

Dual pair の moment map の制限として現れる geometric quotient について

東京電機大学・工学部 太田琢也 (Takuya Ohta)

§0. 序

dual pair $(G_{\mathbb{R}}^1, G_{\mathbb{R}}^2) \subset Sp(L_{\mathbb{R}})$ に対して、 $G_{\mathbb{R}}^1$ の既約表現のあるグループと、 $G_{\mathbb{R}}^2$ の既約表現のあるグループとが、 $Sp(L_{\mathbb{R}})$ の Weil 表現を通じて 1 対 1 に対応していることが Howe [H] によって知られている (本当はこれらの群の double cover の表現というべきだが)。この対応と (随伴多様体をとる操作を通じて) compatible になる巾零軌道の対応は、dual pair の moment map (θ -moment map, $\mathbb{R}$ -moment map) が (巾零とは限らない) 軌道たちのどのような対応を与えるかについて解説する。

Notation 0 本稿を通じて、Lie 群の Lie 環は、群の記号に対応するドイツ文字の小文字で表し、Lie 群の準同型が誘導する Lie 環の準同型をも、群の準同型と同じ記号で表す。

§1. moment map を同変にする大きな群の作用

(1.1) 設定

$L_{\mathbb{R}}$ を実ベクトル空間、 $(\cdot, \cdot)_{L_{\mathbb{R}}}$ を $L_{\mathbb{R}}$ 上の非退化な symplectic form とする。 $L := L_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$, $(\cdot, \cdot)_L$ を $(\cdot, \cdot)_{L_{\mathbb{R}}}$ の L への $\mathbb{C}$ -bilinear な拡張とし、 $\tau_L : L \rightarrow L$ を実部分空間 $L_{\mathbb{R}} \subset L$ を定める antilinear involution とする。

$$\tau_L : GL(L) \rightarrow GL(L), \tau_L(g) := \tau_L \circ g \circ \tau_L^{-1}$$

とおくとき、

$$Sp(L_{\mathbb{R}}) := \{g \in GL(L_{\mathbb{R}}) | (gu, gv)_{L_{\mathbb{R}}} = (u, v)_{L_{\mathbb{R}}}, u, v \in L_{\mathbb{R}}\} = Sp(L)^{\tau_L} = \{g \in Sp(L) | \tau_L(g) = g\}$$

に注意しておく。

Lemma 1.1 L の $\mathbb{C}$ -linear involution $s_L : L \rightarrow L$ を次のようにとることができる。

- (a) $(s_L u, v)_L = -(u, s_L v)_L$ ($u, v \in L$)
- (b) $s_L \circ \tau_L = -\tau_L \circ s_L : L \rightarrow L$
- (c) $\theta_L : GL(L) \rightarrow GL(L)$ を $\theta_L(g) := s_L \circ g \circ s_L^{-1}$ により定めるとき、 $\theta_L(Sp(L_{\mathbb{R}})) = Sp(L_{\mathbb{R}})$ かつ $\theta_L|_{Sp(L_{\mathbb{R}})}$ は $Sp(L_{\mathbb{R}})$ の Cartan involution である。 $\square$

以下、 s_L, θ_L を Lemma 1 のようにとる。

$$L_\delta := \{v \in L | s_L(v) = \delta v\} \quad (\delta = \pm 1)$$

とおけば、分解 $L = L_+ \oplus L_-$ は L の極分解になっていることに注意する。

(1.2) moment map

G を reductive な複素代数群、 $G_{\mathbb{R}}$ を複素共役 $\tau : G \rightarrow G$ が定める実型、 $\theta : G \rightarrow G$ を $G_{\mathbb{R}}$ の Cartan involution の複素化とし、

$$K = G^\theta := \{g \in G | \theta(g) = g\}, \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{g}^{-\theta} = \{X \in \mathfrak{g} | \theta(X) = -X\}$$

とおく。

Definition 1.2 G の表現 $\rho : G \rightarrow Sp(L)$ は次の 2 つの図式が可換となるとき、 (τ_L, θ_L) と compatible であるという：

$$(a) \quad \begin{array}{ccccc} & & \rho & & \\ & G & \rightarrow & Sp(L) & \\ \tau \downarrow & \downarrow \rho & & \downarrow & \tau_L \\ & G & \rightarrow & Sp(L) & \end{array} \quad (b) \quad \begin{array}{ccccc} & & \rho & & \\ & G & \rightarrow & Sp(L) & \\ \theta \downarrow & \downarrow \rho & & \downarrow & \theta_L \\ & G & \rightarrow & Sp(L) & \end{array}$$

□

Remark 1.3 明らかに $\rho(G_{\mathbb{R}}) \subset Sp(L_{\mathbb{R}})$, $\rho(K) \subset Sp(L)^{\theta_L}$, $\rho(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{sp}(L)^{-\theta_L}$ が成り立つ。 □

Definition 1.4 G の表現 $\rho : G \rightarrow Sp(L)$ は (τ_L, θ_L) と compatible であると仮定する。

(1) $z \in L, x \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$\mu_z(x) := (\rho(x)z, z)_L$$

とおくと

$$[\mu_z : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}] \in \mathfrak{g}^*$$

が得られる。これにより G -同変写像

$$\mu : L \rightarrow \mathfrak{g}^*, \quad z \mapsto \mu_z$$

を得る。これを $G_{\mathbb{R}}$ の $L_{\mathbb{R}}$ への作用の $\mathbb{C}$ -moment map と呼ぶ。

(2) $z \in L_{\mathbb{R}}, x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ なら、明らかに $\mu_z(x) \in \mathbb{R}$, 従って、

$$[\mu_z|_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}] \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$$

を得る。これにより $G_{\mathbb{R}}$ -同変写像

$$\mu_{\mathbb{R}} : L_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*, \quad z \mapsto \mu_z|_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}$$

を得る。これを $G_{\mathbb{R}}$ の $L_{\mathbb{R}}$ への作用の $\mathbb{R}$ -moment map と呼ぶ。($\frac{1}{2}\mu_{\mathbb{R}}$ は symplectic geometry での moment map になっている。例えば [CG] 参照のこと。)

(3) $z \in L_+, x \in \mathfrak{k}$ なら $\rho(x)z \in L_+$ より

$$\mu_z(x) = (\rho(x)z, z)_L = 0$$

よって $\mu_z|_{\mathfrak{k}} = 0$ となる。従って

$$\mu_z \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \simeq \mathfrak{s}^*$$

これにより K -同変写像

$$\mu_{\theta} : L_+ \rightarrow \mathfrak{s}^*, \quad z \mapsto \mu_z$$

を得る。これを $G_{\mathbb{R}}$ の $L_{\mathbb{R}}$ への作用の θ -moment map と呼ぶ。 $\square$

(1.3) moment map を同変にする大きな群の作用

Definition 1.5 (1) $X \in \text{End}(L)$ の $(\cdot, \cdot)_L$ に関する adjoint を X^* と書く。

(2) $g \in GL(L)$ と $X \in \mathfrak{gl}(L)$ に対して、次のようにおく。

$$g \bullet X := gXg^*, \quad g * X := (g^*)^{-1} \bullet X = (g^*)^{-1}Xg^{-1}$$

$\square$

$X \in \mathfrak{sp}(L)$ なら $g \in GL(L)$ に対して

$$(g \bullet X)^* = (gXg^*)^* = gX^*g^* = -gXg^* = -g \bullet X$$

従って次を得る。

Lemma 1.6 2つの作用 $(g, X) \mapsto g \bullet X, (g, X) \mapsto g * X$ によって $GL(L)$ は $\mathfrak{sp}(L)$ に作用する。

$\square$

Remark 1.7 $g \in Sp(L)$ なら $X \in \mathfrak{gl}(L)$ に対して、 $g \bullet X = g * X = \text{Ad}(g)X$ である。□

さて、(1.2) の G の表現 $\rho: G \rightarrow Sp(L)$ は (τ_L, θ_L) と compatible であるとし、 ρ は単射であるとする (以下、 ρ は省略する)。

Notation 1.8 $\mathfrak{gl}(L)$ の部分集合 A と $GL(L)$ の部分群 H に対して、次のようにおく。

$$\text{St}_H(A) := \{g \in H | g \bullet A \subset A, g * A \subset A\}$$

□

Remark 1.9 容易に次が確かめられる。

- (1) $G \subset \text{St}_{GL(L)}(\mathfrak{g})$
- (2) $G_{\mathbb{R}} \subset \text{St}_{GL(L_{\mathbb{R}})}(\mathfrak{g}) = \text{St}_{GL(L_{\mathbb{R}})}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$
- (3) $K \subset \text{St}_{GL(L)^{\theta}}(\mathfrak{g}) = \text{St}_{GL(L)^{\theta}}(\mathfrak{k}) \cap \text{St}_{GL(L)^{\theta}}(\mathfrak{s})$ □

$g \in \text{St}_{GL(L)}(\mathfrak{g})$, $z \in L$, $x \in \mathfrak{g}$ とすれば

$$\mu_{gz}(x) = (xgz, gz)_L = (g^*xgz, z)_L = ((g^{-1} * x)z, z)_L = \mu_z(g^{-1} * x)$$

よって、次が成り立つ。

Lemma 1.10 (1) $\text{St}_{GL(L)}(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{g}^*$ への作用を

$$(g * \lambda)(x) := \lambda(g^{-1} * x) \quad (g \in \text{St}_{GL(L)}(\mathfrak{g}), \lambda \in \mathfrak{g}^*, x \in \mathfrak{g})$$

により定めると $\mathbb{C}$ -moment map $\mu: L \rightarrow \mathfrak{g}^*$ は $\text{St}_{GL(L)}(\mathfrak{g})$ -同変である。

- (2) $\mathbb{R}$ -moment map $\mu_{\mathbb{R}}: L_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ は $\text{St}_{GL(L_{\mathbb{R}})}(\mathfrak{g})$ -同変である。
- (3) θ -moment map $\mu_{\theta}: L_+ \rightarrow \mathfrak{s}^*$ は $\text{St}_{GL(L)^{\theta}}(\mathfrak{g})$ -同変である。□

いま、 L 上の trace form $\kappa_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$, $\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \text{tr}(xy: L \rightarrow L)$ によって、同一視 $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ を行い、これと $\mathbb{C}$ -moment map $\mu: L \rightarrow \mathfrak{g}^*$ を合成したものを

$$\mu: L \rightarrow \mathfrak{g}, \quad z \mapsto \mu(z)$$

と書く。 $\mu_{\mathbb{R}}: L_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, $\mu_{\theta}: L_+ \rightarrow \mathfrak{s}$ も同様とする。以後、これらをも、moment map という。

Lemma 1.11 (1) $\mu: L \rightarrow \mathfrak{g}$ は $\text{St}_{GL(L)}(\mathfrak{g})$ の $\mathfrak{g}$ への作用 $(g, X) \mapsto g \bullet X$ に関して $\text{St}_{GL(L)}(\mathfrak{g})$ -同変である。即ち

$$\mu(gz) = g \bullet \mu(z) \quad (g \in \text{St}_{GL(L)}(\mathfrak{g}), z \in L)$$

(2) この作用に関して $\mu_{\mathbb{R}} : L_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は $\mathrm{St}_{GL(L_{\mathbb{R}})}(\mathfrak{g})$ -同変である。また、 $\mu_{\theta} : L_{+} \rightarrow \mathfrak{s}$ は $\mathrm{St}_{GL(L)^{\theta}}(\mathfrak{g})$ -同変である。□

§2. dual pair の moment map の制限として現れる geometric quotient

(2.1) dual pair に対応する大きな群と L_{+} , $L_{\mathbb{R}}$ の open dense orbit

以下、次の Table I の dual pair $(G_{\mathbb{R}}^1, G_{\mathbb{R}}^2)$ を考える。

Table I

	$(G_{\mathbb{R}}^1, G_{\mathbb{R}}^2)$	$(G^1)^{\vee}$	$(K^1)^{\vee}$	$(G_{\mathbb{R}}^1)^{\vee}$	Assump - θ	Assump - $\mathbb{R}$
A	$(GL(n, \mathbb{C}), GL(m, \mathbb{C}))$	$[(GL(n, \mathbb{C})^2)^2]$	$GL(n, \mathbb{C})^2$	$GL(n, \mathbb{C})^2$		
	$(GL(n, \mathbb{R}), GL(m, \mathbb{R}))$	$GL(n, \mathbb{C})^2$	$GL(n, \mathbb{C})$	$GL(n, \mathbb{R})^2$		
	$(U^*(n), U^*(m))$	$GL(n, \mathbb{C})^2$	$GL(n, \mathbb{C})$	$U^*(n)^2$	$n \geq m$	$n \geq m$
	$(O(n, \mathbb{C}), Sp(m, \mathbb{C}))$	$GL(n, \mathbb{C})^2$	$GL(n, \mathbb{C})$	$GL(n, \mathbb{C})$		
	$(Sp(n, \mathbb{C}), O(m, \mathbb{C}))$	$GL(n, \mathbb{C})^2$	$GL(n, \mathbb{C})$	$GL(n, \mathbb{C})$		
B	$(U(p, q), U(r, s))$	$GL(p+q, \mathbb{C})^2$	$[GL(p, \mathbb{C}) \times GL(q, \mathbb{C})]^2$	$GL(p+q, \mathbb{C})$	$\min(p, q) \geq \max(r, s)$	$p+q \geq r+s$
	$(O(p, q), Sp(2r, \mathbb{R}))$	$GL(p+q, \mathbb{C})$	$GL(p, \mathbb{C}) \times GL(q, \mathbb{C})$	$GL(p+q, \mathbb{R})$	$\min(p, q) \geq r$	$p+q \geq 2r$
	$(Sp(2p, \mathbb{R}), O(r, s))$	$GL(2p, \mathbb{C})$	$GL(p, \mathbb{C}) \times GL(q, \mathbb{C})$	$GL(2p, \mathbb{R})$	$p \geq \max(r, s)$	$2p \geq r+s$
	$(Sp(p, q), O^*(2r))$	$GL(p+q, \mathbb{C})$	$GL(p, \mathbb{C}) \times GL(q, \mathbb{C})$	$U^*(p+q)$	$\min(p, q) \geq r$	$p+q \geq 2r$
	$(O^*(2p), Sp(r, s))$	$GL(2p, \mathbb{C})$	$GL(p, \mathbb{C}) \times GL(p, \mathbb{C})$	$U^*(2p)$	$p \geq \max(r, s)$	$2p \geq r+s$

Table I の dual pair $(G_{\mathbb{R}}^1, G_{\mathbb{R}}^2)$ は (1.1) の symplectic 群 $Sp(L_{\mathbb{R}})$ の中に実現されているとし、 $Sp(L_{\mathbb{R}})$ の Cartan involution θ_L の制限 $\theta_L|_{G_{\mathbb{R}}^j}$ は $G_{\mathbb{R}}^j$ の Cartan involution になっていると仮定する。 $G_{\mathbb{R}}^j$ の複素化を $G^j := G_{\mathbb{R}}^j \exp(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) \subset Sp(L)$ とおき、 $K^j := (G^j)^{\theta_L}$, $\mathfrak{s}^j := (\mathfrak{g}^j)^{-\theta_L}$ とおく。 $G^j \hookrightarrow Sp(L)$ は (τ_L, θ_L) と compatible であることに注意する。

Proposition 2.1 (1) $j = 1, 2$ とする。 $\mathrm{St}_{GL(L)}(\mathfrak{g}^j)$ は Table I, 第 2 列の群に同型な部分群 $(G^j)^{\vee} \cap G^j$ を含む。($(G^2)^{\vee}$ は書いてありませんが、左右を交換した dual pair の $(G^1)^{\vee}$ から予想して下さい。以下の $(K^2)^{\vee}$, $(G_{\mathbb{R}}^2)^{\vee}$ についても同様。) そして $(G^1)^{\vee}, (G^2)^{\vee} \subset GL(L)$ は互いに可換である。
(2) $(K^j)^{\vee} := (G^j)^{\vee} \cap GL(L)^{\theta_L} \subset \mathrm{St}_{GL(L)^{\theta_L}}(\mathfrak{g}^j)$ とおくと、 $(K^j)^{\vee}$ は Table I, 第 3 列の群に同型となる。

(3) $(G_{\mathbb{R}}^j)^\vee := (G^j)^\vee \cap GL(L_{\mathbb{R}}) \subset \text{St}_{GL(L_{\mathbb{R}})}(\mathfrak{g}^j)$ とおくと、 $(G_{\mathbb{R}}^j)^\vee$ は Table I, 第 4 列の群に同型となる。

(4) $(,)_L$ に関する adjoint $\text{End}(L) \rightarrow \text{End}(L)$, $X \mapsto X^*$ に関して

$$\{(G^j)^\vee\}^* = (G^j)^\vee, \{(K^j)^\vee\}^* = (K^j)^\vee, \{(G_{\mathbb{R}}^j)^\vee\}^* = (G_{\mathbb{R}}^j)^\vee.$$

(5) $(G^j)^\vee$ の $\mathfrak{g}^j$ への作用 $(g, X) \mapsto g \bullet X = gXg^*$ に関して

$$|\mathfrak{g}^j/(G^j)^\vee| < \infty, |\mathfrak{s}^j/(K^j)^\vee| < \infty, |\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^j/(G_{\mathbb{R}}^j)^\vee| < \infty$$

$$(6) |L/\{(G^1)^\vee \cdot (G^2)^\vee\}| < \infty, |L_+/\{(K^1)^\vee \cdot (K^2)^\vee\}| < \infty, |L_{\mathbb{R}}/\{(G_{\mathbb{R}}^1)^\vee \cdot (G_{\mathbb{R}}^2)^\vee\}| < \infty \quad \square$$

Remark 2.2 (1) $(G^1)^\vee$ と $(G^2)^\vee$ ($\cap G^2$) は可換であるから、 $(G^1)^\vee$ と $\mathfrak{g}^2$ も可換であるが、 $g \in (G^1)^\vee$ と $X \in \mathfrak{g}^2$ に対して $g \bullet X = gXg^* = gg^*X$ であって、 $(G^1)^\vee$ はこの作用に関して $\mathfrak{g}^2$ を stabilize しない。

(2) もちろん $(G^1)^\vee \cdot G^2 \subset \text{St}_{GL(L)}(\mathfrak{g}^1)$ であるが、両者にどの位の違いがあるのかは判っていない。
 $(G^1)^\vee \cdot G^2$ が $\text{St}_{GL(L)}(\mathfrak{g}^1)$ の連結成分を含むのではないかと予想しているが、それも判っていない。
 $\square$

Proposition 2.1, (6) によって L_+ は open dense な $(K^1)^\vee \cdot (K^2)^\vee$ -軌道をもつ。それを L'_+ とおく。
また、 $L_{\mathbb{R}}$ も open sense な $(G_{\mathbb{R}}^1)^\vee \cdot (G_{\mathbb{R}}^2)^\vee$ -軌道をもつことが確かめられる。それを $L'_{\mathbb{R}}$ とおく：

$$\begin{aligned} L'_+ &:= [\text{the open dense } (K^1)^\vee \cdot (K^2)^\vee\text{-orbit in } L_+], \\ L'_{\mathbb{R}} &:= [\text{the open dense } (G_{\mathbb{R}}^1)^\vee \cdot (G_{\mathbb{R}}^2)^\vee\text{-orbit in } L_{\mathbb{R}}]. \end{aligned}$$

Lemma 2.3 (1) Table I, 仮定 Assump- θ のもとに、 L'_+ は 1 つの $(K^1)^\vee$ -軌道を成す。

(2) Table I, 仮定 Assump- $\mathbb{R}$ のもとに $L'_{\mathbb{R}}$ は 1 つの $(G_{\mathbb{R}}^1)^\vee$ -軌道を成す。 $\square$

(2.2) θ -moment map の制限として得られる geometric quotient

以下、 $G_{\mathbb{R}}^j$ の $L_{\mathbb{R}}$ の作用に関する θ -moment map を $\mu_{\theta}^j : L_+ \rightarrow \mathfrak{s}^j$ とかく。

Proposition 2.4 $\mathfrak{s}^1 \xleftarrow{\mu_{\theta}^1} L_+ \xrightarrow{\mu_{\theta}^2} \mathfrak{s}^2$ において、 μ_{θ}^1 (resp. μ_{θ}^2) は K^2 (resp. K^1) に関する商写像である。即ち、次が成り立つ。

$$(\mu_{\theta}^1)^*(\mathbb{C}[\mathfrak{s}^1]) = \mathbb{C}[L_+]^{K^2}, \quad (\mu_{\theta}^2)^*(\mathbb{C}[\mathfrak{s}^2]) = \mathbb{C}[L_+]^{K^1}$$

$\square$

以下、Table I の Assump- θ を仮定する。従って、 L_+ の open dense な $(K^1)^\vee \cdot (K^2)^\vee$ -軌道 L'_+ は1つの $(K^1)^\vee$ -軌道である。

Proposition 2.5 (1) $\mu_\theta^1 : L_+ \rightarrow \mathfrak{s}^1$ は $(K^1)^\vee (\subset \text{St}_{GL(L)^{\theta_L}}(\mathfrak{g}^1))$ 同変であるから、 $\mu_\theta^1(L'_+)$ も1つの $(K^1)^\vee$ -軌道であって、 $\mu_\theta^1|_{L'_+} : L'_+ \rightarrow \mu_\theta^1(L'_+)$ は classical topology で locally trivial である。
(2) 任意の $x \in \mu_\theta^1(L'_+)$ に対して $(\mu_\theta^1)^{-1}(x)$ は1つの K^2 -軌道で $(\mu_\theta^1)^{-1}(x) \simeq K^2$ である。 $\square$

Theorem 2.6 (1) $\mu_\theta^2 : L_+ \rightarrow \mathfrak{s}^2$ は全射である。

(2) $\mu_\theta^2|_{L'_+} : L'_+ \rightarrow \mathfrak{s}^2$ は smooth morphism である。とくに、 $\mu_\theta^2(L'_+)$ は $\mathfrak{s}^2$ の open subvariety である。

(3) $\mu_\theta^2|_{L'_+} : L'_+ \rightarrow \mu_\theta^2(L'_+)$ において、任意の $x \in \mu_\theta^2(L'_+)$ に対して、 $(\mu_\theta^2|_{L'_+})^{-1}(x)$ は1つの K^1 軌道である。 $\square$

Definition 2.7 ([PV]) 代数群 G は代数多様体 X に作用しているとする。このとき X から代数多様体 Y への morphism $\pi : X \rightarrow Y$ は次の (1)-(4) を満たすとき、geometric quotient であるという：

- (1) π は全射である。
- (2) π は開写像である。
- (3) π の任意の fibre は1つの G -軌道を成す。
- (4) 任意の開集合 $U \subset Y$ に対して $\pi^*(\mathcal{O}_Y(U)) = \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G$ が成り立つ。 $\square$

上の π に対して、Definition 2.7 の (1), (3) が成り立ち、かつ Y が normal であれば、 π は geometric quotient であることが知られている (Chevalley+Shafarevich, [PV])。従って、次が成り立つ。

Theorem 2.8 $\mu_\theta^1|_{L'_+} : L'_+ \rightarrow \mu_\theta^1(L'_+)$, $\mu_\theta^2|_{L'_+} : L'_+ \rightarrow \mu_\theta^2(L'_+)$ はそれぞれ K^2 , K^1 の作用に関する geometric quotient である。 $\square$

Theorem 2.9 (1) $\mu_\theta^1(L'_+) \xleftarrow{\mu_\theta^1|_{L'_+}} L'_+ \xrightarrow{\mu_\theta^2|_{L'_+}} \mu_\theta^2(L'_+)$ は次の軌道たちの全単射を誘導する。

$$\mu_\theta^1(L'_+)/K^1 \simeq L'_+/(K^1 \cdot K^2) \simeq \mu_\theta^2(L'_+)/K^2 \quad \dots(*)$$

(2) (1) の対応は closure relation を保つ。即ち、(*) によって軌道が $\mathcal{O}_1 \leftarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}'_1 \leftarrow \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}'_2$ と対応しているとき、

$$\overline{\mathcal{O}_1} \supset \mathcal{O}'_1 \iff \overline{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}' \iff \overline{\mathcal{O}_2} \supset \mathcal{O}'_2 \quad \dots(\dagger)$$

(3) $(\dagger)$ のとき、

$$\text{Sing}(\overline{\mathcal{O}_1}, \mathcal{O}'_1) = \text{Sing}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O}') = \text{Sing}(\overline{\mathcal{O}_2}, \mathcal{O}'_2)$$

が成り立つ ($Sing(,)$ の定義は例えば [KP2] を参照のこと)。□

Remark 2.10 (1) Theorem 2.9, (2) の軌道 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ に対して $\mu_\theta^2((\mu_\theta^1)^{-1}(\mathcal{O}_1)) = \mathcal{O}_2$ だが、 $\mu_\theta^1((\mu_\theta^2)^{-1}(\mathcal{O}_2)) \supset \mathcal{O}_1$ であって、一般には等号は成り立たない。

(2) $\mu_\theta^1((\mu_\theta^2)^{-1}(\overline{\mathcal{O}_2})) \supset \overline{\mathcal{O}_1}$ は容易に判るが、等号が成り立つか否かは判っていない。□

Conjecture 2.11 上の $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ に対して $\mu_\theta^1((\mu_\theta^2)^{-1}(\overline{\mathcal{O}_2})) = \overline{\mathcal{O}_1}$ が成り立つ。□

Remark 2.12 (1) Conjecture 2.11 は巾零軌道については正しい (巾零軌道の分類を用いた証明)。

(2) $\mathfrak{s}^j, L_+$ の巾零多様体をそれぞれ $\mathcal{N}(\mathfrak{s}^j), \mathcal{N}(L_+)$ で表す。 $\mathcal{N}(\mathfrak{s}^j)/K^j, \mathcal{N}(L_+)/(K^1 \cdot K^2)$ の分類、及び、 μ_θ^j が誘導する巾零軌道の対応 $\mathcal{N}(L_+)/(K^1 \cdot K^2) \rightarrow \mathcal{N}(\mathfrak{s}^j)/K^j$ の記述は出来ている。これらは、次の diagram を用いて記述される。

$(GL(n, \mathbb{C}), GL(m, \mathbb{C})), (O(n, \mathbb{C}), Sp(n, \mathbb{C}))$ ([KP1], [KP2]), $(GL(n, \mathbb{R}), GL(m, \mathbb{R})), (U^*(n), U^*(m))$ ([O1]) の場合:

$\mathcal{N}(\mathfrak{s}^j)/K^j$: Young diagrams, $\mathcal{N}(L_+)/(K^1 \cdot K^2)$: signed Young diagrams

$(U(p, q), U(r, s)), (O(p, q), Sp(2r, \mathbb{R})), (Sp(p, q), O^*(2r))$ ([O2],[O3], [O 未発表]) の場合:

$\mathcal{N}(\mathfrak{s}^j)/K^j$: signed Young diagrams, $\mathcal{N}(L_+)/(K^1 \cdot K^2)$: $\mathbb{Z}_4$ -signed Young diagrams.

(3) $\mu_\theta^2(L'_+) = \mathfrak{s}^2 \iff (G_{\mathbb{R}}^1, G_{\mathbb{R}}^2)$ が stable range

が判っている。従ってこのとき、任意の $\mathcal{O}_2 \in \mathfrak{s}^2/K^2$ に対して、対応する $\mathcal{O}_1 \in \mu_\theta^1(L'_+)/K^1$ が一意的に定まる。□

(2.3) $\mathbb{R}$ -moment map

以下、 $G_{\mathbb{R}}^j$ の $L_{\mathbb{R}}$ の作用に関する $\mathbb{R}$ -moment map を $\mu_{\mathbb{R}}^j : L_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^j$ とかく。

Proposition 2.4' $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1 \xleftarrow{\mu_{\mathbb{R}}^1} L_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\mu_{\mathbb{R}}^2} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^2$ において、次が成り立つ。

$$(\mu_{\mathbb{R}}^1)^*(\mathbb{R}[\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1]) = \mathbb{R}[L_{\mathbb{R}}]^{G_{\mathbb{R}}^2}, \quad (\mu_{\mathbb{R}}^2)^*(\mathbb{R}[\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^2]) = \mathbb{R}[L_{\mathbb{R}}]^{G_{\mathbb{R}}^1}$$

ここで、 $\mathbb{R}[V_{\mathbb{R}}]$ は実ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}}$ 上の実数係数多項式環を表す。□

以下、Table I の Assump- $\mathbb{R}$ を仮定する。従って、 $L_{\mathbb{R}}$ の open dense な $(G_{\mathbb{R}}^1)^\vee \cdot (G_{\mathbb{R}}^2)^\vee$ -軌道 $L'_{\mathbb{R}}$ は1つの $(G_{\mathbb{R}}^1)^\vee$ -軌道を成す。

Proposition 2.5' (1) $\mu_{\mathbb{R}}^1 : L_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1$ は $(G_{\mathbb{R}}^1)^\vee \subset \text{St}_{GL(L_{\mathbb{R}})}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1)$ 同変であるから、 $\mu_{\mathbb{R}}^1(L'_{\mathbb{R}})$ も1つの $(G_{\mathbb{R}}^1)^\vee$ -軌道であって、 $\mu_{\mathbb{R}}^1|_{L'_{\mathbb{R}}} : L'_{\mathbb{R}} \rightarrow \mu_{\mathbb{R}}^1(L'_{\mathbb{R}})$ は locally trivial である。

(2) 任意の $x \in \mu_{\mathbb{R}}^1(L'_{\mathbb{R}})$ に対して、 $(\mu_{\mathbb{R}}^1)^{-1}(x)$ は1つの $G_{\mathbb{R}}^2$ -軌道で $(\mu_{\mathbb{R}}^1)^{-1}(x) \simeq G_{\mathbb{R}}^2$ である。□

Theorem 2.6' (1) $\mu_{\mathbb{R}}^2|_{L'_{\mathbb{R}}} : L'_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^2$ の $L'_{\mathbb{R}}$ の各点における tangent map は全射である。特に、 $\mu_{\mathbb{R}}^2(L'_{\mathbb{R}})$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^2$ の開集合である。

(2) $\mu_{\mathbb{R}}^2|_{L'_{\mathbb{R}}} : L'_{\mathbb{R}} \rightarrow \mu_{\mathbb{R}}^2(L'_{\mathbb{R}})$ において、任意の $x \in \mu_{\mathbb{R}}^2(L'_{\mathbb{R}})$ に対して、 $(\mu_{\mathbb{R}}^2|_{L'_{\mathbb{R}}})^{-1}(x)$ は1つの $G_{\mathbb{R}}^1$ -軌道である。□

Theorem 2.9' (1) $\mu_{\theta}^1(L'_{\mathbb{R}}) \xleftarrow{\mu_{\mathbb{R}}^1|_{L'_{\mathbb{R}}}} L'_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\mu_{\mathbb{R}}^2|_{L'_{\mathbb{R}}}} \mu_{\mathbb{R}}^2(L'_{\mathbb{R}})$ は次の軌道たちの全単射を誘導する。

$$\mu_{\mathbb{R}}^1(L'_{\mathbb{R}})/G_{\mathbb{R}}^1 \simeq L'_{\mathbb{R}}/(G_{\mathbb{R}}^1 \cdot G_{\mathbb{R}}^2) \simeq \mu_{\mathbb{R}}^2(L'_{\mathbb{R}})/G_{\mathbb{R}}^2$$

(2) (1) の対応は closure relation を保つ。□

Remark 2.13 (1) Conjecture 2.11 の $\mathbb{R}$ -version も成り立つと予想されるが、現在のところ、巾零軌道に対しても証明されていないと思われる。

(2) $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^j, L_{\mathbb{R}}$ の巾零元の全体をそれぞれ $\mathcal{N}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^j), \mathcal{N}(L_{\mathbb{R}})$ で表す。 $\mathcal{N}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^j)/G_{\mathbb{R}}^j$ は [BC] において、type という概念で分類されている。 $\mathcal{N}(L_{\mathbb{R}})/(G_{\mathbb{R}}^1 \cdot G_{\mathbb{R}}^2)$ の分類は [DKP] において、[BC] における type の一般化により、分類されている。軌道の対応 $\mathcal{N}(L_{\mathbb{R}})/(G_{\mathbb{R}}^1 \cdot G_{\mathbb{R}}^2) \rightarrow \mathcal{N}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^j)/G_{\mathbb{R}}^j$ の記述も [DKP] において、得られているようである。

(3) Table I の B グループの dual pair については、Theorem 2.9 の全単射が存在するための仮定 Assump- θ と、Theorem 2.9' の全単射が存在するための仮定 Assump- $\mathbb{R}$ とが異なっている。Assump- θ の方が Assump- $\mathbb{R}$ より強い仮定であるが、Assump- $\mathbb{R}$ が成り立ち、Assump- θ が成り立たない状況では $L'_{\mathbb{R}}$ は巾零元を含まない ($L'_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{N}(L_{\mathbb{R}}) = \emptyset$)。従って、real case でも、巾零軌道たちの間の良い duality が存在するためには仮定 Assump- θ が必要である。□

筆者はしばらく、次のような虫のいいことを予想していた。

Conjecture 2.13(誤り) 自然な全単射 $\mathcal{N}(L_+)/ (K^1 \cdot K^2) \simeq \mathcal{N}(L_{\mathbb{R}}) / (G_{\mathbb{R}}^1 \cdot G_{\mathbb{R}}^2)$ が存在して

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N}(\mathfrak{s}^1)/K^1 & \xleftarrow{\mu_{\theta}^1} & \mathcal{N}(L_+)/ (K^1 \cdot K^2) & \xrightarrow{\mu_{\theta}^2} & \mathcal{N}(\mathfrak{s}^2)/K^2 \\ S_1 & \downarrow & & \downarrow & S_2 \\ \mathcal{N}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1)/G_{\mathbb{R}}^1 & \xleftarrow{\mu_{\mathbb{R}}^1} & \mathcal{N}(L_{\mathbb{R}}) / (G_{\mathbb{R}}^1 \cdot G_{\mathbb{R}}^2) & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{R}}^2} & \mathcal{N}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^2)/G_{\mathbb{R}}^2 \end{array}$$

が可換になる。ここに S_j は Kostant-関口対応である。□

しかし、 $\mathcal{N}(L_+)/(K^1 \cdot K^2)$ の分類と、 $\mathcal{N}(L_{\mathbb{R}})/(G_{\mathbb{R}}^1 \cdot G_{\mathbb{R}}^2)$ の分類を比較してみると、Conjecture 2.13 は誤りであることが判る。しかし、次のことは成り立つのではないかと思われる。

Conjecture 2.14 Kostant-関口対応を通じて、 $\mathcal{N}(\mu_{\theta}^j(L'_+))/K^j \simeq \mathcal{N}(\mu_{\mathbb{R}}^j(L'_{\mathbb{R}}))/G_{\mathbb{R}}^j$ かつ、次の図式は可換となる。

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{N}(\mu_{\theta}^1(L'_+))/K^1 & \xleftarrow{\mu_{\theta}^1} & \mathcal{N}(L'_+)/(K^1 \cdot K^2) & \xrightarrow{\mu_{\theta}^2} & \mathcal{N}(\mu_{\theta}^2(L'_+))/K^2 \\
 S_1 & & \downarrow & & \downarrow & S_2 \\
 \mathcal{N}(\mu_{\mathbb{R}}^1(L'_{\mathbb{R}}))/G_{\mathbb{R}}^1 & \xleftarrow{\mu_{\mathbb{R}}^1} & \mathcal{N}(L'_{\mathbb{R}})/(G_{\mathbb{R}}^1 \cdot G_{\mathbb{R}}^2) & \xrightarrow{\mu_{\mathbb{R}}^2} & \mathcal{N}(\mu_{\mathbb{R}}^2(L'_{\mathbb{R}}))/G_{\mathbb{R}}^2
 \end{array}$$

□

文献

- [BC] N. Bourgoyne and R. Cushman, Conjugacy classes in linear groups, J. Algebra 44(1977), 339-362.
- [CG] N. Chriss and V. Ginzburg, Representation theory and complex geometry, Birkhäuser.
- [DKP] A. Daszkiewicz, W. Kraśkiewicz and T. Przebinda, Dual pairs and Kostant-Sekiguchi correspondence II. Classification of nilpotent elements, preprint.
- [H] R. Howe, Transcending classical invariant theory, J. Amer. Math. Soc. 2(1989), no. 3, 535-552.
- [KP1] H. Kraft and C. Procesi, Minimal singularity in GL_n , Invent. Math. 62 (1981), 503-515.
- [KP2] H. Kraft and C. Procesi, On the geometry of conjugacy classes in classical groups, Comment. Math. Helv. 57 (1982), 539-602.
- [N] 西山享、巾零軌道とリー群の表現論、2000 年度代数学シンポジウム報告集
- [O1] T. Ohta, The singularities of the closures of nilpotent orbits in certain symmetric pairs, Tohoku Math. J. 38(1986), 441-468.
- [O2] T. Ohta, The closure of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities, Tohoku Math. J. 43(1991), 161-211.
- [O3] T. Ohta, Nilpotent orbits of $\mathbb{Z}_4$ -graded Lie algebra and geometry of moment maps associated to the dual pair $(U(p, q), U(r, s))$, preprint.
- [PV] V. L. Popov, E. V. Vinberg, Invariant Theory, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol.55, Algebraic Geometry IV, Springer-Verlag.