

環積のゲルファントペアと特殊関数

水川 裕司

岡山大学理学部 (学振特別研究員 PD)

e-mail: mzh@math.okayama-u.ac.jp

概要

環積のゲルファントペアを考え, 帯球関数が超幾何関数や対称関数を用いてどのように表現されるかを見る. 主にふたつの場合を考え, 始めが $(n+1, m+1)$ 型超幾何関数の場合. 次が多成分の zonal 多項式の場合である.

1 はじめに... 典型的な計算と定義

まず始めに, 有限群のペア

$$(H_n, S_n)$$

を考えよう. ここで H_n は B 型ワイル群であり, S_n は対称群である. H_n の元は

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n; \sigma)$$

という形をしており, ここで $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $\sigma \in S_n$ である. H_n の n 変数多項式環 $P = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 上の作用を

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n; \sigma)f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\varepsilon_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)}, \varepsilon_{\sigma(2)}x_{\sigma(2)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(n)}x_{\sigma(n)})$$

で定める. そして P の部分空間 $V(k) (0 \leq k \leq n)$ を

$$V(k) = \bigoplus_{I \subset \{1, 2, \dots, n\}, |I|=k} \mathbb{C}x_I$$

と定義する, ここで $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ に対して $x_I = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ としている. 事実として, $V(k)$ は H_n の既約表現を与え, k が異なれば同値ではない事が知られている [5]. $V(k)$ は基本対称式 $e_k(x_1, \dots, x_n)$ を含んでいる. 基本対称式は S_n -不変なので

$$\langle \text{Ind}_{S_n}^{H_n}, V(k) \rangle_{H_n} \neq 0$$

である. また $\dim \text{Ind}_{S_n}^{H_n} = 2^n$, $\dim V(k) = \binom{n}{k}$ だから, 二項定理より

$$\text{Ind}_{S_n}^{H_n} 1 \sim \bigoplus_{i=0}^n V(i)$$

がわかる. この分解は H_n の表現として無重複である. これより $V(k)$ の中の S_n 不変な元は定数倍を除いてただ一つである.

Definition 1.1. (G, H) を (有限) 群のペアとする. $\text{Ind}_{S_n}^{H_n} 1$ が G の表現として無重複な時, (G, H) をゲルファントペアという.

つまり, (H_n, S_n) はゲルファントペアである. ここで, $a, b \in \mathbb{C}$ と $I, I' \subset \{1, 2, \dots, n\}$ として, $V(k)$ 上の内積を

$$[ax_I, bx_{I'}] = \frac{1}{\binom{n}{k}} a \bar{b} \delta_{I, I'}$$

で定義する. この内積は H_n -不変である (有限群の通常表現は必ずユニタリ化出来ることに注意しておく). この内積を使って $V(k)$ を H_n の座標環に埋め込もう. $C(H_n/S_n)$ を各右側剰余類上定値な G 上の関数とする, つまり,

$$C(H_n/S_n) := \{f : H_n \rightarrow \mathbb{C}; f(xh) = f(x) \forall x \in H_n, \forall h \in S_n\}.$$

そして埋め込みの写像

$$\varphi_k : V(k) \longrightarrow C(H_n/S_n)$$

を $g, h \in S_n$ and $v \in V(k)$ に対して

$$\varphi_k(v)(g) = [v, ge_k(x_1, \dots, x_n)]$$

で定義する. いま,

$$\begin{aligned} \varphi_k(g_1 v)(g_2) &= [g_1 v, g_2 e_k(x_1, \dots, x_n)] \\ &= [v, g_1^{-1} g_2 e_k(x_1, \dots, x_n)] \\ &= \varphi_k(v)(g_1^{-1} g_2) \\ &= (g_1 \varphi_k(v))(g_2) \end{aligned}$$

かつ非退化性より $\varphi \neq 0$ なので, φ は単射な H_n -線形写像である. そして次を得る,

$$C(H_n/S_n) = \bigoplus_{i=0}^k \varphi_k(V(k)).$$

$\omega_k \in \varphi_k(V(k))$ を $g \in H_n$ に対して, $\omega_k(g) = [e_k(x_1, \dots, x_n), ge_k(x_1, \dots, x_n)]$ で定義する. 上での議論から, ω_k は $\varphi_k(V(k))$ のユニークな S_n -不変元である.

Definition 1.2. (G, H) をゲルファントペア, G の表現として

$$C(G/H) = \bigoplus_{i=0}^{s-1} V_i$$

と分解しているとき, 各既約成分中の H -不変な元で単位元で値 1 を取る関数 ω_i ($1 \leq i \leq s$) を (G, H) の帯球関数とよぶ.

ここで帯球関数はその定義より両側 S_n 不変な元である. そしていま,

$$S_n \setminus H_n/S_n = \{(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-\ell}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\ell}; 1) | 0 \leq \ell \leq n\}$$

なのに注意して帯球関数の両側剰余類上の値を求めてみよう. $g = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n; \sigma)$ のとき,

$$\omega_k(g) = \frac{1}{\binom{n}{k}} e_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

であるから, $g = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n-\ell}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\ell}; 1)$ に対して

$$\omega_{k,\ell} = \omega_k(g)$$

と置く. そしてここでもう少し計算してやると ([3] 参照), 帯球関数はガウスの超幾何関数

$${}_2F_1(a, b, c|x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$$

を用いて次の定理のように書ける.

Theorem 1.3. [3, 11]

$$\omega_{k,\ell} = {}_2F_1(-k, -\ell; -n|2).$$

帯球関数は $V(k)$ の行列表現の成分なので次の直交関係を満たす

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} {}_2F_1(-k, -\ell; -n|2) {}_2F_1(-k', -\ell; -n|2) = \binom{n}{k}^{-1} \delta_{k,k'}.$$

このようにして, 有限群のゲルファントペアから, 有限和で直交性が描ける直交多項式が得られた. この直交関係式より, これは一変数の直交多項式であると解釈出来る.

G を有限群としたとき, 対称群 S_n は G^n 上に次のように作用する.

$$\sigma(g_1, g_2, \dots, g_n) = (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, g_{\sigma^{-1}(n)}), \quad (g_1, g_2, \dots, g_n) \in G^n, \sigma \in S_n$$

環積 $G \wr S_n$ とはこの作用から得られる半直積群のことである [5]. 更に Dunkl-Ramirez (cf. [4]) によって上の定理は対称群の環積の場合に次のように拡張される.

Theorem 1.4. ゲルファントペア $(S_q \wr S_n, S_{q-1} \wr S_n)$ の帯球関数は次で与えられる.

$$\left({}_2F_1(-k, -\ell; -n | \frac{q}{q-1}) \right)_{0 \leq \ell, k \leq n}$$

また, これらは次の直交関係を満たす

$$\frac{1}{q^n} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (q-1)^\ell {}_2F_1(-k, -\ell; -n | \frac{q}{q-1}) {}_2F_1(-k', -\ell; -n | \frac{q}{q-1}) = \binom{n}{k}^{-1} (q-1)^{-n} \delta_{k,k'}.$$

最初の定理はこの定理の $q=2$ の場合である. ここで得られた直交多項式もまた直交性が有限和で書かれる一変数の多項式である. これらの直交多項式は Krawtchouk 多項式と呼ばれるものの特別な場合である. そして, 本来変数の部分は $x = \frac{q}{q-1}$ という値が代入されている. またこれはいわゆる選点系の直交多項式であることにも注意しておく.

こうした古典的な一変数直交多項式はその最も大きいクラスとして q -Racah 多項式と呼ばれるものが知られているが, 実はこれは代数的組合せ論の枠組みで捉えられることが, Leonard [6] によって知られている.

本講演では, 一つの目標として, ガウスの超幾何関数型の直交多項式の変数化と言う事を目標におき, 上の例が何故一変数なのか?そして, どのようにして変数が固定されているのか?という疑問に群論的な解答を与える.

つぎに、対称群たちの包含関係をみてみよう。

$$\begin{array}{ccc} S_{2n} & \supset & H_n \\ \cup & & \cup \\ S_n \times S_n & \supset & S_n \end{array}$$

それぞれの群の S_{2n} への埋め込み方は：

$$H_n = \langle (2i-1, 2i), (2j-1, 2j+1)(2j, 2j+2); 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1 \rangle,$$

$$S_n \times S_n = \langle (2i-1, 2i+1), (2j, 2j+2); 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1 \rangle$$

及び,

$$S_n = H_n \cap S_n \times S_n = \langle (2j-1, 2j+1)(2j, 2j+2); 1 \leq j \leq n-1 \rangle$$

である。ここで注目すべき点は、上のどのペアもゲルファントペアである、ということである。

帯球関数はどうなっているかというと、まず一番下の $(S_n \times S_n, S_n)$ は対称空間で言うところの群多様体のケースであり、その帯球関数は対称群の指標をその次数で割ったものである。上で見た通り (H_n, S_n) からは Krawtchouk 多項式である。また $(S_{2n}, S_n \times S_n)$ からは再び選点系直交多項式の Hahn 多項式というものが出てくる [10]。そして、 (S_{2n}, H_n) の帯球関数 (n の分割でパラメトライズされる) を ω_ρ^λ と書いたとき、

$$z_\lambda = |H_n| \sum_{\rho \vdash n} z_{2\rho}^{-1} \omega_\rho^\lambda p_\rho$$

を考えると、これは zonal 多項式と呼ばれる $(U(2n), O(n))$ の帯球関数である。下段の $(S_n \times S_n, S_n)$ が $(U(n) \times U(n), U(n))$ に対応している事を考えると、この事実は納得が行くであろう。

環積の表現論は対称群の表現論の言わば多成分版であり、これに対応して環積に対するシューア関数も通常のシューア関数の積で定義することが出来る。そこでこの講演の第二の目的として (S_{2n}, H_n) の環積バージョンを考え、多成分の zonal 多項式を捕まえる、

この記事の構成であるが、次章で $(n+1, m+1)$ -型超幾何関数で帯球関数がかかる場合を複素鏡映群をつかって紹介する。そして環積のゲルファントペアと $(n+1, m+1)$ -型超幾何関数の関係について考察する。その後第二の目的のための準備を行う、ここでの目的は適切なペアを構成する事といかに多成分化するかということである。

2 $(G \wr S_n, H \wr S_n)$ の帯球関数

ここでは環積のゲルファントペアの帯球関数が $(n+1, m+1)$ 型超幾何関数で表示されることを見る。

まずは複素鏡映群のケースをじっくり見てみよう。 $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ を自然数の集合とする。一の原始 r 乗根を $\xi = \exp 2\pi\sqrt{-1}/r$ と置く。 $G(r, 1, n) = \langle \xi \rangle \wr S_n$ と書きこの群を複素鏡映群という。この節では、 $G = G(r, 1, n)$ とその部分群 $H = G(1, 1, n) = S_n$ を考える。

両側剰余類の記述から述べよう。

Proposition 2.1. 両側剰余類の代表系 $\mathcal{D}_{r,n}$ は次で与えられる。

$$\mathcal{D}_{r,n} = \{(\underbrace{1, \dots, 1}_{\ell_0}, \underbrace{\xi, \dots, \xi}_{\ell_1}, \dots, \underbrace{\xi^{r-1}, \dots, \xi^{r-1}}_{\ell_{r-1}}; 1) \in G; \sum_{i=0}^{r-1} \ell_i = n\}.$$

群 G は n -変数の多項式の空間に

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \sigma) f(x_1, \dots, x_n) = f(\xi_{\sigma(1)}^{-1} x_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}^{-1} x_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(n)}^{-1} x_{\sigma(n)})$$

のように作用する。以下この作用を用いて誘導表現の既約分解の実現を考えよう。 $\mathbb{N}_0^r$ から分割数全体 Par への写像を,

$$\psi : \mathbb{N}_0^r \ni (k_0, k_1, \dots, k_{r-1}) \mapsto (0^{k_0} 1^{k_1} \dots (r-1)^{k_{r-1}}) \in Par$$

で定義する。ここで, k_i は分割 $\lambda = \psi(k_0, k_1, \dots, k_{r-1})$ の i -part の個数である。この写像を用いて次の定理を得る。

Proposition 2.2. 誘導表現 $\text{Ind}_{S_n}^{G(r,1,n)} 1$ は,

$$\text{Ind}_{S_n}^{G(r,1,n)} 1 \sim \bigoplus_{\sum_{i=0}^{r-1} k_i = n} V^{(k_0, k_1, \dots, k_{r-1})}$$

と分解する。ここで各 $V^{(k_0, k_1, \dots, k_{r-1})}$ は既約な $G(r, 1, n)$ -加群であり次のように定義される;

$$V^{(k_0, k_1, \dots, k_{r-1})} = \bigoplus_{\sigma \in S_n / S_{k_0} \times \dots \times S_{k_{r-1}}} \mathbb{C} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} x_{\sigma(2)}^{\lambda_2} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n}.$$

この分解に現れる既約成分は複素鏡映群の Specht 加群の内 “横一本” からなる分割の組でパラメトライズされるもの全てである [5]。さらに, これは特に無重複である, よって次が言えたことになる。

Proposition 2.3. (G, H) は ゲルファントペア。

これより下で, $\text{Ind}_H^G 1$ に現れる各既約成分上の $G(r, 1, n)$ -不変内積を定義し帯球関数を考えることにしよう。各既約成分 $V^{(k_0, k_1, \dots, k_{r-1})}$ 上の内積を

$$[\alpha x^\lambda | \beta x^\mu] = \alpha \bar{\beta} \delta_{\lambda\mu} \frac{1}{\binom{n}{k_0, k_1, \dots, k_{r-1}}}$$

で定義する。ここで α と β は複素数である, そして $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ とする。この内積は $G(r, 1, n)$ -不変であることがすぐわかる, つまり, $g \in G(r, 1, n)$, $f_1(x), f_2(x) \in V^{(k_0, k_1, \dots, k_{r-1})}$ に対して

$$[(gf_1)(x) | (gf_2)(x)] = [f_1(x) | f_2(x)]$$

である。ここで単項式対称多項式を定義しておこう。分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対して 単項式対称多項式とは,

$$m_\lambda(x) = \frac{1}{k_0! k_1! \dots k_n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} x_{\sigma(2)}^{\lambda_2} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n}.$$

で定義される対称多項式である。定義より単項式対称式は

$$[m_\lambda(x) | m_\lambda(x)] = 1$$

を満たす。そして帯球関数を $g = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \sigma) \in G$ と置いて次のように計算する:

$$\begin{aligned} [m_\lambda(x) | (gm_\lambda)(x)] &= [m_\lambda(x) | m_\lambda(\xi_{\sigma(1)}^{-1} x_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}^{-1} x_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(n)}^{-1} x_{\sigma(n)})] \\ &= \frac{[x^\lambda | x^\lambda]}{k_0! k_1! \dots k_n!} \sum_{\sigma \in S_n} \xi_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \xi_{\sigma(2)}^{\lambda_2} \dots \xi_{\sigma(n)}^{\lambda_n} \\ &= m_\lambda(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) / m_\lambda(1, \dots, 1). \end{aligned}$$

これで (G, H) の帯球関数の対称多項式による表示が得られた。

Proposition 2.4. ゲルファントペア (G, H) の帯球関数は

$$\omega^{(k_0, k_1, \dots, k_{r-1})}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \sigma) = m_\lambda(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) / m_\lambda(1, \dots, 1)$$

で得られる. ここで $\lambda = (0^{k_0} 1^{k_1} 2^{k_2} \dots (r-1)^{k_{r-1}})$ そして $\sum_{i=0}^{r-1} k_i = n$ である.

ではこの結果を更に超幾何関数を用いて表示することを試みる. 青本和彦氏と I. M. ゲルファント氏によって研究されたガウスの超幾何関数を多変数化した超幾何関数をここで定義する. これは, $(n+1, m+1)$ -型超幾何関数と呼ばれる:

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m-n-1}) \in \mathbb{C}^{m-n-1}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ そして $X = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq m-n-1}}$ に対して,

$$F(\alpha, \beta; \gamma; X) = \sum_{(\alpha_{ij}) \in M_{n, m-n-1}(\mathbb{N}_0)} \frac{\prod_{i=1}^n (\alpha_i)_{\sum_{j=1}^{m-n-1} \alpha_{ij}} \prod_{i=1}^{m-n-1} (\beta_i)_{\sum_{j=1}^n \alpha_{ji}}}{(\gamma)_{\sum_{i,j} \alpha_{ij}}} \frac{\prod x_{ij}^{\alpha_{ij}}}{\prod \alpha_{ij}!}.$$

この超幾何関数に対して次がわかる.

Theorem 2.5. [8] ゲルファントペア $(G(r, 1, n), S_n)$ の帯球関数は $(n+1, m+1)$ -型超幾何関数を用いて次のように表示される.

$$\omega_{(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{r-1})}^{(k_0, k_1, \dots, k_{r-1})} = F((-\ell_0, \dots, -\ell_{r-1}), (-k_0, \dots, -k_{r-1}); -n; J_r - \Xi_r).$$

ここで J_r は要素が全て 1 の $r \times r$ 行列であり, $\Xi_r = (\xi^{ij})_{0 \leq i, j \leq r-1}$ である.

帯球関数の母関数は

$$\sum_{k_0 + \dots + k_{r-1} = n} \binom{n}{k_0, \dots, k_{r-1}} \omega_{(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{r-1})}^{(k_0, k_1, \dots, k_{r-1})} t_0^{k_0} t_1^{k_1} \dots t_{r-1}^{k_{r-1}} = \prod_{i=0}^{r-1} \left(\sum_{j=0}^{r-1} \xi^{ij} t_j \right)^{\ell_i}$$

で与えられる.

さらに直交性をこのケースの場合に書き下してみると,

Theorem 2.6. [8] $k = (k_0, k_1, \dots, k_{r-1})$ が $\sum_{i=0}^{r-1} k_i = n$ を満たすとき,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n} \sum_{\ell \in \mathcal{D}_{r,n}} \binom{n}{\ell_0, \dots, \ell_{r-1}} F(-\ell, -k; -n; \Xi) \overline{F(-\ell, -k'; -n; \Xi)} \\ = \binom{n}{k_0, \dots, k_{r-1}}^{-1} \prod_{i=0}^{r-1} \delta_{k_i k'_i} \end{aligned}$$

である. ここで $\ell = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{r-1})$ など.

この直交性を見ればこれが多変数の直交多項式であることがわかるであろう. とくに冒頭で紹介した Vere-Jones の結果は $r = 2$ の場合である. このような群の一般化で多変数の直交多項式が出てくる. しかし, この結果ではまだ Dunkl-Ramirez の結果は含まれていない, そこでもう一つの例をみてみよう.

G を 2 面体群つまり, $G = D_r = \langle a, b | a^2 = b^r = (ab)^2 = 1 \rangle$, $H = \langle a \rangle$ とする. そして,

$$D(r, n) = D_r \wr S_n$$

とおく. このときその部分群として,

$$D(2, n) = \langle a \rangle \wr S_n$$

を考える. すると $(D(r, n), D(2, n))$ はやはりゲルファントペアであり, $(G(r, 1, n), S_n)$ とほぼ同様の計算によって次のことがわかる.

Theorem 2.7. [1] ゲルファントペア $(D(r, n), D(2, n))$ の帯球関数は $(n+1, m+1)$ -型超幾何関数で次のように表示される.

$$\omega_{(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m)}^{(k_0, k_1, \dots, k_m)} = F((-\ell_1, \dots, -\ell_m), (-k_1, \dots, -k_m); -n; (1 - \cos(2\pi i j / r))_{1 \leq i, j \leq m})$$

やはり $(n+1, m+1)$ -型超幾何関数でかけているのである. これと複素鏡映群の結果を観察してみよう.

・ $G = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, $H = \{1\}$ のとき, (G, H) はゲルファントペアであり, その帯球関数のテーブルは $Z(G, H) = (\exp 2\pi\sqrt{-1}ij/r)_{0 \leq i, j \leq r-1}$ で与えられる.

・ $G = D_r = \langle a, b | a^2 = b^r = (ab)^2 = 1 \rangle$, $H = \langle a \rangle$ のとき (G, H) はゲルファントペアであり, その帯球関数のテーブルは, $Z(G, H) = (\cos 2\pi ij/r)_{0 \leq i, j \leq m}$ で与えられる.

つまり, 環積のゲルファントペアの帯球関数は環積を取る前の帯球関数の表を $(n+1, m+1)$ -型超幾何関数に代入したものなのである. つまり次が言える.

いま, (G, H) をゲルファントペアとする. そして H の恒等表現を G に持ち上げたとき, 次のように分解しているとする:

$$\text{Ind}_H^G 1 \sim \bigoplus_{i=0}^{s-1} V_i \quad (\dim V_i = n_i)$$

ここで $s = |H \backslash G / H|$ である. $H \backslash G / H$ の完全代表系を $\{g_0, g_1, \dots, g_{s-1}\}$ とおき, $d_i = |Hg_i H|$ とおく. さらに (G, H) の帯球関数の表を $Z(G, H)$ とおく.

このとき, $(G \wr S_n, H \wr S_n)$ もゲルファントペアであり, $H \wr S_n \backslash G \wr S_n / H \wr S_n$ は集合

$$L = \{(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{s-1}); \sum_{i=0}^{s-1} \ell_i = n\}$$

と一対一の対応がある. $H \wr S_n \backslash G \wr S_n / H \wr S_n$ の完全代表系を $\{g_\ell; \ell = (\ell_0, \dots, \ell_{s-1}) \in L\}$ としたとき,

$$|Hg_\ell H| = d_0^{\ell_0} d_1^{\ell_1} \dots d_{s-1}^{\ell_{s-1}} \binom{n}{\ell_0, \dots, \ell_{s-1}} n!$$

である. また $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($0 \leq i \leq s-1$) としたら, 誘導表現の分解は,

$$\text{Ind}_{H \wr S_n}^{G \wr S_n} 1 \sim \bigoplus_{k_0 + \dots + k_{s-1} = n} V(k_0, \dots, k_{s-1}).$$

と書くことが出来る. ここで, $V(k_0, \dots, k_{s-1})$ は次元が $n_0^{k_0} n_1^{k_1} \dots n_{s-1}^{k_{s-1}} \binom{n}{k_0, \dots, k_{s-1}}$ の既約な $G \wr S_n$ 加群である. これに関して次のような定理を得るのである.

Theorem 2.8. [9] $(G \wr S_n, H \wr S_n)$ の帯球関数は $(n+1, m+1)$ -型超幾何関数を用いて

$$\omega_{(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{s-1})}^{(k_0, k_1, \dots, k_{s-1})} = F((-\ell_0, \dots, -\ell_{s-1}), (-k_0, \dots, -k_{s-1}); -n; J_s - Z(G, H))$$

と書ける. ここで, J_s は要素が全て 1 の行列である. また, 直交性は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|G|^n} \sum_{\ell_0 + \dots + \ell_m = n} d_0^{\ell_0} d_1^{\ell_1} \dots d_{s-1}^{\ell_{s-1}} \binom{n}{\ell_0, \dots, \ell_{s-1}} F(-\tilde{\ell}, -\tilde{k}; -n; Z) F(-\tilde{\ell}, -\tilde{k}'; -n; \bar{Z}) \\ &= n_0^{-k_0} n_1^{-k_1} \dots n_{s-1}^{-k_{s-1}} \binom{n}{k_0, \dots, k_{s-1}}^{-1} \delta_{kk'}. \end{aligned}$$

ここで $\ell = (\ell_0, \dots, \ell_{s-1}), \dots, Z = J_s - Z(G, H)$ とした.

さて, Dunkl-Ramirez の場合がこれに含まれることを確認しておこう:

$$\text{Ind}_{S_{q-1}}^{S_q} 1 = S(q) \oplus S(q-1, 1).$$

ここで $S(\lambda)$ は分割 λ に対応する対称群の既約表現である. もちろん, $n_0 = \dim S(q) = 1$, $n_1 = \dim S(q-1, 1) = q-1$ である. この分解は無重複なので (S_q, S_{q-1}) はゲルファントペアである. $S_{q-1} \backslash S_q / S_{q-1} = \{1, (q-1, q)\}$ であり, $|S_{q-1} 1 S_{q-1}| = (q-1)!$, $|S_{q-1} (q-1, q) S_{q-1}| = (q-1)!(q-1)$ である, ただし, ここで S_{q-1} は S_q を $\{1, 2, 3, \dots, q\}$ 上の置換群したとき, q の固定群とみている. そして帯球関数のテーブルは

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{q-1} \end{pmatrix}$$

で与えられることが確かめられる. これらのデータを上の定理に代入すれば Dunkl-Ramirez の結果が導出される.

つまり, Dunkl-Ramirez がガウスの超幾何関数でかけているのは, 誘導表現 $\text{Ind}_{S_{q-1}}^{S_q} 1$ の既約成分の数が 2 個であることに従っているのである.

3 多成分 zonal 多項式

ここでは多成分の zonal 多項式に付いて考えたい. しかし紙面の都合も有るのでごく簡単に触れることにする. 導入でも書いたようにここでは (S_{2n}, H_n) の環積による一般化を考えるのであった.

両側剰余類の記述から考えよう. さて S_{2n} の G^{2n} への順番の入れ換えによる作用を θ と置いたとき, θ の H_n への制限は

$$\Delta G^n = \{(g_1, g_1, g_2, g_2, \dots, g_n, g_n); g_i \in G\}$$

を不変にする, これを θ' とかき,

$$H(\Delta G)_n = \Delta G^n \rtimes_{\theta'} H_n$$

とおく. 我々のターゲットは

$$(G \wr S_{2n}, H(\Delta G)_n)$$

である. $G \wr S_{2n}$ の元 $x = (g_1, g_2, \dots, g_{2n}; \sigma)$ に対して, G -colored graph $\Gamma_G(x) = \{V_G(x), E_G(x)\}$ を次のように定義する: $V_G(x) = \{g_1, g_2, \dots, g_{2n}\}$ を頂点集合. $E_G(x)$ を g_{2i-1} と g_{2i} そして $g_{\sigma(2i-1)}$ と $g_{\sigma(2i)}$ が結ばれている辺の集合とする. g_{2i-1} to g_{2i} を結ぶ辺を '青' そして $g_{\sigma(2i-1)}$ と $g_{\sigma(2i)}$ を結ぶ辺を '赤' と呼ぼう.

Example 3.1. $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と $n = 6$ として例を見てみよう.

$$x = (0, 1, 2, 2, 1, 0; (123)(56)).$$

とすると,

$$\Gamma(x) = \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 1 & 2 & 0 \end{array}$$

細線で赤, 太線で青を表した.

こうして作ったグラフの各ループ (ここではこのグラフの連結成分の事をループと呼ぶことにする. 本来はこれはサイクルと呼ぶのが正しい) に注目して次のような積を考える. いまループの一つ $L = (g_{i_1} \text{-b- } g_{i_2} \text{-r- } g_{i_3} \text{-b- } \cdots \text{-r- } g_{i_{2k-1}} \text{-b- } g_{i_{2k}} \text{-r- } g_{i_1})$, -b- が青, -r- で赤を表している, を考える. ここで L のループ積を

$$p(L) = \prod_{j=1}^k g_{i_{2j-1}}^{-1} g_{i_{2j}}$$

で定義する. 上の例ではループ積は右側のループが 1 か 2, 左側のループも 1 か 2 である. ループ積の集合

$$\{p(L); L \text{ は } \Gamma_G(x) \text{ のループ}\}$$

を考え次の定義をする.

Definition 3.2. G の共役類を $\{C_1, C_2, \dots, C_c\}$ と置く.

$$R_G = \{C_i \cup C_i^{-1}\} = \{R_1, \dots, R_{t_0+t_1}\},$$

ここで $C_i^{-1} = \{g^{-1}; g \in C_i\}$ とし, t_0 は共役類のうち $C_i = C_i^{-1}$ を満たすものの個数, t_1 は $C_i \neq C_i^{-1}$ で有るものの個数. さらに

$$m_k(R_i) = \#\{L; L \text{ は } \Gamma_G(x) \text{ の長さ } k \text{ のループで } p(L) \in R_i\}$$

と置く. $(t_0 + t_1)$ 個の分割の組

$$\underline{\rho}(x) = (\rho^i(x); 1 \leq i \leq t_0 + t_1)$$

ここで, $\rho^i(x) = (1^{m_1(R_i)} 2^{m_2(R_i)} \dots n^{m_n(R_i)})$ として, $\underline{\rho}(x)$ を x のループタイプと呼ぶ.

上の例だと, $R_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$ ループタイプは $(\emptyset, (2, 1))$ である. この下で次のことが言える.

Theorem 3.3. $G \wr S_n$ の二つの元が, 同一の両側剰余類に入ることの必要十分条件はループタイプが一致することである. さらに, 任意の元とその逆元は同じ両側剰余類に属する.

この後半の主張から次が言える [7].

Theorem 3.4. $(G \wr S_{2n}, H(\Delta G)_n)$ はゲルファントペア.

Proposition 3.5. x はループタイプが $\underline{\rho} = (\rho^i; 1 \leq i \leq t_0 + t_1)$ で有るような元とする. ここで, $\rho^i = (1^{m_1(R_i)}, 2^{m_2(R_i)}, \dots, n^{m_n(R_i)})$ このとき

$$\begin{aligned} |H(\Delta G)_n x H(\Delta G)_n| &= \frac{|H_n|^2 |G|^{2n}}{\prod_{i=1}^{t_0+t_1} z_{2\rho(R_i)}} \times \frac{\prod_{i=1}^{t_0+t_1} |R_i|^{\ell(\rho(R_i))}}{|G|^{\ell(\rho)}} \\ &= |H_n|^2 |G|^{2n} \prod_{i=1}^{t_0} \frac{1}{z_{2\rho(R_i)} \zeta_{C_i}^{\ell(\rho(R_i))}} \times \prod_{i=t_0+1}^{t_0+t_1} \frac{1}{z_{\rho(R_i)} \zeta_{C_i}^{\ell(\rho(R_i))}}. \end{aligned}$$

次は既約分解である. 環積の表現であるが, 次のように構成する: $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^c)$ を分割の組で, $|\lambda^i| = n_i, \sum_{i=1}^c n_i = n$ とする. また $\{V_i; 1 \leq i \leq c\}$ を G の既約表現とする.

$$V(\underline{\lambda}) = \bigotimes_{i=1}^c V_i^{\otimes n_i}$$

この上の $G \wr S_{2n}$ の作用を

$$(g_1, \dots, g_n; \sigma) v_1 \otimes \dots \otimes v_n = g_1 v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes g_n v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

で定義する. さらに $\prod_{i=1}^c S_{n_i}$ の既約表現 $S(\underline{\lambda}) = \bigotimes_{i=1}^c S^{\lambda_i}$ を G の作用は自明なものを考えることで $G \wr \prod_{i=1}^c S_{n_i}$ の既約表現と思う. このとき,

$$W(\underline{\lambda}) = S(\underline{\lambda}) \otimes V(\underline{\lambda}) \uparrow_{G \wr \prod S_{n_i}}^{G \wr S_{2n}}$$

は $G \wr S_{2n}$ の既約表現を与える, またこれは $\underline{\lambda}$ により一意的に定まり全ての既約表現はこの形で表される. そして今のケースでは次のように記述される.

Theorem 3.6. 誘導表現の既約分解は次のように記述される.

$$\text{Ind}_{H(\Delta G)_n}^{G \wr S_{2n}} 1 = \bigoplus_{*} W(\underline{\lambda}),$$

η を G の既約表現, η^* は η の半傾表現とすると, $* = \{\underline{\lambda} = (\underbrace{2\lambda_1, \dots, 2\lambda_{t_0}}_{\eta=\eta^* \text{ に対応}}, \underbrace{\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_{t_1}, \mu_{t_1}}_{\eta \neq \eta^* \text{ に対応}}) \mid \sum |\lambda^i| + \sum |\mu^i| = n\}$, である.

この定理と一つ前の定理より帯球関数が決定する. 定理中の $W(\underline{\lambda})$ に属する帯球関数のループ積が

$$\underline{\rho} = (\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{t_0+t_1})$$

で有るような両側剰余類上での値を

$$\Omega_{\underline{\rho}}^{\underline{\lambda}}$$

とかく事にする. また,

$$Z_{\underline{\rho}} = |H(\Delta G)_n x H(\Delta G)_n|$$

そして

$$d(\underline{\lambda}) = \dim W(\underline{\lambda})$$

と書くと, 直交関係

$$\frac{1}{|G|^{2n} n!} \sum_{\underline{\rho}} Z_{\underline{\rho}} \Omega_{\underline{\rho}}^{\underline{\lambda}} \Omega_{\underline{\rho}}^{\underline{\nu}} = \delta_{\underline{\nu}, \underline{\lambda}} d(\underline{\lambda})^{-1}$$

が得られる. そして,

$$Z_{\underline{\lambda}} = \sum Z_{\underline{\rho}}^{-1} \Omega_{\underline{\rho}}^{\underline{\lambda}} P_{\underline{\rho}},$$

ここで $P_{\underline{\rho}}$ は適当な冪和対称関数, としてこれが多成分の zonal 多項式と呼ぶべきものになっている.

参考文献

- [1] H. Akazawa and H. Mizukawa, *Orthogonal polynomials arising from the wreath products of dihedral group*, to appear in Journal of Combinatorial Theory series A.
- [2] K. Aomoto and M. Kita, *Theory of Hypergeometric Functions(in Japanese)*, Springer Tokyo, 1994

- [3] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I. Association Schemes*, The Benjamin/Cummings Publishing Co. CA, 1984
- [4] C. Dunkl, A Krawtchouk polynomial addition theorem and wreath products of symmetric groups, *Indiana Univ. Math. J.* 25 (1976), no. 4, 335-358.
- [5] G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 16, 1981.
- [6] D. Leonard, *Orthogonal polynomials, duality and association schemes*, *SIAM J. Math. Anal.* 13 (1982), no. 4, 656-663.
- [7] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd. ed. , Oxford, 1995.
- [8] H. Mizukawa, *Zonal spherical functions on the complex reflection groups and $(n+1, m+1)$ -hypergeometric functions*, to appear in *Adv. Math.*
- [9] H. Mizukawa and H. Tanaka, *$(n+1, m+1)$ -hypergeometric functions associated to character algebras*, to appear *Proc. A.M.S.*
- [10] D. Stanton, Three addition theorems for some q -Krawtchouk polynomials, *Geom. Dedicata* 10 (1981), no. 1-4, 403-425
- [11] D. Vere-Jones, *Finite bivariate distributions and semigroups of non-negative matrices*. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 22 1971 247-270.