_k}$$

以下, 「平衡条件」 $2\delta + 3u_0 = u_1 + u_2 + \dots + u_7$ を課す. また, 級数が有限和になるための条件として, $k = 1, \dots, 7$ のいずれかについて $u_k = -N\delta$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) となるもののみを考える.

● 変換公式 (その 1): Bailey 変換の楕円版

$$(s_0 = s_{123} = w_{(12)(34)5} \circ (35) \circ w_{(12)(34)5})$$

$$\begin{aligned} & {}_{10}E_9(v_0; v_1, \dots, v_7) \\ &= {}_{10}E_9(u_0; u_1, \dots, u_7) \\ & \quad \cdot \frac{[\delta + u_0 - u_4]_N [\delta + u_0 - u_5]_N [\delta + u_0 - u_6]_N [\delta + u_0 - u_4 - u_5 - u_6]_N}{[\delta + u_0]_N [\delta + u_0 - u_4 - u_5]_N [\delta + u_0 - u_4 - u_6]_N [\delta + u_0 - u_5 - u_6]_N} \\ & \quad v_0 = \delta + 2u_0 - u_1 - u_2 - u_3, \\ & \quad v_1 = \delta + u_0 - u_2 - u_3, \quad v_2 = \delta + u_0 - u_1 - u_3, \quad v_3 = \delta + u_0 - u_1 - u_2, \\ & \quad v_i = u_i \quad (i = 4, 5, 6), \quad v_7 = u_7 = -N\delta \quad (N = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

● 変換公式 (その 2) ($w_{(12)(34)5} = s_{125} \circ s_{345}$)

$$\begin{aligned} & {}_{10}E_9(v_0; v_1, \dots, v_7) \\ &= {}_{10}E_9(u_0; u_1, \dots, u_7) \frac{[u_5 - u_6]_N [\delta + u_0 - u_6]_N}{[\delta + u_0]_N [u_5]_N} \prod_{i=1}^4 \frac{[\delta + u_0 - u_i]_N}{[\delta + u_0 - u_i - u_6]_N} \\ & \quad v_0 = u_6 + u_7 - u_5, \quad v_5 = u_6 + u_7 - u_0 \\ & \quad v_1 = \delta + u_0 - u_2 - u_5, \quad v_2 = \delta + u_0 - u_1 - u_5, \\ & \quad v_3 = \delta + u_0 - u_4 - u_5, \quad v_4 = \delta + u_0 - u_3 - u_5, \\ & \quad v_6 = u_6, \quad v_7 = u_7 = -N\delta \quad (N = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

変換公式 (その 2) は変換公式 (その 1) を 2 回使って示せる. 逆に, 変換公式 (その 2) から 変換公式 (その 1) を導くこともできる. その意味で両者は同等レベルの変換公式である. また, 変換公式 (その 1) のパラメータを特殊化すると次の Frenkel-Turaev の和公式が導かれる.

● Frenkel-Turaev の和公式: Dougall/Jackson の和公式の楕円版

$$\begin{aligned} & (\delta + 2u_0 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5, \quad u_5 = -N\delta) \\ & {}_8E_7(u_0; u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \\ &= \frac{[\delta + u_0]_N [\delta + u_0 - u_1 - u_2]_N [\delta + u_0 - u_1 - u_3]_N [\delta + u_0 - u_2 - u_3]_N}{[\delta + u_0 - u_1]_N [\delta + u_0 - u_2]_N [\delta + u_0 - u_3]_N [\delta + u_0 - u_1 - u_2 - u_3]_N}. \end{aligned}$$

● 隣接関係式 (その 1)

$\Phi(u) = {}_{10}E_9(u)$ について

$$\begin{aligned} & (T_{u_6}^{-1}T_{u_7} - 1)\Phi(u) \\ &= T_{u_6}^{-1}T_u\Phi(u) \frac{[\delta + u_0][2\delta + u_0][u_7 - u_6 + \delta][u_6 + u_7 - u_0 - \delta]}{[\delta + u_0 - u_6][2\delta + u_0 - u_6][u_0 - u_7][\delta + u_0 - u_7]} \prod_{i=1}^5 \frac{[u_i]}{[\delta + u_0 - u_i]} \end{aligned}$$

ここで $T_{u_i}^{\pm 1}\Phi(u) = \Phi(u_0; u_1, \dots, u_i \pm \delta, \dots, u_7) \quad (i = 1, \dots, 7),$
 $T_u\Phi(u) = \Phi(u_0 + 2\delta; u_1 + \delta, \dots, u_7 + \delta)$

● 隣接関係式 (その 2)

$$\begin{aligned} & \frac{\prod_{i=1}^5 [\delta + u_0 - u_i - u_6]}{[u_6][\delta + u_0 - u_6][2\delta + u_0 - u_6]} T_{u_6}^{-1}T_u\Phi(u) \\ & - \frac{\prod_{i=1}^5 [\delta + u_0 - u_i - u_7]}{[u_7][\delta + u_0 - u_7][2\delta + u_0 - u_7]} T_{u_7}^{-1}T_u\Phi(u) \\ &= \frac{[u_7 - u_6] \prod_{i=1}^5 [\delta + u_0 - u_i]}{[\delta + u_0][2\delta + u_0][u_6][u_7]} \Phi(u) \end{aligned}$$

● 楕円超幾何方程式

$$\begin{aligned} & \frac{[u_7][u_0 - u_7][\delta + u_0 - u_7] \prod_{i=1}^5 [\delta + u_0 - u_i - u_6]}{[u_7 - u_6][u_7 - u_6 + \delta]} (T_{u_6}^{-1}T_{u_7} - 1)\Phi(u) \\ & + \frac{[u_6][u_0 - u_6][\delta + u_0 - u_6] \prod_{i=1}^5 [\delta + u_0 - u_i - u_7]}{[u_6 - u_7][u_6 - u_7 + \delta]} (T_{u_6}T_{u_7}^{-1} - 1)\Phi(u) \\ &= [u_6 + u_7 - u_0 - \delta] \prod_{i=1}^5 [u_i] \Phi(u) \end{aligned}$$

隣接関係式 (その 1) は, Riemann 関係式だけから示せる一般的な (易しい) 関係式. 隣接関係式 (その 2) は, 変換公式 (その 2) を使って隣接関係式 (その 1) を書き直したもので, ${}_{10}E_9$ に固有のもの. 2 つの隣接関係式を組合わせると, 楕円超幾何方程式が導ける.

$[x] = \sin \pi x$ のように三角的な場合には, $a_i = e^{2\pi\sqrt{-1}u_i}$, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\delta}$ という置換えて ${}_{10}E_9$ は, very well-poised, balanced, terminating ${}_{10}\phi_9$ に対応する.

$$\begin{aligned} {}_{10}E_9(u_0; u_1, \dots, u_7) &= {}_{10}W_9(a_0; a_1, \dots, a_7; q, q) \\ &= {}_{10}\phi_9 \left(\begin{matrix} a_0, q\sqrt{a_0}, -q\sqrt{a_0}, a_1, \dots, a_7 \\ \sqrt{a_0}, -\sqrt{a_0}, qa_0/a_1, \dots, qa_0/a_7 \end{matrix} \middle| q, q \right). \end{aligned}$$

Askey-Wilson 函数 (${}_8\phi_7$) や Askey-Wilson 多項式 (${}_4\phi_3$) は, この ${}_{10}W_9$ からの退化極限として得られる. 上記の楕円超幾何方程式は, Askey-Wilson の q 差分方程式 (または 3 項間漸化式) の拡張である.

(M.Noumi, October 2003)