

LAMÉ 作用素の固有値の解析接続

竹村 剛一 (横浜市大総合理学)

ABSTRACT. Lamé 作用素の固有値を、楕円関数の周期 τ についての複素解析関数として調べた。固有値の τ についての分岐を数値的に調べ、摂動展開で得られる級数の収束半径と整合していることを確かめた。

1. はじめに

本稿では、プレプリント [6] の内容を中心に解説をする。

Lamé の微分方程式とは、次の形で与えられる 2 階の線形常微分方程式である。

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + n(n+1)\wp(x)\right)f(x) = Ef(x), \quad (1.1)$$

ここで $\wp(x)$ は基本周期が $(1, \tau)$ であるような Weierstrass の $\wp$ 関数であり、 n は正の整数である。この微分方程式については、Whittaker-Watson の教科書の 23 章 [7, §23] にていろいろと解説されている。また、表現論において、Lamé の微分方程式の解はリー環 $so(2, 1)$ の主系列表現や $so(3)$ の有限次元表現でのある基底として現れるようである [2, 1]。

ところで、Lamé の微分方程式 (1.1) を調べる際、さまざまな方法で境界条件を課し、それぞれの場合に固有値問題を考えることができる。

1 つの方法としては、式 (1.1) が実数に制限したときに周期的な非自明な解をもつ、という境界条件を課すことができる。このとき固有値の集合は離散的となり、この固有値をもつ周期的な解は周期的 Lamé 関数または Lamé 関数と呼ばれている。他の境界条件の取り方として、式 (1.1) が 2 重周期関数を非自明な解としてもつ、というものがある。このとき固有値の個数は有限個（実際には $2n+1$ 個）となり、この固有値をもつ 2 重周期的な解は Lamé 多項式と呼ばれている。この用語は楕円関数を用いた変数変換をすると 2 重周期的な解はだいたい多項式の形で表示されるということに由来をもっている。

また、式 (1.1) が開区間 $(0, 1)$ にて 2 乗可積分な非自明な解をもつ、という境界条件を課すことができる。このときの固有値の集合は、Lamé 関数の固有値の集合から Lamé 多項式の固有値の集合を除外した集合となっていることがわかっている。

以上、いくつかの方法でそれぞれの場合の境界条件を満たす固有値について述べたが、この固有値は楕円関数の周期 τ に依存していることに注意しておく。

本稿では、Lamé 関数の固有値がどのように τ に依存しているかについて調べていく。とくに $n=1$ の場合に τ を変数とする関数として固有値がどのように分岐するかということについて考察する。

ところで、 $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ とおくと、もし、 q が実数で $-1 < q < 1$ ならば固有値が重ならないことが知られている [4, 6]。それゆえ、この条件のときは固有値に分岐が起こらない。

また、Lamé 関数の固有値を q について摂動展開して級数として求めるということが [4] にてなされており、収束半径が 0 でないことが証明されている。もしも固有値

が q の関数 (つまり τ の関数) として特異点をもたなければ収束半径は 1 になるはずであるが、実際に計算してみると 1 よりも真に小さくなるということが推測される。よって、計算で推測された収束円の上に特異点があるはずである。

一方、Lamé の微分方程式 (1.1) で n が整数のとき、より一般に Heun の方程式で結合定数がすべて整数のときには、大域的モノドロミーが超楕円積分を用いて記述されることが知られている。応用として Lamé 関数の固有値となっている条件や分岐がこる q (つまり τ) の条件が超楕円積分を用いて判定できるということが導かれる。 $n = 1$ のときは超楕円積分は第 2 種楕円積分となり、これを調べることによって固有値の分岐点を数値的に計算することができる。

ここまでで、収束半径と分岐点は別々の手法により数値計算により求められることを説明したが、モノドロミーの話から得られた分岐点が、さきほど述べた摂動展開の級数の収束円のあたりにあるということがわかった。つまり、摂動展開から得られる収束半径とモノドロミーの楕円積分表示が整合していることがわかったのである。

本稿は次のように構成されている。2 章にて、摂動展開やその収束半径について解説した。3 章にてモノドロミーについて考察し、数値的に分岐点を探した。4 章にて、摂動展開での収束半径とモノドロミーの考察から得られる分岐点の位置の整合性について議論した。Appendix にて、本稿で使う楕円関数の定義や公式についてまとめておいた。

本稿では、 $f(x)$ が周期的である $\Leftrightarrow \llbracket f(x+1) = f(x) \rrbracket$ 、 $f(x)$ が反周期的である $\Leftrightarrow \llbracket f(x+1) = -f(x) \rrbracket$ 、 $f(x)$ が 2 重周期的である $\Leftrightarrow \llbracket (f(x+1) = f(x) \text{ or } -f(x)) \text{ and } (f(x+\tau) = f(x) \text{ or } -f(x)) \rrbracket$ 、と定めておく。

2. 摂動論と収束半径

Lamé 作用素 H とは、以下の式により定められたものである。

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + n(n+1)\wp(x). \quad (2.1)$$

$q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ (ただし $(1, \tau)$ は $\wp(x)$ の基本周期) とおく。この章では、 $q = 0$ に対応する作用素 (本質的には以下で定められる H_T) の固有値・固有関数について述べ、さらに一般の q に対応する H について、 $q = 0$ からの摂動として考えたときに得られる結果について述べる。なお、 $\tau \rightarrow \sqrt{-1}\infty$ という極限は $q \rightarrow 0$ という極限に対応している。さて、

$$H_T = -\frac{d^2}{dx^2} + n(n+1)\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}. \quad (2.2)$$

とおくと、 $q \rightarrow 0$ とすると $H \rightarrow H_T - \frac{\pi^2}{3}n(n+1)$ となっている。この作用素は H_T は A_1 型三角型の Calogero-Moser-Sutherland のハミルトニアンに他ならない。また、

$$\Phi(x) = (\sin \pi x)^{n+1}, \quad \psi_m = \tilde{c}_m C_m^{n+1}(\cos \pi x) \Phi(x), \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad (2.3)$$

とおく。ここで $C_m^\nu(z) = \frac{\Gamma(m+2\nu)}{m!\Gamma(2\nu)} {}_2F_1(-m, -m+2\nu; \nu + \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2})$ は Gegenbauer 多項式であり、定数 $\tilde{c}_m$ を適切に定める。すると

$$H_T v_m = \pi^2(m+n+1)^2 v_m, \quad (2.4)$$

と $\langle v_m, v_{m'} \rangle = \delta_{m,m'}$ が成立することが知られている。ここで、内積は $\langle f, g \rangle = \int_0^1 dx \overline{f(x)} g(x)$ で定められたものとする。

Lamé 作用素 (2.1) について H の代わりに $H(q)$ という記法も用いることすると、式 (A.6) により $H(q)$ は以下のように展開される。

$$H(q)(= H) = H_T - \frac{\pi^2}{3}n(n+1) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x)q^k, \quad (2.5)$$

ここで、 H_T はさきほど現れた A_1 型三角型の Calogero-Moser-Sutherland のハミルトニアンであり、 $V_k(x)$ は x についての関数で、それぞれが $\cos 2\pi lx$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の有限和で書かれているである。

$H(p)$ の固有値・固有関数を、 H_T から摂動されたものとして q についての形式的級数展開して求める。詳しくは [4] を参照のこと。

$$E_m = \pi^2(m+n+1)^2 - \frac{\pi^2}{3}n(n+1) \quad (2.6)$$

とおくと、さきほど出てきた v_m は作用素 $H(0)$ の固有値 E_m の固有ベクトルとなっている。

作用素 $H(0)$ の固有値 E_m ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とその固有ベクトル v_m を基にして、 $H(q)$ の固有値・正規化された固有ベクトルを $E_m(q) = E_m + \sum_{k=1}^{\infty} E_m^{(k)} q^k$, $v_m(q) = v_m + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} c_{m,m'}^{(k)} v_{m'} q^k$ という形式和として求める。つまり、 $E_m(q)$ と $v_m(q)$ のそれぞれの係数を、以下の式が q の形式和としてみたときに成立するように求める。

$$H(q)v_m(q) = (H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x)q^k)v_m(q) = E_m(q)v_m(q), \quad (2.7)$$

$$\langle v_m(q), v_m(q) \rangle = 1.$$

まず、 $V_k(x)v_{j'} = \sum_{j''} d_{j,j''}^{(k)} v_{j''}$ となる係数 $d_{j,j''}^{(k)}$ を求める。これは、超幾何型多項式 (ここでは Gegenbauer 多項式) に関する Pieri formula を用いることにより計算できる。あとは、式 (2.7) の q^k の各係数を見ることにより $E_j^{(k)}$ や $c_{j,j'}^{(k)}$ に関する漸化式が出て来る。これを順々に計算することにより、 $E_j(q)$ や $v_j(q)$ の各係数が一意的に求まる。ここで、もし $m - m'$ が奇数ならば $d_{m,m'}^{(k)} = c_{m,m'}^{(k)} = 0$ となることに注意しておく。つまり、 m が偶数・奇数それぞれに独立に計算することができる。

こうして、 $H(p)$ の固有値・固有ベクトルが形式的ベキ級数として求まった。次にこれらの形式的ベキ級数の収束性が問題となるのだが、今回の設定では実際に収束性がいえる。

Proposition 2.1. [4, Corollary 3.7] $E_m(q)$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を式 (2.7) から定められた q についての形式級数としての固有値、 $v_m(q)$ を形式級数としての対応する固有ベクトルとする。 $|q|$ が十分に小さいならば、 $E_m(q)$ は収束級数となっており、 $v_m(q)$ は 2 乗可積分な空間の元として収束級数となっている。

以下に、 $n = 1$ の場合の固有値 $E_m(q)$ の展開式と、100 項以上展開したものから推定される収束半径を示しておく。

$E_0(q)$	$\pi^2 \left(\frac{10}{3} + \frac{80}{3}q + \frac{1360}{27}q^2 + \frac{20800}{243}q^3 + \frac{195920}{2187}q^4 + \frac{3174880}{19683}q^5 + \dots \right)$	.749
$E_2(q)$	$\pi^2 \left(\frac{46}{3} + \frac{272}{15}q + \frac{198928}{3375}q^2 + \frac{55403584}{759375}q^3 + \frac{4307155408}{34171875}q^4 + \dots \right)$	.749
$E_4(q)$	$\pi^2 \left(\frac{106}{3} + \frac{592}{35}q + \frac{2279248}{42875}q^2 + \frac{3773733184}{52521875}q^3 + \frac{1634762851088}{12867859375}q^4 + \dots \right)$	.875
$E_1(q)$	$\pi^2 \left(\frac{25}{3} + 20q + 65q^2 + \frac{115}{2}q^3 + \frac{2165}{16}q^4 + \frac{3165}{32}q^5 + \frac{23965}{128}q^6 + \dots \right)$	.838
$E_3(q)$	$\pi^2 \left(\frac{73}{3} + \frac{52}{3}q + \frac{1493}{27}q^2 + \frac{35671}{486}q^3 + \frac{4492153}{34992}q^4 + \frac{55853449}{629856}q^5 + \dots \right)$	.838
$E_5(q)$	$\pi^2 \left(\frac{241}{3} + \frac{82}{5}q + \frac{50339}{1000}q^2 + \frac{13640101}{200000}q^3 + \frac{3872868499}{32000000}q^4 + \dots \right)$	.906

表 1. 固有値の展開式と推定される収束半径

ここで、 $q(= \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)) \in \mathbb{R}$ のときの $H(= H(q))$ の性質に関する命題たちを引用しておく。

Proposition 2.2. (c.f. [4, Theorem 3.6]) $H(q)$ ($-1 < q < 1$) の开区間 $(0, 1)$ で 2 乗可積分な関数たちの空間においての固有値は $E_m(q)$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) という形で、 $q \in (-1, 1)$ において実解析的で $E_m(0) = E_m$ をみたすようにとれる。固有値 $E_m(q)$ の固有ベクトル $v_m(q)$ を、2 乗可積分な関数たちの空間の元として $q \in (-1, 1)$ で正則であり、 $\{v_m(q)\}_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ がこの空間の正規直交基底となるようにとることができる。

Proposition 2.3. (c.f. [4, Corollary 3.10]) $m < m'$ かつ $-1 < q < 1$ ならば、 $E_m(q) < E_{m'}(q)$ が成り立つ。つまり、 $-1 < q < 1$ ならば固有値は重ならない。

3. モノドロミーと分岐点

この章では、以下の微分方程式

$$Hf(x) = Ef(x), \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + 2\wp(x) \quad (3.1)$$

のモノドロミーを各固有値 E について求める。なお、ここでの式は、式 (1.1) の $n = 1$ の場合となっている。

$n = 1$ の場合は、2 重周期的な境界条件での固有値の集合は $\{-e_1, -e_2, -e_3\}$ となっており、対応する解 (Lamé 多項式) は $\wp_1(x), \wp_2(x), \wp_3(x)$ という関数となっている。さて、

$$\Lambda(\pm x, E) = \sqrt{\wp(x) + E} \exp \int^x \frac{\pm \sqrt{-(E + e_1)(E + e_2)(E + e_3)}}{\wp(x) + E} dx. \quad (3.2)$$

とおくと、[3, Proposition 3.7] や [5, §3.4.1] により、次の式が成立することが示されている。

$$H\Lambda(\pm x, E) = E\Lambda(\pm x, E). \quad (3.3)$$

そして、[5] により、モノドロミーの表示式として以下の式が得られている。

$$\Lambda(x + 1, E) = \Lambda(x, E) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{-e_1}^E \frac{\tilde{E} - 2\eta_1}{\sqrt{-(\tilde{E} + e_1)(\tilde{E} + e_2)(\tilde{E} + e_3)}} d\tilde{E} \right). \quad (3.4)$$

ところで、 $\Lambda^{\text{sym}}(x, E) = \Lambda(x, E) + \Lambda(-x, E)$ とおくと、 $H\Lambda^{\text{sym}}(x, E) = E\Lambda^{\text{sym}}(x, E)$ が成り立っている。以下に 2 乗可積分性に関する命題を引用しておく。

Proposition 3.1. (c.f. [5, §4.4.1, §4.5]) $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau) \in \mathbb{R}$, $-1 < q < 1$ とする。もし $\int_{-e_1}^E \frac{\tilde{E} - 2\eta_1}{\sqrt{-(\tilde{E} + e_1)(\tilde{E} + e_2)(\tilde{E} + e_3)}} d\tilde{E} \in 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ ならば $\Lambda^{\text{sym}}(x, E)$ は开区間 $(0, 1)$ で 2 乗可積分となる。さらに $E \neq -e_1, -e_2, -e_3$ ならば $\Lambda^{\text{sym}}(x, E) \neq 0$ となり、 $\exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $E = E_m(q)$ となる。逆に、もし $\int_{-e_1}^E \frac{\tilde{E} - 2\eta_1}{\sqrt{-(\tilde{E} + e_1)(\tilde{E} + e_2)(\tilde{E} + e_3)}} d\tilde{E} \notin 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ ならば式 (3.1) の 0 以外の解は 2 乗可積分にならず、 $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $E \neq E_m(q)$ となる。

$E = E_m(q)$ とおくと、これについての q に関しての解析接続は、以下の式をみたすようにされる。

$$\int_{-e_1}^E \frac{\tilde{E} - 2\eta_1}{\sqrt{-(\tilde{E} + e_1)(\tilde{E} + e_2)(\tilde{E} + e_3)}} d\tilde{E} \in 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

Proposition 3.2. 固有値 E が式 (3.5) と $E - 2\eta_1 \neq 0$ と $E \neq -e_1, -e_2, -e_3$ を $q = q_*$ で満たせば、式 (3.5) をみたす E は q について $q = q_*$ で解析的となる。

Proposition 3.2 より、固有値 E が q にて分岐しているのであれば $E - 2\eta_1 = 0$ が成立することが従う。つまり、 $E - 2\eta_1 = 0$ は式 (3.5) をみたす固有値 E が分岐をもつための必要条件である。

積分 (3.5) において $\tilde{E} = -\wp(t)$ という変数変換をすると、 $E = -\wp(t_0)$ とおくことにより次の式が得られる。

$$\int_{-e_1}^E \frac{\tilde{E} - 2\eta_1}{\sqrt{-(\tilde{E} + e_1)(\tilde{E} + e_2)(\tilde{E} + e_3)}} d\tilde{E} = \frac{1}{2}(-\zeta(t_0) + 2\eta_1 t_0). \quad (3.6)$$

よって、固有値 E が p において分岐をもつ必要条件として以下の式が得られた。

$$2\eta_1 = -\wp(t_0)(= E), \quad (3.7)$$

$$-\zeta(t_0) + 2\eta_1 t_0 \in \pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}. \quad (3.8)$$

これより式 (3.7, 3.8) を数値的に解こうと試みる。 $\eta_1, \wp(t_0), \zeta(t_0)$ を式 (A.6) を用いて q について 100 項程度まで展開する。 q を固定し、式 (3.7) をニュートン法により数値的に解き、 t_0 の値を得る。そして、 t_0 を式 (3.8) に代入し、式 (3.8) が成立するかどうかを調べる。ここで、 t_0 の値は収束をよくするために t_0 の虚部が小さくなるようにとっておく必要がある。

$|q| < .91$ かつ q の実部・虚部がともに 0 以上になるような q を 1000 個以上調べることによって、以下の値たちが周期的または反周期的な 2 乗可積分な固有関数に対応する固有値に対して分岐をもつ候補となることが数値計算によりわかった。

周期的	$q = .3281I, .2587 + .6974I, .5103 + .5461I$ $.7469 + .4525I, .2246 + .8428I, .5523 + .6775I$ $.3148 + .8219I, .6863 + .5591I$
反周期的	$q = .2814 + .5344I, .6552 + .5033I, .2648 + .7927I$ $.5359 + .6405I, .8072 + .4057I$

表 2. 分岐をもつ q の候補.

ここでのいくつかの q については実際には分岐を起こさないことに注意しておく。

次に、 q について、 q -平面上の経路 $\mathcal{C}$ に沿ってどのようにして解析接続されるかを見る。式 (3.6) より、固有値 E は次の条件をみたしながら $\mathcal{C}$ に沿って q について解析接続されることがわかる。

$$E = -\wp(t_0), \quad (3.9)$$

$$\exists m \in \mathbb{Z}, \quad -\zeta(t_0) + 2\eta_1 t_0 = m\pi\sqrt{-1}. \quad (3.10)$$

ここで、周期的な固有関数の固有値は $m \in 2\mathbb{Z}$ をみたしながら、反周期的な固有関数の固有値は $m \in 2\mathbb{Z} + 1$ をみたしながら解析接続される。

式 (3.10) を経路 $\mathcal{C}$ 上に適切に定められた点 q たちそれぞれについて、近い点では近い解となるように解いていく。それぞれの E と q について式 (3.9, 3.10) の解 t_0 と m

は一通りには限らずいろいろありうるのだが、経路に沿って解き続ける際に破綻をさけるためにいろいろと解の選択を変えていく必要が生じることもある。

この方法で、さきほどの表の分岐点の候補のまわりで解析接続してみる。すると、以下の点たちは実際には分岐点となっていないこと、そして、これらの点ではそれぞれある $i \in \{1, 2, 3\}$ において $2\eta_1 = -e_i$ が成立することがわかる。

$q = .3281I$	$2\eta_1 = -e_1$	$q = .2814 + .5344I$	$2\eta_1 = -e_2$
$q = .5103 + .5461I$	$2\eta_1 = -e_1$	$q = .6552 + .5033I$	$2\eta_1 = -e_2$
$q = .7469 + .4525I$	$2\eta_1 = -e_1$	$q = .2648 + .7927I$	$2\eta_1 = -e_3$
		$q = .8072 + .4057I$	$2\eta_1 = -e_2$

表 3. 分岐がおこっていない候補にあった点

表 3 の q においては、固有値 $E_m(q)$ ($\exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) と $-e_i$ ($\exists i \in \{1, 2, 3\}$) がぶつかっていると思われる。

$a \in \mathbb{C}$ とする。 $\Re a$ を a の実部とし、経路 C_a を、図 4 のように $\Re a$ から出発して a に向かって虚軸に並行に進み、 a のまわりで反時計周りに 1 周して虚軸に並行に進んで $\Re a$ にもどってくるものとする。

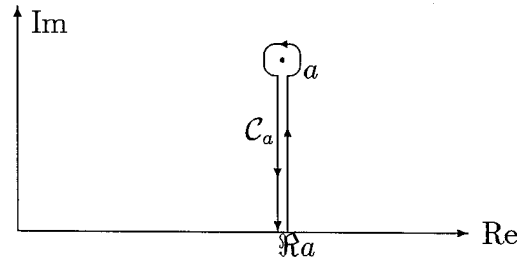


図 4. 経路 C_a .

固有値 E を、表 2 にあって表 3 で除外されていない分岐点 a のまわりを経路 C_a によって変数 q について解析接続することにより、それぞれの分岐のようすが以下の表のようになることがわかった。

$a = .2587 + .6974I$	$E_0 \Rightarrow E_2, E_2 \Rightarrow E_0, E_4 \Rightarrow E_4, E_6 \Rightarrow E_6$
$a = .2246 + .8428I$	$E_0 \Rightarrow E_4, E_2 \Rightarrow E_2, E_4 \Rightarrow E_0, E_6 \Rightarrow E_6$
$a = .5523 + .6775I$	$E_0 \Rightarrow E_4, E_2 \Rightarrow E_2, E_4 \Rightarrow E_0, E_6 \Rightarrow E_6$
$a = .3148 + .8219I$	$E_0 \Rightarrow E_4, E_2 \Rightarrow E_2, E_4 \Rightarrow E_0, E_6 \Rightarrow E_6$
$a = .6863 + .5591I$	$E_0 \Rightarrow E_0, E_2 \Rightarrow E_4, E_4 \Rightarrow E_2, E_6 \Rightarrow E_6$
$a = .5359 + .6405I$	$E_1 \Rightarrow E_3, E_3 \Rightarrow E_1, E_5 \Rightarrow E_5, E_7 \Rightarrow E_7$

表 5. 経路 C_a に沿った解析接続による分岐のようす

4. 収束半径と分岐点

3 章では固有値 $E_m(q)$ ($m \in \mathbb{Z}$) の q についての分岐点の位置を計算し、そのまわりでどのように解析接続されるかを調べた。この章では、2 章にて摂動の方法を用いることにより計算された固有値 $E_m(q)$ ($m \in \mathbb{Z}$) の q についての収束半径が、分岐点の位置と整合的になっていることを述べる。

周期的な固有値の場合について考察する。表 5 より、原点からもっとも近い分岐点は $q = .2587 + .6974I$ ($|q| = .7439$) であり、この点のまわりのサイクル C_q ($q = .2587 + .6974I$) において $E_0(q)$ と $E_2(q)$ が解析接続で移りあっていることが読み取れる。また、一般に、複素解析関数を原点のまわりで展開したときの収束半径と、その

関数の原点からもっとも近い特異点の座標の絶対値は一致していることが知られている。よって、 $E_0(q)$ と $E_2(q)$ の収束半径はおよそ .7439 であることが推測される。

他方、2 章において、摂動論を用いて計算される $E_0(q)$ と $E_2(q)$ の $q = 0$ での級数展開の収束半径はともにおよそ .749 であることが示されている。

これらより、2 つの異なる方法によって計算された収束半径はかなり近いことがわかり、摂動論とモロドロミーによる方法との整合性が示された。より 2 つの値が近づけるためには、 $E_m(q) = E_m + \sum_k E_m^{(k)} q^k$ ($m = 0, 2$) の展開式をより多く計算する必要があるが、一般にテーラー展開から数値的に正確に収束半径を推測するのはあまり実践的でないと思われる。また、 $E_0(q)$ と $E_2(q)$ の収束半径がほとんど同じになっていることは分岐点の存在しているからだという理屈も得られた。

また、表 5 より、周期的な固有値の場合について 2 番目に原点から近い分岐点は $q = .2246 + .8428I$ ($|q| = .8722$) であり、この点のまわりのサイクル C_q ($q = .2246 + .8428I$) において $E_0(q)$ と $E_4(q)$ が解析接続で移りあっているが、他方、摂動論を用いて計算される $E_4(q)$ の $q = 0$ での級数展開の収束半径はおよそ .875 である。よって、この場合においても整合性がみられる。

反周期的な固有値の場合については、表 5 より、原点からもっとも近い分岐点は $q = .5359 + .6405I$ ($|q| = .8351$) であり、この点のまわりのサイクル C_q ($q = .5359 + .6405I$) において $E_1(q)$ と $E_3(q)$ が解析接続で移りあっていることが読み取れる。他方、2 章にて摂動論を用いて $E_1(q)$ と $E_3(q)$ の $q = 0$ での級数展開の収束半径はともにおよそ .838 であることが示されている。よって、この場合においても整合的がみられるし、また、 $E_1(q)$ と $E_3(q)$ の収束半径がほとんど同じになるというとは分岐点の存在しているからだという理屈も得られた。

まとめると、固有値 $E_m(q)$ ($m = 0, 1, 2, 3, 4$) について摂動論とモノドロミーという 2 つの異なる方向によって計算される収束半径がほぼ一致しているということが確かめられた。

また、 m が 0 以上の偶数の固有値たち $\{E_m(q)\}_{m \in 2\mathbb{Z}}$ はすべて解析接続によりつながっているだろうと予想している。奇数の固有値についても同様の予想をしている。

APPENDIX A.

楕円関数の定義や公式についてまとめておく。 ω_1 と ω_3 を、 ω_3/ω_1 が上半平面にあるような複素数であるとする。

ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数、 σ 関数、 ζ 関数は以下のように定義されるものである。

$$\begin{aligned} \wp(x) &= \wp(x|2\omega_1, 2\omega_3) = \\ &= \frac{1}{x^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(x - 2m\omega_1 - 2n\omega_3)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_3)^2} \right), \\ \sigma(x) &= \wp(x|2\omega_1, 2\omega_3) = x \prod_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}} \left(1 - \frac{x}{2m\omega_1 + 2n\omega_3} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left(\frac{x}{2m\omega_1 + 2n\omega_3} + \frac{x^2}{2(2m\omega_1 + 2n\omega_3)^2} \right), \\ \zeta(x) &= \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

$\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3$ とし、

$$e_i = \wp(\omega_i), \quad \eta_i = \zeta(\omega_i), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{A.2})$$

とおく。すると以下の関係式が成立している。

$$e_1 + e_2 + e_3 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\wp(x) = -\zeta'(x), \quad (\wp'(x))^2 = 4(\wp(x) - e_1)(\wp(x) - e_2)(\wp(x) - e_3),$$

$$\wp(x + 2\omega_i) = \wp(x), \quad \zeta(x + 2\omega_i) = \zeta(x) + 2\eta_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$\wp_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) の定義は以下の式である。

$$\wp_i(x) = \exp(-\eta_i x) \sigma(x + \omega_i) / (\sigma(x) \sigma(\omega_i)). \quad (\text{A.4})$$

すると

$$\wp_i(x)^2 = \wp(x) - e_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{A.5})$$

が成立している。

$\omega_1 = 1/2$ 、 $\omega_3 = \tau/2$ 、 $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ とおくと、以下のような展開式があることが知られている。

$$\wp(x) = -2\eta_1 + \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n} \cos 2n\pi x, \quad (\text{A.6})$$

$$\zeta(x) = 2\eta_1 x + \frac{\pi}{\tan(\pi x)} + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n} \sin 2n\pi x,$$

$$\eta_1 = \pi^2 \left(\frac{1}{6} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n} \right).$$

REFERENCES

- [1] Kalnins, E. G.; Miller, Willard, Jr.: Lie theory and separation of variables. IV. The groups $SO(2, 1)$ and $SO(3)$. J. Math. Phys. **15** 1263–1274 (1974).
- [2] Macfadyen, N. W.; Winternitz, P.: Crossing symmetric expansions of physical scattering amplitudes: the $O(2, 1)$ group and Lamé functions. J. Math. Phys. **12** 281–293 (1971).
- [3] Takemura, Kouichi: The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system I: the Bethe Ansatz method. Comm. Math. Phys. **235** 467–494 (2003).
- [4] Takemura, Kouichi: The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system II: the perturbation and the algebraic solution. Preprint math.CA/0112179 (2001).
- [5] Takemura, Kouichi: The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system III: the finite gap property and the monodromy. Preprint, math.CA/0201208 (2002).
- [6] Takemura, Kouichi: Analytic continuation of eigenvalues of Lamé operator, in preparation.
- [7] Whittaker, E. T.; Watson, G. N.: A course of modern analysis. Fourth edition. Cambridge University Press, New York (1962).

236-0016 横浜市金沢区瀬戸 22-2 横浜市立大学数理科学教室

E-mail address: takemura@yokohama-cu.ac.jp