

2003 年 12 月 2 日から 5 日
2003 年度表現論シンポジウム
グリーンピア大沼 (北海道)

対称空間の c -関数の概説

2003 年 12 月 3 日

東京農工大学工学部
関口次郎

1 序

Harish-Chandra の c -関数はリーマン対称空間の Plancherel 測度と関係して、実半単純リー群の表現論で重要な役割を果たしている。 c -関数は帯球関数の漸近展開の初項の係数として導入されたが、一般の対称空間の c -関数についても同じような考え方で定義することは可能である。

この講演では歴史的な背景も解説しながら、大島 ([21],[23]) による一般の半単純対称空間の c -関数の定義、計算法などについて概説する。全体像を把握するのが大変なので、断片的な内容であり記号はもちろん、記述に整合性がないことをあらかじめお断りしておく。

2 Harish-Chandra の c -関数

2.1 帯球関数と c -関数

Harish-Chandra は彼の有名な論文のひとつである [10] において群 G 上の帯球関数

$$\phi_\lambda(g) = \int_K e^{(\lambda-\rho)(H(gk))} dk \quad (2.1)$$

を導入した。また、この関数の漸近挙動の主要項として c -関数を次のような積分表示で定義した。

$$c(\lambda) = \int_{\bar{N}} e^{-(\lambda+\rho)(H(\bar{n}))} d\bar{n} \quad (2.2)$$

いうまでもなく、 G は中心が有限群である連結な非コンパクト半単純リー群であり、 K はその極大コンパクト部分群である。 $G = KA_p N$ という岩沢分解がなりたつが、 g に対して、 A_p のリー環 $\mathfrak{a}_p$ の元 $H(g)$ で $g \in Ke^{H(g)}N$ となるものが一意に定まる。ここで、 $e^{H(g)}$ は $\mathfrak{a}_p$ から A_p への指数写像 $\exp$ の像である。 $\mathfrak{a}_p$ の複素化の双対を $\mathfrak{a}_{p,c}^*$ で表せば、この表示から類推されるように、任意の $g \in G$, $\lambda \in \mathfrak{a}_{p,c}^*$ に対して、 $e^{(\lambda(H(g)))} \neq 0$ である。 $\bar{N}$ は N の対極にある G のベキ単部分群である。

帯球関数の基本的性質として、

- $\phi_\lambda(e) = 1$

- $\phi_\lambda(kgk') = \phi_\lambda(g) \quad (\forall g \in G, k, k' \in K)$
- $\phi_{w\lambda} = \phi_\lambda \quad (\forall w \in W) \quad (\text{ここで } W \text{ は } \mathfrak{a}_p \text{ に関するワイル群である.})$
- $\int_K \phi_\lambda(gkg') dk = \phi_\lambda(g)\phi_\lambda(g') \quad (g, g' \in G)$
- $D\phi_\lambda = \gamma(D)(\lambda)\phi_\lambda \quad (\forall D \in \mathbb{D}(G/K))$
- $\phi_\lambda(g) = \int_{\bar{N}} e^{(\lambda-\rho)(H(g\bar{n}))} e^{-(\lambda+\rho)(H(\bar{n}))} d\bar{n}$

ここで, $\mathbb{D}(G/K)$ はリーマン対称空間 G/K 上の不変微分作用素環である. 任意の $g \in G$ に対して $\kappa(g) \in K$ を $g \in \kappa(g)A_p N$ となる元とすると,

$$\int_K f(k) dk = \int_K f(\kappa(gk)) e^{-2\rho(H(gk))} dk \quad (\forall f \in C(K)) \quad (2.3)$$

が成り立つが, この積分公式より

$$\phi_\lambda(g) = \int_K e^{(-\lambda-\rho)H(g^{-1}k)} dk \quad (2.4)$$

を得る.

2.2 $G = SL(2, \mathbf{R})$ の場合

もっとも簡単だがもっとも本質的な例をあげる. $G = SL(2, \mathbf{R})$ とする. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ は上半平面 $\text{Im } z > 0$ に

$$z \rightarrow g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

で作用している. この場合, $i = \sqrt{-1}$ の等方部分群は $K = SO(2)$ である. $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ として, $a_t = \exp(\frac{1}{2}tY) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$ とおけば, $A_p = \{a_t | t \in \mathbf{R}\}$ が成り立ち, さらに $G = KA_pK$ が成り立つ. $\mathfrak{a}_p = \mathbf{R}Y$ は A_p のリー環である. $\alpha \in \mathfrak{a}_p^*$ を $\alpha(Y) = 2$ で定義する. $k_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とすれば, $K = \{k_\theta | \theta \in \mathbf{R}\}$ である. この場合, $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R} \right\}$ としてよい. 次の分解が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{D} & \frac{-c}{D} \\ \frac{c}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1/D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{ab+cd}{D^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (D = \sqrt{a^2 + c^2})$$

したがって, $H(a_t k_\theta) = \frac{1}{2} t' Y$ で t' を定義すると, $t' = \log(e^t \cos^2 \theta + e^{-t} \sin^2 \theta)$ がわかる. いまの場合, $\rho = \alpha/2$ である. そこで, $\lambda = s\alpha$ ($s \in \mathbb{C}$) とすれば,

$$\phi_\lambda(a_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^t \cos^2 \theta + e^{-t} \sin^2 \theta)^{s-1/2} d\theta \quad (2.5)$$

簡単な計算でこの式は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^t \cos^2 \theta + e^{-t} \sin^2 \theta)^{s-1/2} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cosh t + \sinh t \cos \theta)^{s-1/2} d\theta = P_{s-1/2}(\cosh t)$$

となることがわかる. ここで $P_\nu(z)$ は第1種ルジャンドル関数である. 第1種ルジャンドル関数に対して関数等式 $P_{-\nu-1} = P_\nu$ が成り立つが, これは $P_{-s-1/2} = P_{s-1/2}$ と同等であり, 帯球関数のワイル群に関する関数等式の特別な場合と見なせる. $u(z) = P_\nu(z)$ は微分方程式

$$\left((1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} \right) u = -\nu(\nu+1)u$$

を満たす. 変数変換 $z = \cosh t$ によってこの微分方程式を書き直す. まず

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \frac{d}{dz} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= -(1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} \end{aligned}$$

が成り立ち,

$$(1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} = - \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\cosh t}{\sinh t} \frac{d}{dt} \right)$$

がわかり, したがって, $\phi_\lambda(a_t)$ に対する微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\cosh t}{\sinh t} \frac{d}{dt} \right) \phi_\lambda(a_t) = \left(s^2 - \frac{1}{4} \right) \phi_\lambda(a_t) \quad (2.6)$$

を得る. これは対称空間の不変微分作用素の固有関数になることを意味している.

さて $\phi_\lambda(a_t)$ の積分表示 (2.5) に戻る. 変数変換 $x = \tan \frac{\theta}{2}$ によって

$$\sin \theta = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad d\theta = \frac{2}{1+x^2} dx$$

が成り立つので,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^t \cos^2 \theta + e^{-t} \sin^2 \theta)^{s-1/2} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^t + e^{-t} x^2)^{s-\frac{1}{2}}}{(1+x^2)^{s+\frac{1}{2}}} dx$$

したがって

$$\phi_\lambda(a_t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^t + e^{-t} x^2)^{s-\frac{1}{2}}}{(1+x^2)^{s+\frac{1}{2}}} dx \quad (2.7)$$

を得る. いま $t \rightarrow +\infty$ のときの $\phi_\lambda(a_t)$ の漸近挙動を調べる.

$$e^{-(s-1/2)t} \phi_\lambda(a_t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + e^{-2t} x^2)^{s-\frac{1}{2}}}{(1 + x^2)^{s+\frac{1}{2}}} dx$$

だから, $\operatorname{Re}(s) > 0$ のとき, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(s-1/2)t} \phi_\lambda(a_t)$ は収束する. この極限値を $c(s)$ で表せば

$$c(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{s+\frac{1}{2}}} \quad (2.8)$$

帯球関数の関数等式より $\phi_\lambda(a_t)$ は $s \rightarrow -s$ という変換で不変だから, $\operatorname{Re}(s) < 0$ のときには,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(-s-1/2)t} \phi_\lambda(a_t) = c(-s)$$

が成り立つ. $c(s)$ はガンマ関数を使って表せる. 実際

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{s+\frac{1}{2}}} = \int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(1 + t)^{s+\frac{1}{2}}} dt = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(s + \frac{1}{2})}$$

だから,

$$c(s) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(s)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(s + \frac{1}{2})} \quad (2.9)$$

を得る. 微分方程式 (2.6) の一般解を考察する. $y = e^{-2t}$ とすれば,

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\cosh t}{\sinh t} \frac{d}{dt} = 4 \left(y \frac{d}{dy} \right)^2 - 2 \frac{1+y}{1-y} \left(y \frac{d}{dy} \right)$$

だから, 方程式

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\cosh t}{\sinh t} \frac{d}{dt} - \left(s^2 - \frac{1}{4} \right) \right\} u(t) = 0$$

は

$$\left[\left(y \frac{d}{dy} - \frac{1-2s}{4} \right) \left(y \frac{d}{dy} - \frac{1+2s}{4} \right) - y \left(y \frac{d}{dy} + \frac{1-2s}{4} \right) \left(y \frac{d}{dy} + \frac{1+2s}{4} \right) \right] v(y) = 0 \quad (2.10)$$

になる. 簡単のため, 当面の間 $s \notin \mathbf{Z}$ を仮定する. このとき, $|y| \ll 1$ で収束する y のべき級数

$$\tilde{v}_s(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) y^n$$

で次の条件を満たすものが存在する:

(i) $a_0(s) = 1$ (ii) $a_n(s)$ は s の有理関数 ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(iii) $v_s(y) = y^{(1-2s)/4} \tilde{v}_s(y)$ は微分方程式 (2.10) の解になる.

方程式 (2.10) は 2 階常微分方程式だから, 1 次独立な解は 2 つである. また, 仮定の下では $v_s(y), v_{-s}(y)$ は $y = 0$ の近くで定義された 1 次独立な解である. したがって, $\phi_\lambda(a_t)$ は $y = e^{-2t}$ という座標で考えると $v_s(y), v_{-s}(y)$ の 1 次結合で表せる. すなわち

$$\phi_\lambda(a_t) = c_s^+ v_s(y) + c_s^- v_{-s}(y)$$

となる c_s^+, c_s^- が存在する．ところで, $\operatorname{Re}(s) > 0$ のとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-1/2)t} \phi_\lambda(a_t) = c(s)$$

だから, $c_s^+ = c(s)$ がわかる．これは $\operatorname{Re}(s) > 0$ で成り立つ式だが, c_s^+ が s の有理型関数であることがわかるので, 条件 $\operatorname{Re}(s) > 0$ は取り除ける．同様にして, $c_s^- = c(-s)$ が示せる．これで,

$$\phi_\lambda(a_t) = c(s)v_s(y) + c(-s)v_{-s}(y) \quad (2.11)$$

が $0 < y < 1$ で成り立つことがわかる．

$c(s)$ が $G = SL(2, \mathbf{R})$ の場合の c -関数である． $c(s)$ の積分表示 (2.8) を一般化したものが $c(\lambda)$ の積分表示式 (2.2) である．

2.3 Gindikin-Karpelevič の積公式

帯球関数を超幾何関数の一般化とみて, 多変数の特殊関数とみてどうであろうか, という問題は論文 [10] が出版された直後から Gelfand その他のロシアの数学者にとって関心があったことだと Gindikin は書いている ([8]). また, $c(\lambda)$ を具体的に書き下すことも重要な問題だと認識されていた． G が複素半単純群の場合には, 帯球関数は本質的には指数関数の 1 次結合で表せ, $c(\lambda)$ は λ の有理式で表せることは Harish-Chandra 以前に Gelfand などが求めていた (cf. [7]). それ以外の例としては, Berezin と Karpelevič (cf. [1]) が $SU(p, q)/S(U(p) \times U(q))$ の場合に, 帯球関数は本質的には超幾何関数の 1 次結合で表せることと, $c(\lambda)$ の計算をしている． $SL(n, \mathbf{R})/SO(n)$ の場合に c -関数を初めてガンマ関数の積で表すことに成功したのは Bhanu Murthy ([4]) である．それまで, 一般のリーマン対称空間の c -関数が既知関数で記述できるかどうかは知られていなかったもので, この結果は特筆すべきことかもしれない．Bhanu Murthy は引き続いて $Sp(n, \mathbf{R})/U(n)$ の場合に c -関数を計算した (cf. [5]). これらの結果は一般の c -関数がガンマ関数の積で表示できるらしいことを示唆しているが, それを実行したのが Gindikin と Karpelevich である ([9]). その結果を書き下すのに少し記号の準備をする． $\mathfrak{g}$ を G のリー環とし, $\Sigma(\mathfrak{a}_p)$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}_p$ に関するルート系とする． $\forall \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_p)$ に対して m_α を α の重複度とする． $\mathfrak{a}_p$ には W 不変な内積が入るが, それを $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表し, $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_p)$ と $\lambda \in \mathfrak{a}_{p,c}$ に対して, $\lambda_\alpha = 2 \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ とおく．さらに, $\Sigma(\mathfrak{a}_p)^+$ を N に対応する正ルート全体の集合, $\Sigma(\mathfrak{a}_p)_0 = \{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_p) \mid \frac{1}{2}\alpha \notin \Sigma(\mathfrak{a}_p)\}$, $\Sigma(\mathfrak{a}_p)_0^+ = \Sigma(\mathfrak{a}_p)_0 \cap \Sigma(\mathfrak{a}_p)^+$ とおく．以上の準備のもとで,

$$c_\alpha(\lambda) = \frac{\Gamma(m_\alpha + m_{2\alpha})}{\Gamma(\frac{m_\alpha + m_{2\alpha}}{2})} \frac{\Gamma(\frac{\lambda_\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda_\alpha + m_\alpha}{2})} \frac{\Gamma(\frac{\lambda_\alpha + m_\alpha}{4})}{\Gamma(\frac{\lambda_\alpha + m_\alpha}{4} + \frac{m_{2\alpha}}{2})} \quad (2.12)$$

とおけば, $c(\lambda)$ に対する積公式

$$c(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_p)_0^+} c_\alpha(\lambda) \quad (2.13)$$

が成り立つ．

等式 (2.12), (2.13) がどのように導かれるかを少し説明する． $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_p)$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha$ を α に対応するルート空間とする． $\mathfrak{g}(\alpha)$ は実階数が 1 の単純リー環である．また, $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ から生成される $\mathfrak{g}$ の部分リー環を $\mathfrak{g}(\alpha)$ とする．そして, $G(\alpha)$ を $\mathfrak{g}(\alpha)$ から生成される G

の解析的部分群とする. このとき, $K(\alpha) = G(\alpha) \cap K$ は $G(\alpha)$ の極大コンパクト部分群になる. $G(\alpha)$ に対する c -関数が実は (2.12) の c_α である. (正確には, パラメータ λ をどうとるかを説明する必要があるが, ここでは省略する.) Gindikin-Karpelevič の結果より, c -関数の計算は「(1) 実階数 1 の非コンパクト単純リー群の場合の計算」(式 (2.12)) と「(2) 積公式」(式 (2.13)) に帰着されることがわかる.

(1), (2) について少し解説する.

(1) については, Harish-Chandra ([10]) がすでに計算している. それは, 帯球関数の満たす微分方程式を決定することから始める. G が実階数 1 の場合, リーマン対称空間上の不変微分作用素は Laplace-Beltrami 作用素 $L_{G/K}$ の多項式であらわされる. そして $\phi_\lambda(g)$ は $L_{G/K}$ の固有関数である. $\Sigma(\mathfrak{a}_p) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ としたとき, $\phi_\lambda(a_t)$ は次の微分方程式を満たすことがわかる ($Y \in \mathfrak{a}_p$ を $\alpha(Y) = 1$ となるようにとり, $a_t = \exp(tY)$ とおく.):

$$\left[z(z-1) \frac{d^2}{dz^2} + \{(a+b+1)z - c\} \frac{d}{dz} + ab \right] u(z) = 0 \quad (2.14)$$

ただし, $z = -(\sinh t)^2$ でしかも

$$\begin{cases} a = (m_\alpha + 2m_{2\alpha} + \lambda_\alpha)/4, \\ b = (m_\alpha + 2m_{2\alpha} - \lambda_\alpha)/4, \\ c = (m_\alpha + m_{2\alpha} + 1)/2 \end{cases} \quad (2.15)$$

である. (2.14) はよく知られているガウスの超幾何微分方程式であり, 単位元 (この場合 $t = 0$ で, $z = 0$ が対応している) で正則な解は $F(a, b, c; z)$ の定数倍しかなく, しかも $\phi_\lambda(e) = 1$ であるから, 結局,

$$\phi_\lambda(a_t) = F(a, b, c; -(\sinh t)^2)$$

を得る. 一方では, 超幾何関数の接続公式

$$\begin{aligned} F(a, b, c; z) = & \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} |z|^{-a} F(a, a-c+1, a-b+1; 1/z) \\ & + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} |z|^{-b} F(b, b-c+1, b-a+1; 1/z) \end{aligned} \quad (2.16)$$

が成り立つ. この等式を使って, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{2at} \phi_\lambda(a_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (2 \sinh t)^{2a} \phi_\lambda(a_t)$ を計算することで, $c(\lambda)$ が (2.12) の右辺になることを示せる. このようにして, 実階数が 1 の場合には, $c(\lambda)$ の積分表示 (2.2) を使わなくても計算できる.

(1) についてのもう一つの方法は (2.2) を直接計算してしまうことである. この方法は Helgason ([11]) と Schiffman ([27]) にあるが, どちらが優先しているのかわからない. $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_p)_0^+$ をとる. $m_{2\alpha} \neq 0$ の場合を取り扱うことにする ($m_{2\alpha} = 0$ の場合はより簡単である). $B(\cdot, \cdot)$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式, $Z \in \mathfrak{g}$ に対して, $Q(Z) = -\langle \alpha, \alpha \rangle B(Z, \theta Z)$ とおく. ここで, θ は $\mathfrak{g}$ の Cartan involution である. $\mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathfrak{g}_{-2\alpha}$ から $\bar{N}$ への指数写像 $X + Y \rightarrow \exp(X + Y)$ は微分同型になるが,

$$e^{\lambda(H(\exp(X+Y)))} = \left[\left(1 + \frac{1}{2}Q(X)\right)^2 + 2Q(Y) \right]^{\lambda_\alpha/4} \quad (X \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, Y \in \mathfrak{g}_{-2\alpha}) \quad (2.17)$$

が成り立つ. この式の証明は, $X \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, Y \in \mathfrak{g}_{-2\alpha}$ を $X \neq 0, Y \neq 0$ のようにとれば, $X, Y, \theta(X), \theta(Y)$ で生成されるリー環が $\mathfrak{su}(2, 1)$ に同型になることを使い, $SU(2, 1)$ の場合の岩沢分解の計算に帰着させることで成し遂げられる. (2.17) から,

$$c(\lambda) = \int_{\mathfrak{g}_{-\alpha} \times \mathfrak{g}_{-2\alpha}} \left[\left(1 + \frac{1}{2}Q(X)\right)^2 + 2Q(Y) \right]^{-\frac{1}{4}(\lambda_\alpha + m_\alpha + 2m_{2\alpha})} dX dY \quad (2.18)$$

を得る．ここで， dX, dY はそれぞれユークリッド空間 $\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha}$ の普通の測度である．さらに $Q(X), Q(Y)$ はそれぞれ $\mathfrak{g}_{-\alpha} \simeq \mathbf{R}^{m_\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha} \simeq \mathbf{R}^{m_{2\alpha}}$ の正定値 2 次形式である．(2.18) の右辺は零でない定数倍を除いて

$$\int_0^\infty \int_0^\infty t^{m_\alpha-1} u^{m_{2\alpha}-1} ((1+t^2) + u^2)^{-\frac{1}{4}(\lambda_\alpha + m_\alpha + 2m_{2\alpha})} dt du$$

に等しく，この定積分はガンマ関数で表すことができる．このようにして $c(\lambda)$ が計算される．

(2) については，intertwining 作用素の理論として整理されている．これもやはり，Helgason ([11]) と Schiffman ([27]) にある．また，Gindikin-Karpelevich の公式と intertwining 作用素の理論との関連についての歴史的背景に関しては Knapp の解説 ([14]) が参考になる．一応超関数論に基づく議論をするために，次の空間を導入することから始める：

$$\mathcal{B}(G/P; L_\lambda) = \{f(g) \in \mathcal{B}(G) \mid f(gman) = a^{\lambda-\rho} f(g) \ (\forall g \in G, m \in M, a \in A_p, n \in N)\} \quad (2.19)$$

ここで $P = MA_p N$ は G の極小放物型部分群であり， $\mathcal{B}(G)$ は G 上の超関数の空間である． $g \in G$ と $f \in \mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ に対して $\pi(g)f(g') = f(g^{-1}g')$ で $\pi(g)f$ を定義すれば， $\pi(g)f \in \mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ はあきらかなので， π は G の表現を定義する．

$\mathcal{B}(G/P; L_{w\lambda})$ ($w \in W$) の間の intertwining 作用素について復習する．任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して， $\mathfrak{a}_{p,c}^*(n) = \{\lambda \in \mathfrak{a}_{p,c}^* \mid \operatorname{rmRe}(\mu_i(\lambda - \rho)) > n (1 \leq i \leq r)\}$ とおく． λ が $\lambda + \rho \in -\mathfrak{a}_{p,c}^*(0)$ のとき，

$$A(\lambda, w) : \mathcal{B}(G/P; L_\lambda) \longrightarrow \mathcal{B}(G/P; L_{w\lambda})$$

を定義する． $f(g) \in \mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ が C^∞ 関数のとき，

$$(A(\lambda, w)f)(g) = \int_{\bar{N}_w} f(g\bar{w}\bar{n}_w) d\bar{n}_w$$

とおく．ただし $\bar{N}_w = \bar{N} \cap \bar{w}^{-1}N\bar{w}$ であり， $d\bar{n}_w$ は $\bar{N}_w$ 上の不変測度で

$$\int_{\bar{N}_w} \exp\{-2\rho(H(\bar{n}_w))\} d\bar{n}_w = 1$$

で正規化されたものである． $\delta(kM)$ を台が eM にある K/M 上のデルタ関数として， $\delta_\lambda(g) = \delta(\kappa(g)M) \exp\{(\lambda - \rho)(H(g))\}$ とおく． $\delta_\lambda(g) \in \mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ である．このとき， $F_{\delta_\lambda, w} = A(\lambda, w)\delta_\lambda$ は定義できて

$$F_{\delta_\lambda, w}(m_1 a_1 n_1 g m_2 a_2 n_2) = F_{\delta_\lambda, w}(g) \exp\{(\lambda + \rho)(\log a_1) + (w\lambda - \rho)(\log a_2)\} \quad (\forall g \in G, m_i \in M, a_i \in A_p, n_i \in N) \quad (2.20)$$

が成り立つ．逆に，(2.20) と同じ条件をみたす超関数は $F_{\delta_\lambda, w}$ の定数倍しか存在しないこともわかる． λ について $F_{\delta_\lambda, w}$ を解析接続することによって， $\lambda \in \mathbb{Y}$ であれば¹， $F_{\delta_\lambda, w}$ は定義できて，任意の $f(g) \in \mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ に対して，

$$A(\lambda, w)f = \int_K f(k)\tau(k)F_{\delta_\lambda, w} dk$$

$$\mathbb{Y} = \left\{ \mu \in \mathfrak{a}_{p,c} \mid \left| \frac{2\langle \mu, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right| \notin \mathbb{Z} \quad (\forall \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_p)) \right\}$$

とおけば,

$$A(\lambda, w) : \mathcal{B}(G/P; L_\lambda) \longrightarrow \mathcal{B}(G/P; L_{w\lambda})$$

は G -同変準同型である.

$w, w' \in W$ に対して,

$$A(\lambda, ww') = A(w, w'\lambda) \circ A(w', \lambda) \quad (2.21)$$

が成り立つ. $h_\lambda(g) = e^{(\lambda-\rho)(H(g))}$ とおくと, $h_\lambda(kgman) = a^{\lambda-\rho}$ ($k \in K, g \in G, m \in M, a \in A_p, n \in N$) でしかも $h_\lambda(e) = 1$ が成り立つ. さらに, 左 K -不変な $\mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ の元は $h_\lambda(g)$ の定数倍しかない. したがって, $\forall w \in W$ に対して, $A(\lambda, w)h_\lambda$ は左 K -不変な $\mathcal{B}(G/P; L_{w\lambda})$ の元になるので, $h_{w\lambda}$ の定数倍になり,

$$A(\lambda, w)h_\lambda = c_{\lambda, w}h_{w\lambda} \quad (2.22)$$

となる定数 $c_{\lambda, w}$ が存在することがわかる. (2.21) と (2.22) より,

$$c_{\lambda, ww'} = c_{w'\lambda, w}c_{\lambda, w'} \quad (\forall w, w' \in W) \quad (2.23)$$

が成り立つ. また, $w^* \in W$ で $w^*(\Sigma(\mathfrak{a}_p)^+) \cap \Sigma(\mathfrak{a}_p)^+ = \emptyset$ となるものがただひとつ存在するが, $\bar{N}_{w^*} = \bar{N}$ になり, また

$$A(\lambda, w^*)h_\lambda(e) = \int_{\bar{N}} e^{(\lambda-\rho)(H(\bar{n}))} d\bar{n}$$

だから,

$$c_{\lambda, w^*} = c(-\lambda)$$

がわかる. 一方では, $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_p)$ に対する $\mathfrak{a}_p$ の鏡映を s_α で表すことにすると, α が単純ルートするとき,

$$c_{\lambda, s_\alpha} = c_\alpha(-\lambda)$$

もわかる. この式と (2.21), (2.23) をあわせて, $c(\lambda)$ の積公式 (2.13) を得る.

3 対称空間

3.1 半単純リー環の対合同型

$\mathfrak{g}$ を半単純リー環とする. σ は $\mathfrak{g}$ のベクトル空間としての線形自己同型とする. $\sigma([X, Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)]$ ($\forall X, Y \in \mathfrak{g}$) が成り立つとき, σ を $\mathfrak{g}$ のリー自己同型という. $\mathfrak{g}$ の自己同型全体の集合を $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ とする. $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ は $GL(\mathfrak{g})$ の閉部分群であるが, 一般には連結ではない. $\text{Int}(\mathfrak{g})$ を $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ の単位元を含む連結成分とする.

$\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ が $\sigma^2 = I_{\mathfrak{g}}$ を満たすとき, 対合同型であるという. $\sigma (\neq I_{\mathfrak{g}})$ が対合同型であれば半単純であり, 固有値は ± 1 である. $\mathfrak{g}^\sigma = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\}$, $\mathfrak{g}^{-\sigma} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\}$ とおけば, $\mathfrak{g}^\sigma$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー環であり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\sigma + \mathfrak{g}^{-\sigma}$ は直和分解である. これは σ に付随する $\mathfrak{g}$ の直和分解といい, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)$ を半単純対称対という.

これから $\mathfrak{g}$ は非コンパクト型と仮定する. 以前に述べたように, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をカルタン分解とすると, $\theta(X + Y) = X - Y$ ($\forall X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{p}$) で $\mathfrak{g}$ の線形自己同型を定義す

れば, リー自己同型になる. θ を $\mathfrak{g}$ の対合同型になる. これをカルタン対合同型という. $\mathfrak{g}^\theta = \mathfrak{k}, \mathfrak{g}^{-\theta} = \mathfrak{p}$ である. 対合同型はカルタン対合同型以外にもある. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ をリーマン対称対という.

σ を $\mathfrak{g}$ の自明でない対合同型とする. このとき, $\mathfrak{g}$ のカルタン対合 θ で $\sigma\theta = \theta\sigma$ となるものが存在する. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を θ に付随するカルタン分解, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\sigma + \mathfrak{g}^{-\sigma}$ を σ に付随する $\mathfrak{g}$ の直和分解とする. $\sigma\theta$ も $\mathfrak{g}$ の対合同型になるが, $\mathfrak{g}^{\sigma\theta} = \mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{g}^\theta + \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\theta}$, $\mathfrak{g}^{-\sigma\theta} = \mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{g}^{-\theta} + \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^\theta$ になる. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\sigma\theta})$ は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)$ の同伴対称対といい, しばしば $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^a$ と書く. また, $\mathfrak{g}_c$ を $\mathfrak{g}$ の複素化として, σ と θ を以下のようにして $\mathfrak{g}_c$ の対合同型に拡張する.

$$\theta(X + \sqrt{-1}Y) = \theta(X) + \sqrt{-1}\theta(Y), \quad \sigma(X + \sqrt{-1}Y) = \sigma(X) + \sqrt{-1}\sigma(Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

そして

$$\mathfrak{g}^d = \mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{g}^\theta + \sqrt{-1}\mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{g}^{-\theta} + \sqrt{-1}\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^\theta + \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\theta}$$

とおくと, $\mathfrak{g}^d$ は $\mathfrak{g}_c$ の実型であり, σ は $\mathfrak{g}^d$ のカルタン対合同型である. また

$$(\mathfrak{g}^d)^\theta = \mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{g}^\theta + \sqrt{-1}\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^\theta, \quad (\mathfrak{g}^d)^{-\theta} = \mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{g}^{-\theta} + \sqrt{-1}\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\theta}$$

が成り立つ. $(\mathfrak{g}^d, (\mathfrak{g}^d)^\theta)$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)$ の双対といい, しばしば $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^d$ と書く.

$((\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^a)^a = ((\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^d)^d = (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)$ が成り立つことは明らか. $((\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^a)^d$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^{ad}$ で, $((\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^d)^a$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^{da}$ で表すことにする. すると, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^{ada} = (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^{dad}$ が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccc} (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma) & \xrightarrow{\text{associated}} & (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^a & \xrightarrow{\text{dual}} & (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^{ad} \\ \downarrow \text{dual} & & & & \downarrow \text{associated} \\ (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^d & \xrightarrow{\text{associated}} & (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^{da} & \xrightarrow{\text{dual}} & (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)^{dad} \end{array}$$

3.2 半単純対称空間

$\mathfrak{g}$ を非コンパクト型実半単純リー環, G を連結な線形リー群でそのリー環が $\mathfrak{g}$ になるものとする. $\mathfrak{g}$ の対合同型 σ が G の対合同型に持ち上がるとする. つまり, 同じ文字 σ で表すが, σ は位数 2 の G の群自己同型で, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\frac{d}{dt} \text{Ad}(\sigma(\exp(tX)))|_{t=0} = \text{ad}(\sigma(X))$ が成り立つものとする.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を σ と整合する $\mathfrak{g}$ のカルタン分解とする. つまり, $\sigma(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}, \sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ が成り立つとする. θ を対応するカルタン対合同型であれば, $\sigma\theta = \theta\sigma$ が成り立つ. 習慣にしたがって, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\sigma, \mathfrak{q} = \mathfrak{g}^{-\sigma}$ とおく. K を $\mathfrak{k}$ に対応する G の解析的部分群とする. また $G^\sigma = \{g \in G | \sigma(g) = g\}$ とおく. G^σ は必ずしも連結ではない. G_0^σ をその単位元を含む連結成分とする. G_0^σ は $\mathfrak{h}$ に対応する G の解析的部分群である. H を $G_0^\sigma \subseteq H \subseteq G^\sigma$ である G の部分群とする. G^σ/G_0^σ は有限群なので, H の選び方は高々有限である. G/H の形の等質空間を半単純対称空間と呼ぶことにする. 対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の双対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^d$ を $(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{h}^d)$ と書き, $\mathfrak{k}^d$ を $\mathfrak{g}^d$ の極大コンパクト部分リー環とする. G^d をリー環が $\mathfrak{g}^d$ である連結な線形リー群として, K^d を $\mathfrak{k}^d$ をリー環にもつ G^d の極大コンパクトリー群とする. このとき G^d/K^d はリーマン対称空間である. G^d/K^d を G/H のリーマン型と呼ぶことにする.

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分空間とする. $\mathfrak{a}$ もまた $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ と同様に複素半単純リー環のカルタン部分環のような役割を果たす. $\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の双対空間とする. $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対して,

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g} | [H, X] = \alpha(H)X \ (\forall H \in \mathfrak{a})\}$$

とおく. $\Sigma(\mathfrak{a}_p)$ と同様に

$$\Sigma(\mathfrak{a}) = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* | \alpha \neq 0, \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$$

はルート系になる. そして $\mathfrak{a}$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系という. 各ルート $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})$ に対して, $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ を α に属するルート空間という. $\sigma\theta$ は $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ を不変にするので,

$$\mathfrak{g}^\pm(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) | \sigma\theta X = \pm X\}$$

とおくと,

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \mathfrak{g}^+(\mathfrak{a}, \alpha) + \mathfrak{g}^-(\mathfrak{a}, \alpha)$$

となる. $m_\alpha^\pm = \dim \mathfrak{g}^\pm(\mathfrak{a}, \alpha)$ とおく. $\dim \mathfrak{a}$ を対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の実階数 (split rank) という. 実階数が 1 であるものは一般の対称対の構成要素であり重要である. それらを表にまとめる.

Table: Symmetric Pairs of Split Rank 1

Type	$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ $(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{h}^d)$	$\Sigma(j)$	$\begin{pmatrix} m_\alpha^+ & m_{2\alpha}^+ \\ m_\alpha^- & m_{2\alpha}^- \end{pmatrix}$
I_1	$(\mathfrak{so}(p+1, q+1), \mathfrak{so}(p+1, q))$	A_1^{p+q}	
I_1^d	$(\mathfrak{so}(p+q+1, 1), \mathfrak{so}(p+1) \oplus \mathfrak{so}(q, 1))$	$\begin{cases} B_{(p,q)+1}^{[p-q],1} & (p \neq q) \\ D_{p+1}^1 & (p = q) \end{cases}$	$\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$
I_2	$(\mathfrak{su}(p+1, q+1), \mathfrak{su}(p+1, q) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$BC_1^{2(p+q),1}$	$\begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 2q & 0 \end{pmatrix}$
I_2^d	$(\mathfrak{su}(p+q+1, 1), \mathfrak{su}(p+1) \oplus \mathfrak{su}(q, 1) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$BC_{(p,q)+1}^{2[p-q],2,1}$	$\begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 2q & 0 \end{pmatrix}$
I_3	$(\mathfrak{sp}(p+1, q+1), \mathfrak{sp}(p+1, q) \oplus \mathfrak{sp}(1))$	$BC_1^{4(p+q),3}$	$\begin{pmatrix} 4p & 3 \\ 4q & 0 \end{pmatrix}$
I_3^d	$(\mathfrak{sp}(p+q+1, 1), \mathfrak{sp}(p+1) \oplus \mathfrak{sp}(q, 1))$	$BC_{(p,q)+1}^{4[p-q],4,3}$	$\begin{pmatrix} 4p & 3 \\ 4q & 0 \end{pmatrix}$
I_4^1	$(\mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{so}(9))$	$BC_1^{8,7}$	$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
I_4^2	$(\mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{so}(8, 1))$	$BC_1^{8,7}$	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$
II_1	$(\mathfrak{sl}(m+2, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(m+1, \mathbb{R}))$	$BC_1^{2m,1}$	$\begin{pmatrix} m & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$
II_1^d	$(\mathfrak{su}(m+1, 1), \mathfrak{so}(m+1, 1))$	A_{m+1}^1	$\begin{pmatrix} m & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$
II_2	$(\mathfrak{sp}(m+2, \mathbb{R}), \mathfrak{sp}(m+1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sp}(1, \mathbb{R}))$	$BC_1^{4m,3}$	$\begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}$
II_2^d	$(\mathfrak{sp}(m+1, 1), \mathfrak{u}(m+1, 1))$	$C_{m+2}^{1,1}$	$\begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}$
II_3	$(\mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{so}(5, 4))$	$BC_1^{8,7}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
II_3^d	$(\mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{sp}(2, 1) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$F_4^{1,1}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
III_1	$(\mathfrak{so}(m+2, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(m+1, \mathbb{C}))$	$A_1^m + A_1^m$	
III_1^d	$\mathfrak{so}(m+1, 1)$	$\begin{cases} B_{\frac{m+1}{2}}^2 & m : \text{odd} \\ D_{\frac{m}{2}}^2 & m : \text{even} \end{cases}$	$\begin{pmatrix} m & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}$
III_2	$(\mathfrak{sl}(m+2, \mathbb{C}), \mathfrak{gl}(m+1, \mathbb{C}))$	$BC_1^{2m,1} + BC_1^{2m,1}$	$\begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 2m & 1 \end{pmatrix}$
III_2^d	$\mathfrak{su}(m+1, 1)$	A_{m+1}^2	$\begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 2m & 1 \end{pmatrix}$
III_3	$(\mathfrak{sp}(m+2, \mathbb{C}), \mathfrak{sp}(m+1, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sp}(1, \mathbb{C}))$	$BC_1^{4m,3} + BC_1^{4m+3}$	$\begin{pmatrix} 4m & 3 \\ 4m & 3 \end{pmatrix}$
III_3^d	$\mathfrak{sp}(m+1, 1)$	$C_{m+1}^{2,2}$	$\begin{pmatrix} 4m & 3 \\ 4m & 3 \end{pmatrix}$

III ₄	($\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}}, \mathfrak{so}(9, \mathbb{C})$)	$BC_1^{8,7} + BC_1^{8,7}$	$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$
III ₄ ^d	$\mathfrak{f}_{4(-20)}$	$F_4^{2,2}$	$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$
IV ₁	($\mathfrak{so}(m+2, \mathbb{H}), \mathfrak{so}(m+1, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{so}(2)$)	$BC_2^{2m,1,0}$	$\begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 2m & 0 \end{pmatrix}$
IV ₁ ^d	($\mathfrak{so}(2(m+1), 2), \mathfrak{u}(m+1, 1)$)	$\begin{cases} BC_{\frac{m+1}{2}}^{4,4,1} & m : \text{odd} \\ C_{\frac{m}{2}+1}^{4,1} & m : \text{even} \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 2m & 0 \end{pmatrix}$
IV ₂	($\mathfrak{sl}(m+2, \mathbb{H}), \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sl}(1, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$)	$BC_2^{4m,2,1}$	$\begin{pmatrix} 4m & 3 \\ 4m & 1 \end{pmatrix}$
IV ₂ ^d	($\mathfrak{su}(2(m+1), 2), \mathfrak{sp}(m+1, 1)$)	A_{m+1}^4	$\begin{pmatrix} 4m & 3 \\ 4m & 1 \end{pmatrix}$
IV ₃	($\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{so}(9, 1) \oplus \mathbb{R}$)	$BC_2^{8,6,1}$	$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$
IV ₃ ^d	($\mathfrak{f}_{6(-14)}, \mathfrak{f}_{4(-20)}$)	A_2^8	$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$
V ₁	($\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}), \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$)	A_2^2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
V ₂	($\mathfrak{su}(3, 3), \mathfrak{sp}(3, \mathbb{R})$)	A_2^4	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
V ₂ ^d	($\mathfrak{sl}(3, \mathbb{H}), \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(2)$)	$C_3^{2,1}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
V ₃	($\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{f}_{4(-20)}$)	A_2^8	$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$
V ₃ ^d	($\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{sl}(3, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{su}(2)$)	$F_4^{2,1}$	$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

3.3 K_ε 型対称空間

リーマン対称空間とルート系から簡単に構成できる半単純対称空間について解説する。

まず Σ をルート系とする。 Σ から $\{1, -1\}$ への写像 ε は次の条件を満たすとき Σ の符号あるいは符号写像という。

$$(g.1) \quad \varepsilon(\alpha) = \varepsilon(-\alpha) \quad (\forall \alpha \in \Sigma)$$

$$(g.2) \quad \varepsilon(\alpha + \beta) = \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) \quad (\forall \alpha, \beta \in \Sigma \text{ しかも } \alpha + \beta \in \Sigma)$$

$\mathfrak{g}$ を実半単純リー環、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をそのカルタン分解、 θ をそれに対応するカルタン対合同型とする。 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, m, \Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}), G, K$ など以前のように定義する。 ε を $\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ の符号とする。 このとき、 $\mathfrak{g}$ の線形変換 θ_ε を次のようにして定義する。

$$(h.1) \quad \theta_\varepsilon(X) = \varepsilon(\alpha)\theta(X) \quad (\forall \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}), X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \alpha))$$

$$(h.2) \quad \theta_\varepsilon(X) = \theta(X) \quad (\forall X \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} + m)$$

θ_ε は θ と可換な $\mathfrak{g}$ の対合同型になるのは明らかである。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_\varepsilon + \mathfrak{p}_\varepsilon$ を対応する直和分解である。 一方では、直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_\varepsilon + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} + n$ は岩沢分解から証明できる。 $\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})_\varepsilon = \{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) \mid \varepsilon(\alpha) = 1\}$ とおく。 $\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})_\varepsilon$ はルート系になる。

G を $\mathfrak{g}$ をリー環にもつ連結線形リー群で、 θ_ε は G の対合同型 (それをまた θ_ε で表す) に持ち上がると仮定する。 $K_\varepsilon = (G^{\theta_\varepsilon})_0 M$ とおく。 (ここで、 $(G^{\theta_\varepsilon})_0$ は G^{θ_ε} の単位成分である。 M は $(G^{\theta_\varepsilon})_0$ を正規化している。) $\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ のワイル群 W は M^*/M と同一視できたが、 $M_\varepsilon^* = \{k \in K_\varepsilon \mid \text{Ad}(k)\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\}$ として、 $W_\varepsilon = M_\varepsilon^*/M$ とおく。 W_ε は $\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})_\varepsilon$ のワイル群とみなせる。

K_ε の関係する G の分解をいくつかあげる。

カルタン分解の類似は $G = KA_{\mathfrak{p}}K_\varepsilon$ である。 そして、 $k_i \in K, a_i \in A_{\mathfrak{p}}, k'_i \in K_\varepsilon (i = 1, 2)$ に対して $k_1 a_1 k'_1 = k_2 a_2 k'_2$ が成り立てば、 $k_1^{-1} k_2 = k'_1 k_2'^{-1} \in K \cap K_\varepsilon, a_1 = (k_1^{-1} k_2) a_2 (k_1^{-1} k_2)^{-1}$ となる。 $A_{\mathfrak{p}, \varepsilon}^+ = \{Y \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \mid \alpha(Y) > 0 \quad (\forall \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})_\varepsilon \cap \Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})^+)\}$ とおき、 $A_{\mathfrak{p}, \varepsilon}^+ = \exp \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}, \varepsilon}^+$ とおく。 すると $G = KA_{\mathfrak{p}, \varepsilon}^+ K_\varepsilon$ が成り立つ。 また、 $o = eK_\varepsilon$ とおくと、 $(kM, a) \mapsto ka \cdot o (kM \in K/M, a \in A_{\mathfrak{p}, \varepsilon}^+)$ は $K/M \times A_{\mathfrak{p}, \varepsilon}^+$ から G/K_ε の密な開集合への解析同型を与える。

$W_\varepsilon \setminus W$ の代表元を $w_1 = 1, w_2, \dots, w_d$ ($d = |W|/|W_\varepsilon|$) として, さらに $\bar{w}_i \in M^*$ を $\bar{w}_i M = w_i$ となるように取る ($1 \leq i \leq d$). すると, 次が成り立つ.

$$(k.1) \quad K_\varepsilon \bar{w}_i A_p N \cap K_\varepsilon \bar{w}_j A_p N = \emptyset \quad (i \neq j)$$

(k.2) $i = 1, 2, \dots, d$ に対して $K_\varepsilon \bar{w}_i A_p N$ は G の開集合である.

(k.3) $g \in K_\varepsilon \bar{w}_i A_p N$ を $g = k \bar{w}_i a n$ ($k \in K_\varepsilon, a \in A_p, n \in N$) と表示したとき, k, a, n は一意に定まる.

(k.4) $G \setminus \bigcup_{i=1}^d K_\varepsilon \bar{w}_i A_p N$ は次元の下がった集合である.

この分解はもう少し詳しく調べられている. $P = MA_p N$ は G の放物型部分群といわれ, G/P はコンパクト多様体になり, K_ε が左から作用しているが, この K_ε の作用に関する G/P の軌道は高々有限個である. このようにして得られた G/P の軌道分解を松木分解という (cf. [18]).

3.4 対称空間の例

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_\varepsilon)$ と同型な半単純対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を $\mathfrak{k}_\varepsilon$ 型と呼ぶことにする. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が $\mathfrak{k}_\varepsilon$ 型であれば, 自己双対である. つまり, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^d \simeq (\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が成り立つ. この場合さらに, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^{ada} \simeq (\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^{ad}$ も成り立つ.

$\mathfrak{k}_\varepsilon$ 型の対称対の例をあげる.

Example 3.1. $A_{l,j}^1$ ($2j \leq l+1$): $(\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R}), \mathfrak{so}(j, l+1-j))$

この場合, リーマン対称対 $(\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R}), \mathfrak{so}(l+1))$ から出発する. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$ とおく. $\theta(X) = -{}^t X$ ($X \in \mathfrak{g}$) とおけば, θ はカルタン対合同型である. $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(l+1)$ であり, $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid {}^t X = X\}$ である. $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ として対角行列からなる $\mathfrak{p}$ の部分空間をとる. $D(t), X_{ij}$ などは以前に定義したものとする. $G = SL(l+1, \mathbb{R})$ すればその極大コンパクト部分群は $K = SO(l+1)$ である. ルート系は $\Sigma = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq l+1\}$ である. ただし, e_i は $D(t_1, \dots, t_{l+1})$ に t_i を対応させる $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ 上の線形形式である. 以前のように $\alpha_{ij} = e_i - e_j$ とおく. Σ の符号 ε を $1 \leq i < k \leq j$ または $j < i < k \leq l+1$ のとき $\varepsilon(\pm\alpha_{ik}) = 1$ とし, $1 \leq i \leq j < k \leq l+1$ のとき $\varepsilon(\pm\alpha_{ik}) = -1$ として定義する. すると, $\theta_\varepsilon(X) = -I_{j, l+1-j} {}^t X I_{j, l+1-j}$ ($\forall X \in \mathfrak{g}$) になり, したがって $\mathfrak{k}_\varepsilon = \mathfrak{so}(j, l+1-j)$ がわかる. この場合 $(\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R}), \mathfrak{so}(j, l+1-j))$ は自己双対である. 一方, 同伴対称対を構成する. $\theta\theta_\varepsilon(X) = -I_{j, l+1-j} X I_{j, l+1-j}$ なので, $\mathfrak{g}^{\theta\theta_\varepsilon} = \mathfrak{sl}(j, \mathbb{R}) + \mathfrak{sl}(l+1-j, \mathbb{R}) + \mathbb{R}$ がわかる. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\theta\theta_\varepsilon})$ の双対を決定する. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_\varepsilon)^{ad} = (\mathfrak{g}^{ad}, (\mathfrak{k}_\varepsilon)^{ad})$ とおき, $\mathfrak{g}^{ad}$ の極大コンパクト部分環を $\mathfrak{k}^{ad}$ とおく. $\mathfrak{k}^{ad}$ の複素化と $\mathfrak{g}^{\theta\theta_\varepsilon}$ の複素化 $\mathfrak{sl}(j, \mathbb{C}) + \mathfrak{sl}(l+1-j, \mathbb{C}) + \mathbb{C}$ は同型なので, $\mathfrak{k}^{ad} \simeq \mathfrak{su}(j) + \mathfrak{su}(l+1-j) + \sqrt{-1}\mathbb{R}$ になる. したがって, $\mathfrak{g}^{ad} \simeq \mathfrak{su}(j, l+1-j)$ がわかる. また, $(\mathfrak{k}_\varepsilon)^{ad}$ の複素化は $\mathfrak{k}$ の複素化 $\mathfrak{so}(l+1, \mathbb{C})$ と同型だから, $(\mathfrak{k}_\varepsilon)^{ad}$ は $\mathfrak{g}^{ad} \simeq \mathfrak{su}(j, l+1-j)$ の部分リ一環であることも考慮すれば, $(\mathfrak{k}_\varepsilon)^{ad} \simeq \mathfrak{so}(j, l+1-j)$ がわかる. 以上から, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_\varepsilon)^{ad} \simeq (\mathfrak{su}(j, l+1-j), \mathfrak{so}(j, l+1-j))$ である.

$$\begin{aligned} (\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R}), \mathfrak{so}(l+1))^a &\simeq (\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(j, \mathbb{R}) + \mathfrak{sl}(l+1-j, \mathbb{R}) + \mathbb{R}), \\ (\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R}), \mathfrak{so}(l+1))^{ad} &\simeq (\mathfrak{su}(j, l+1-j), \mathfrak{so}(j, l+1-j)) \end{aligned}$$

Example 3.2. $C_{l,A}^{2,1} : (\mathfrak{su}(l, l), \mathfrak{sl}(l, \mathbb{C}) + \mathbb{R})$

この場合,

$$(\mathfrak{su}(l, l), \mathfrak{sl}(l, \mathbb{C}) + \mathbb{R}) \simeq (\mathfrak{su}(l, l), \mathfrak{sl}(l, \mathbb{C}) + \mathbb{R})^a \simeq (\mathfrak{su}(l, l), \mathfrak{sl}(l, \mathbb{C}) + \mathbb{R})^d$$

Example 3.3. $D_{l,A}^1 : (\mathfrak{so}(l, l), \mathfrak{so}(l, \mathbb{C}))$

この場合,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{so}(l, l), \mathfrak{so}(l, \mathbb{C}))^a &\simeq (\mathfrak{so}(l, l), \mathfrak{sl}(l, \mathbb{R}) + \mathbb{R}) \\ (\mathfrak{so}(l, l), \mathfrak{so}(l, \mathbb{C}))^{ad} &\simeq (\mathfrak{so}^*(2l), \mathfrak{so}(l, \mathbb{C})) \end{aligned}$$

Example 3.4. $E_{6,D}^1 : (\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sp}(2, 2))$

この場合,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sp}(2, 2))^a &\simeq (\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{so}(5, 5) + \mathbb{R}) \\ (\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sp}(2, 2))^{ad} &\simeq (\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{sp}(2, 2)) \end{aligned}$$

4 G/K_ε 型対称空間の c -関数

4.1 G/K_ε 上の不変微分作用素の同時固有関数

一般の対称空間の c -関数の定義は後回しにして、 G/K_ε 型対称空間の c -関数を扱うことにする。 G/K_ε のコンパクト化はいくつかありうる。リーマン対称空間 G/K の場合、佐武コンパクト化の一種、あるいは Furstenberg コンパクト化といわれるものが表現論との関係では重要であり、[12] で微分方程式の境界値を取るのに使用され、[20] において G 作用を許すコンパクト多様体でその開部分集合としてリーマン対称空間を含むものが構成されている。 G/K_ε の場合、[20] の方法と同じようにして、与えられたリーマン対称空間に対していろいろな ε に対応する G/K_ε を開集合として含む G 作用をもつコンパクト多様体 X_G を構成できる。 $\iota_\varepsilon : G/K_\varepsilon \rightarrow X_G$ を自然な G -埋め込みとして、 $X_\varepsilon = \iota_\varepsilon(G/K_\varepsilon)$ とする。その閉包 $\overline{X_\varepsilon}$ にはいくつかの G -軌道があるが、その中でコンパクトなものは W/W_ε の個数だけ存在する。それらを、 $B_{\varepsilon,j}$ ($j = 1, 2, \dots, d = \sharp(W/W_\varepsilon)$) とする。すべて G/P と G 同型である。 $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ を G/K_ε 上の不変微分作用素環とすれば、 $\forall D \in \mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ は X_G 上の微分作用素に自然に拡張できる。

$\mathcal{B}(G/K_\varepsilon)$ を G/K_ε 上の超関数全体の空間とする。 $\mathcal{B}(G/K_\varepsilon)$ は $\{u \in \mathcal{B}(G) \mid u(gk) = u(g) \ (\forall k \in K_\varepsilon)\}$ と同一視できるので、 $\mathcal{B}(G)$ の部分 G -加群とみなせる。同時固有関数の空間は

$$\mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathfrak{M}_{\chi_\lambda}) = \{u \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon) \mid Du = \gamma_\varepsilon(D)(\lambda)u \ (\forall D \in \mathbb{D}(G/K_\varepsilon))\}$$

である。任意の $u \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathfrak{M}_{\chi_\lambda})$ に対して、それぞれの境界 $B_{\varepsilon,j}$ への特性多重指数 $s(w\lambda)$ に関する境界値 $\beta_{\varepsilon,w\lambda}^i(u)$ が定義できる。ここで重要なことは、この境界値を $\mathcal{B}(G/P; L_{w\lambda})$ に属するものとみると G -同変になることである。すなわち、次が成り立つ。

Theorem 4.1. $\lambda \in \mathfrak{a}_{p,c}$ が *generic* のとき、任意の $w \in W$ に対して、写像

$$\beta_{\varepsilon,w\lambda}^i : \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathfrak{M}_{\chi_\lambda}) \rightarrow \mathcal{B}(G/P; L_{w\lambda})$$

は G -同変である。

4.2 Poisson 変換

$\mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ には G が左から作用しておりその作用について G -加群である. $\varphi \in \mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ に対して

$$(\mathcal{P}_\lambda \varphi)(g) = \int_K \varphi(gk) dk$$

で定義される $\mathcal{P}_\lambda \varphi$ を φ の Poisson 積分あるいは Poisson 変換という. ここで, dk は K 上の $\int_K dk = 1$ が成り立つ不変測度である. K はコンパクトなので, Poisson 積分は必ず収束するので, 定義に問題はない. また, $\mathcal{P}_\lambda \varphi$ は K 上の積分だから, 結果として $\mathcal{P}_\lambda \varphi$ は右 K -不変であり, したがって G/K 上の関数と見なせる. 一方では,

$$(\mathcal{P}_\lambda \varphi)(g) = \int_K \varphi(k) \exp(-(\lambda + \rho)H(g^{-1}k)) dk$$

という積分表示も成り立つことがわかる. ここで, $g \in G$ に対して, $g = \kappa(g) \exp(H(g))n(g)$ となる $\kappa(g) \in K, H(g) \in \mathfrak{a}_p, n(g) \in N$ が一意に存在するが, 被積分関数にある $H(g^{-1}k)$ はこのようにして定義したものである.

$\Psi_\lambda(gK, kM) = \exp(-(\lambda + \rho)H(g^{-1}k))$ を Poisson 核という. $G/K \times K/M$ 上の関数と見なせる. 実際, $H(g)$ の定義より, $H((gk_1)^{-1}(km)) = H(g^{-1}k) (\forall g \in G, k, k_1 \in K, m \in M)$ が成り立つからである.

Lemma 4.2. $\Psi_\lambda(gK, kM)$ は第 1 変数に関して $\mathfrak{M}_{\chi_\lambda}$ の解である.

リーマン対称空間上の Laplace-Beltrami 作用素 $L_{G/K}$ は楕円型でしかも $U(\mathfrak{g})$ の Casimir 作用素から来ているので, $\mathfrak{M}_{\chi_\lambda}$ の解は $L_{G/K}$ の固有関数になるので, 特に実解析的になる. したがって, $\mathfrak{M}_{\chi_\lambda}$ の解は実解析的な関数になる.

Poisson 核を定義するのに $\mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ の切片 $h_\lambda(g) = \exp((\lambda - \rho)H(g))$ が重要な役割を果たしている. $h_\lambda(g)$ は次の性質で特徴づけられている.

- (n.1) $h_\lambda(g)$ は左 K -不変である.
- (n.2) $h_\lambda(gman) = h_\lambda(g)e^{(\lambda - \rho)(\log a)} \quad (\forall m \in M, a \in A_p, n \in N)$
- (n.3) $h_\lambda(e) = 1$

一般の K_ε 型対称空間 G/K_ε 上のポアソン核を定義する安易なやり方は次の通りである. まず次のことを思い起こす.

$W_\varepsilon \setminus W$ の代表元を $w_1 = 1, w_2, \dots, w_d$ ($d = |W|/|W_\varepsilon|$) として, さらに $\bar{w}_i \in M^*$ を $\bar{w}_i M = w_i$ となるように取る ($1 \leq i \leq d$). すると, 次が成り立つことはすでに述べている.

- (k.1) $K_\varepsilon \bar{w}_i A_p N \cap K_\varepsilon \bar{w}_j A_p N = \emptyset \quad (i \neq j)$
- (k.2) $i = 1, 2, \dots, d$ に対して $K_\varepsilon \bar{w}_i A_p N$ は G の開集合である.
- (k.3) $g \in K_\varepsilon \bar{w}_i A_p N$ を $g = k \bar{w}_i a n$ ($k \in K_\varepsilon, a \in A_p, n \in N$) と表示したとき, k, a, n は一意に定まる.
- (k.4) $G \setminus \bigcup_{i=1}^d K_\varepsilon \bar{w}_i A_p N$ は次元の下がった集合である.

このことを考慮して, それぞれの $w \in W$ に対して $h_{\varepsilon, \lambda}^w(g)$ を次のようにして定義する.

- (n'.1) $h_{\varepsilon, \lambda}^w(g)$ は左 K_ε -不変である.
- (n'.2) $h_{\varepsilon, \lambda}^w(gman) = h_\lambda(g)e^{(\lambda - \rho)(\log a)} \quad (\forall m \in M, a \in A_p, n \in N)$
- (n'.3) $h_{\varepsilon, \lambda}^w(\bar{w}) = 1$
- (n'.4) $h_{\varepsilon, \lambda}^w(g) = 0 \quad (\forall g \notin K_\varepsilon \bar{w} A_p N)$

ここで $\bar{w} \in M^*$ は $\bar{w}M = w$ となるものである. このようにして定義した関数 $h_{\varepsilon, \lambda}^w(g)$ は G の各点で定義されるのはいいが, どのような関数になるのかは不明である. 例えばすべての $\lambda \in \mathfrak{a}_{p,c}^*$ に対して連続になるのか, あるいは解析的なのか, といったことがわからないので, $h_{\varepsilon, \lambda}^w(g)$ が $\mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ の切片になるかどうかという疑問に答えられない. しかしながら, G の有限次元表現の内積からできる G 上の関数 $f_{\varepsilon, i}(g)$ ($1 \leq i \leq d$) で左 K_ε 不変で局所座標をとると本質的には多項式になるものが d 個存在し, また λ の 1 次式 $\mu_i(\lambda)$ ($1 \leq i \leq d$) が存在して,

$$h_{\varepsilon, \lambda}^w(g) = \begin{cases} \prod_{i=1}^r |f_{\varepsilon, i}(g)|^{\mu_i(\lambda)} & (\forall g \in K_\varepsilon \bar{w} A_p N) \\ 0 & (\forall g \notin K_\varepsilon \bar{w} A_p N) \end{cases}$$

となるようにできる. さらに, $S_{\varepsilon, i} = \{g \in G \mid f_{\varepsilon, i}(g) = 0\}$ ($1 \leq i \leq r$) とおけば,

$$\bigcup_{i=1}^r S_{\varepsilon, i} = G \setminus \bigcup_{j=1}^d K_\varepsilon \bar{w}_j A_p N$$

が成り立つ. また, $V_+(\mathfrak{a}_{p,c}^*) = \{\lambda \in \mathfrak{a}_{p,c}^* \mid \operatorname{Re}(\mu_i(\lambda)) > 0 \ (i = 1, \dots, r)\}$ は $\mathfrak{a}_{p,c}^*$ の空でない開錐になる. もちろん, ε が自明のとき, $S_{\varepsilon, i} = \emptyset$ ($1 \leq i \leq r$) がわかる. このことから, $\lambda \in V_+(\mathfrak{a}_{p,c}^*)$ であれば, $h_{\varepsilon, \lambda}^w(g)$ は G 上の連続関数である. さらに $h_{\varepsilon, \lambda}^w(g)$ は λ に関して解析接続できて $\mathfrak{a}_{p,c}^*$ 全体の G 上の超関数を値をもつ有理型関数になる. しかし, これらの超関数を値にもつ有理型関数の極の位置やその位数を決定することはそれほど易しくはないようである.

$$\mathcal{B}^{K_\varepsilon}(G/P; L_\lambda) = \{f(g) \in \mathcal{B}(G/P; L_\lambda) \mid f(kg) = f(g) \ (\forall k \in K_\varepsilon)\}$$

とおく. また, どれかひとつの $w \in W$ に対して $h_{\varepsilon, \lambda}^w$ が $\lambda = \lambda_0$ で極になるような $\lambda_0 \in \mathfrak{a}_{p,c}^*$ 全体の集合を Π_ε^+ とし, $\Pi_\varepsilon^- = \{\lambda \in \mathfrak{a}_{p,c}^* \mid -\lambda \in \Pi_\varepsilon^+\}$ とおく.

Theorem 4.3. 任意の $\lambda \in \mathfrak{a}_{p,c}^*$ に対して,

$$\dim \mathcal{B}^{K_\varepsilon}(G/P; L_\lambda) \geq d$$

特に, $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ であれば, $h_{\varepsilon, \lambda}^i$ ($i = 1, \dots, d$) は 1 次独立で $\mathcal{B}^{K_\varepsilon}(G/P; L_\lambda)$ に含まれている. ただし, $h_{\varepsilon, \lambda}^i = h_{\varepsilon, \lambda}^{w_i}$ とした.

以上の準備の下で, G/K_ε 上の Poisson 核を定義する.

Definition 4.4. 任意の $w \in W$ と任意の $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ に対して, $\Psi_{\varepsilon, \lambda}^w(gK_\varepsilon, kM) = h_{\varepsilon, -\lambda}^w(g^{-1}k)$ ($g \in G, k \in K$) を Poisson 核という.

次はリーマン対称空間の場合と同様にして証明できる.

Theorem 4.5. 任意の $w \in W$ に対して, $\Psi_{\varepsilon, \lambda}^w(gK_\varepsilon, kM)$ は第 1 変数に関して $\mathfrak{M}_{\chi_\lambda}$ の解である.

任意の $f(g) \in \mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ に対して,

$$(\mathcal{P}_{\varepsilon, \lambda}^i f)(g) = \int_K f(k) \Psi_{\varepsilon, \lambda}^{w_i}(gK_\varepsilon, kM) dk \quad (4.1)$$

で $\mathcal{P}_{\varepsilon, \lambda}^i f$ を定義する. $\psi(k)$ が K 上の超関数で, 右 M -不変であれば, 以前の連続関数の場合とまったく同じ積分変換公式

$$\int_K \psi(k) dk = \int_K \psi(\kappa(g^{-1}k)) \exp\{-2\rho(H(g^{-1}k))\} dk$$

が成り立つことに注意する. この公式を使うと

$$(\mathcal{P}_{\varepsilon, \lambda}^i f)(g) = \int_K f(gk) \Psi_{\varepsilon, \lambda}^{w_i}(eK_\varepsilon, kM) dk \quad (4.2)$$

が成り立つことがわかる. Theorem 4.5 と式 (4.1) より $(\mathcal{P}_{\varepsilon, \lambda}^i f)$ が G/K_ε 上の関数でしかも $\mathfrak{M}_{\chi_\lambda}$ の解になることがわかり, 式 (4.2) より $\mathcal{P}_{\varepsilon, \lambda}^i$ が $\mathcal{B}(G/P; L_\lambda)$ から $\mathcal{B}(G/K_\varepsilon, \mathfrak{M}_{\chi_\lambda})$ への G -同変写像を与えることがわかる. 注意しなければならないのは, G/K_ε 上の Laplace-Beltrami 作用素は楕円型にならないので, $(\mathcal{P}_{\varepsilon, \lambda}^i f)$ が G/K_ε 上の実解析的関数や C^∞ 関数になるとは限らないことである. この点はリーマン対称空間の場合と事情がかなり異なる.

Definition 4.6. Poisson 変換

$$\mathcal{P}_{\varepsilon, \lambda} : \oplus^d \mathcal{B}(G/P; L_\lambda) \longrightarrow \mathcal{B}(G/K_\varepsilon, \mathfrak{M}_{\chi_\lambda})$$

を

$$\mathcal{P}_{\varepsilon, \lambda}(f_1, \dots, f_d) = \sum_{i=1}^d \mathcal{P}_{\varepsilon, \lambda}^i f_i$$

で定義する.

4.3 G/K_ε 上の帯球関数

リーマン対称空間 G/K 上の帯球関数は不変微分作用素の同時固有関数で, しかも左 K -不変であるものとして特徴づけられる.

それでは G/K_ε 上の帯球関数にあたるものはどう定義すればよいだろうか. もっとも G/K_ε の構造や表現論との関係で重要と思われるものは, 左 K_ε -不変な $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ の同時固有関数である. しかしながら, これ以外に別の符号 ε' に対して左 $K_{\varepsilon'}$ -不変な $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ の同時固有関数も考えられる.

Definition 4.7. G 上の超関数 $\varphi(g)$ は, 次の性質を満たすとき, $(K_{\varepsilon'}, K_\varepsilon)$ -不変帯球関数という.

$$(i) \varphi(k'gk) = \varphi(g) \quad (k' \in K_{\varepsilon'}, g \in G, k \in K_\varepsilon)$$

$$(ii) D\varphi = \chi(D)\varphi \quad \forall D \in \mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$$

ここで χ は $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ から $\mathbb{C}$ への代数準同型である.

より一般にするならば, 次のように定式化できる. σ, σ' を可換な G の対合同型とする. H と H' を G の閉部分群で

$$(G^\sigma)_0 \subseteq H \subseteq G^\sigma, \quad (G^{\sigma'})_0 \subseteq H' \subseteq G^{\sigma'}$$

が成り立つものとする.

Definition 4.8. G 上の超関数 $\varphi(g)$ は、次の性質を満たすとき、 (H', H) -不変帯球関数という。

$$(i) \varphi(h'gh) = \varphi(g) \quad (h' \in H', g \in G, h \in H)$$

$$(ii) D\varphi = \chi(D)\varphi \quad \forall D \in \mathbb{D}(G/H)$$

ここで $\mathbb{D}(G/H)$ は G/H 上の不変微分作用素全体からなる代数で、 χ は $\mathbb{D}(G/H)$ から $\mathbb{C}$ への代数準同型である。

G/K_ε の場合にもどる。

$$\mathcal{S}_{\varepsilon', \varepsilon}(G; \lambda) = \{u \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathfrak{M}_{\chi_\lambda}) \mid \tau(k)u = u \ (\forall k \in K_{\varepsilon'})\}$$

とおく。 $\varepsilon', \varepsilon$ がともに自明な符号のとき、 $\mathcal{S}_{\varepsilon', \varepsilon}(G; \lambda)$ に属する関数は G/K 上の帯球関数 φ_λ の定数倍しかない。

これからは、 $\varepsilon', \varepsilon$ のうちの一方は自明になる場合に限定する。

$$\tilde{\varphi}_{\varepsilon, \lambda}^i(gK) = (\mathcal{P}_\lambda h_{\varepsilon, \lambda}^i)(gK) \quad (1 \leq i \leq d)$$

とおく。当然ながら $\tilde{\varphi}_{\varepsilon, \lambda}^i(gK)$ は実解析的な関数である。また

$$\mathbb{Y}(\varepsilon) = \{\lambda \in \mathbb{Y} \mid \lambda \notin \Pi_\varepsilon^\pm\}$$

とおく。

Theorem 4.9. 任意の $\lambda \in \mathfrak{a}_{p, c}^*$ に対して、 $\dim \mathcal{S}_{\varepsilon, 1}(G; \lambda) = d$ である。特に $\lambda \in \mathbb{Y}(\varepsilon)$ ならば、 $\tilde{\varphi}_{\varepsilon, \lambda}^i(gK)$ ($1 \leq i \leq d$) が $\mathcal{S}_{\varepsilon, 1}(G; \lambda)$ の基底になる。

$$\varphi_{\varepsilon, \lambda}^i(gK_\varepsilon) = (\mathcal{P}_{\varepsilon, \lambda}^i h_\lambda)(gK_\varepsilon) \quad (1 \leq i \leq d)$$

とおく。 $\tilde{\varphi}_{\varepsilon, \lambda}^i(gK)$ と $\varphi_{\varepsilon, \lambda}^i(gK_\varepsilon)$ の積分表示を比較すれば

$$\tilde{\varphi}_{\varepsilon, \lambda}^i(gK) = \varphi_{\varepsilon, -\lambda}^i(g^{-1}K_\varepsilon)$$

が成り立つことがわかる。したがって、 $\varphi \in \mathcal{S}_{\varepsilon, 1}(G; \lambda)$ に対して $\nu\varphi$ を $(\nu\varphi)(g) = \varphi(g^{-1})$ で定義すれば、 ν は $\mathcal{S}_{\varepsilon, 1}(G; \lambda)$ から $\mathcal{S}_{1, \varepsilon}(G; -\lambda)$ への同型写像を与える。

$\mathfrak{M}_{\chi_\lambda} = \mathfrak{M}_{\chi_{w\lambda}} \ (\forall \lambda \in W)$ だから、任意の $w \in W$ に対して

$$\mathcal{S}_{\varepsilon, 1}(G; w\lambda) = \mathcal{S}_{\varepsilon, 1}(G; \lambda)$$

が成り立つ。このことから次が導かれる。

Theorem 4.10. $\tilde{\varphi}_{\varepsilon, \lambda}(gK) = (\tilde{\varphi}_{\varepsilon, \lambda}^1(gK), \dots, \tilde{\varphi}_{\varepsilon, \lambda}^d(gK))$, $\varphi_{\varepsilon, \lambda}(gK_\varepsilon) = (\varphi_{\varepsilon, \lambda}^1(gK_\varepsilon), \dots, \varphi_{\varepsilon, \lambda}^d(gK_\varepsilon))$
とおく。 $\lambda \in \mathfrak{a}_{p, c}$ が $w\lambda \in \mathbb{Y}(\varepsilon) \ (\forall w \in W)$ を満たせば、

$$\varphi_{\varepsilon, \lambda}(gK_\varepsilon) = \varphi_{\varepsilon, w\lambda}(gK_\varepsilon) A_w^\varepsilon(\lambda) \quad (\forall w \in W)$$

$$\tilde{\varphi}_{\varepsilon, \lambda}(gK_\varepsilon) = \tilde{\varphi}_{\varepsilon, w\lambda}(gK_\varepsilon) A_w^\varepsilon(-\lambda) \quad (\forall w \in W)$$

ただし、 $A_w^\varepsilon(\lambda)$ は d 次正方行列で任意の $w \in W$ に対して $g \in G$ に依らない。さらに

$$A_{ww'}^\varepsilon(\lambda) = A_w^\varepsilon(w'\lambda) A_{w'}^\varepsilon(\lambda) \quad w, w' \in W \quad (4.3)$$

が成り立つ。

境界値をとることで、この Theorem から次が得られる。

Theorem 4.11. $h_{\varepsilon,\lambda}(g) = (h_{\varepsilon,\lambda}^1(g), \dots, h_{\varepsilon,\lambda}^r(g))$ とおく。このとき、 $\lambda \in \mathbb{Y}(\varepsilon)$ であれば

$$A(\lambda, w)h_{\varepsilon} = h_{\varepsilon,w\lambda}c_w(-\lambda)A_w^{\varepsilon}(-\lambda) \quad (4.4)$$

が成り立つ。

$A_w^{\varepsilon}(-\lambda)$ の決定に関しては、積公式 (4.3) を考慮すれば、 $w = s_{\alpha}$ ($\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_p)$ は単純ルート) の場合に帰着される。そして、次が成り立つ。

$w \in W$, 単純ルート $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_p)$, $\Sigma(\mathfrak{a}_p)$ の符号 ε を固定する。

(1) m_{α} は偶数であるか、 $\varepsilon(w\alpha) = 1$ であれば、

$$A(\lambda, s_{\alpha})h_{\varepsilon,\lambda}^w = \{\varepsilon(w\alpha)\}^{\frac{1}{2}m_{\alpha}}c_{\alpha}(-\lambda)h_{\varepsilon,s_{\alpha}\lambda}^{ws_{\alpha}} \quad (4.5)$$

(2) m_{α} は奇数でしかも、 $\varepsilon(w\alpha) = -1$ であれば、

$$A(\lambda, s_{\alpha})h_{\varepsilon,\lambda}^w = \frac{c_{\alpha}(-\lambda)}{\cos \frac{\pi\lambda_{\alpha}}{2}} \left\{ (-1)^{\frac{1}{2}(m_{\alpha}+1)} \left(\sin \frac{\pi\lambda_{\alpha}}{2} \right) h_{\varepsilon,s_{\alpha}\lambda}^{ws_{\alpha}} + h_{\varepsilon,s_{\alpha}\lambda}^w \right\} \quad (4.6)$$

上の主張の証明には (2.17) の類似の公式

$$h_{\varepsilon,\lambda}^w(\exp(X+Y)) = [(1 \pm \frac{1}{2}Q(X))^2 + 2Q(Y)]^{\frac{1}{4}(\lambda_{\alpha}-m_{\alpha}-2m_{2\alpha})} \quad (X \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, Y \in \mathfrak{g}_{-2\alpha}) \quad (4.7)$$

が成り立つことを使って²、定積分

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{m_{\alpha}-1} u^{m_{2\alpha}-1} ((1 \pm t^2) + u^2)^{\frac{1}{4}(\lambda_{\alpha}-m_{\alpha}-2m_{2\alpha})} dt du$$

の計算に帰着される。この積分は任意の $\lambda \in \mathfrak{a}_{p,c}$ に対して収束しないこともあるが、適当に定積分の正則化をすることでガンマ関数の積で表示できることを示せる。

5 一般の半単純対称空間の c -関数

5.1 半単純対称空間の c -関数に現れる積分の例

c -関数は一般に多変数多項式関数のベキ積の定積分で表される。どのようなものか、いくつかの定積分の計算例を与える。

Example 5.1. すでに説明したように、リーマン対称空間の c -関数は階数 1 の対称空間の場合の計算に還元される。たとえば、 $SL(3, \mathbb{R})/SO(3)$ の c -関数は $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ によらない定数倍を除いて

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1 + x^2 + (u + \frac{xy}{2})^2)^{\lambda_1} (1 + y^2 + (u - \frac{xy}{2})^2)^{\lambda_2} dx dy du \quad (5.1)$$

² $m_{2\alpha} = 0$ のときは、別に議論する必要がある。

で表される。したがって定数倍を除いて

$$\begin{aligned}
c(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^3} (1+x^2)^{\lambda_1} \left(1 + \left(\frac{(u + \frac{xy}{2})}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2\right)^{\lambda_1+\lambda_2} \\
&\quad \cdot \left(1 + \left(\frac{(1+x^2)y - x(u + \frac{xy}{2})}{\sqrt{1+x^2 + (u + \frac{xy}{2})^2}}\right)^2\right)^{\lambda_2} dx dy du \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (1+X^2)^{\lambda_1} (1+Y^2)^{\lambda_1+\lambda_2+\frac{1}{2}} (1+Z^2)^{\lambda_2} dX dY dZ \\
&= \pi^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(-\lambda_1 - \frac{1}{2})\Gamma(-\lambda_2 - \frac{1}{2})\Gamma(-\lambda_1 - \lambda_2 - 1)}{\Gamma(-\lambda_1)\Gamma(-\lambda_2)\Gamma(-\lambda_1 - \lambda_2 - \frac{1}{2})}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Example 5.2. G と H がともに複素リー群で, G が連結のとき, G/H を複素半単純対称空間と呼ぶことにする. この場合の c -関数の計算は $SL(2, \mathbb{C})/SO(2, \mathbb{C})$ などの階数 1 の複素半単純対称空間の場合に還元される. $SL(2, \mathbb{C})/SO(2, \mathbb{C})$ の場合の c -関数は定積分

$$\int_{\mathbb{C}} (1+z^2)^{\lambda+\frac{m}{2}} (1+\bar{z}^2)^{\lambda-\frac{m}{2}} dx dy \tag{5.3}$$

で与えられる. ここで $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$, $z = x + \sqrt{-1}y$ である. この定積分は次のようにして計算される.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} (1+re^{i\theta})^{\lambda+\frac{m}{2}} (1+re^{-i\theta})^{\lambda-\frac{m}{2}} dr d\theta \\
&= \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1+2r \cos \theta + r^2)^{\lambda+\frac{m}{2}} (e^{-i\theta}(\cos \theta + i \sin \theta + r))^{-m} dr d\theta \\
&= \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\cos \xi|^{2\lambda+m} \left(1 + \frac{u^2}{\cos^2 \xi}\right)^{\lambda+\frac{m}{2}} (\cos \xi + i \sin \xi)^{-m} \cos^{-m} \xi \\
&\quad \cdot \left(1 - i \frac{u}{\cos \xi}\right)^{-m} du d\xi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\xi \cdot \cos^{2\lambda+1} \xi d\xi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\eta \cdot \cos^{-2\lambda-2} \eta d\eta \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}{\Gamma(\lambda+\frac{3}{2}+\frac{m}{2})\Gamma(\lambda+\frac{3}{2}-\frac{m}{2})} \cdot \frac{\Gamma(-\lambda-\frac{1}{2})\Gamma(-\lambda)}{\Gamma(-\lambda+\frac{m}{2})\Gamma(-\lambda-\frac{m}{2})}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

ここで

$$z = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}, \quad u = r + \cos \theta, \quad \xi = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \tan \eta = \frac{u}{\cos \xi}.$$

Example 5.3. G/H の階数が 1 の場合, 対応する対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は次のいずれかと同型である:

$$\begin{aligned}
I_1 &(\mathfrak{so}(p+1, q+1), \mathfrak{so}(p+1, q)) \\
I_2 &(\mathfrak{su}(p+1, q+1), \mathfrak{su}(p+1, q) + \sqrt{-1}\mathbf{R}) \\
I_3 &(\mathfrak{sp}(p+1, q+1), \mathfrak{sp}(p+1, q) + \mathfrak{sp}(1)) \\
I_4^1 &(\mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{so}(9)) \\
I_4^2 &(\mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{so}(8, 1)) \\
II_1 &(\mathfrak{sl}(m+2, \mathbf{R}), \mathfrak{gl}(m+1, \mathbf{R})) \\
II_2 &(\mathfrak{sp}(m+2, \mathbf{R}), \mathfrak{sp}(m+1, \mathbf{R}) + \mathfrak{sp}(1, \mathbf{R})) \\
II_3 &(\mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{so}(5, 4))
\end{aligned}$$

これらの場合、リーマン対称空間の場合の積分表示式 (2.17) と類似の次の定積分の計算に帰着される。

$$\int_{\mathbf{R}^{p_1+p_2} \times \mathbf{R}^{q_1+q_2}} [(1 + \frac{1}{2}Q_{p_1,p_2}(X))^2 + 2Q_{q_1,q_2}(Y)]_{\pm}^{\nu} dXdY \quad (5.5)$$

ここで $Q_{m,n}(X)$ は $\mathbf{R}^{m+n}$ の符号 (m, n) の非退化 2 次形式である。

いわゆる Feynman の積分公式を使って計算できる例を与える。 $a_1 > 0, \dots, a_n > 0, a_{n+1} > 0$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0 \\ t_1 + \dots + t_n \leq 1}} t_1^{\alpha_1-1} \dots t_n^{\alpha_n-1} (1 - t_1 - \dots - t_n)^{\alpha_{n+1}-1} \\ & \quad (a_1 t_1 + \dots + a_n t_n + a_{n+1} (1 - t_1 - \dots - t_n))^{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1})} dt_1 \dots t_n \\ & = \frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_{n+1})}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1})} a_1^{-\alpha_1} \dots a_{n+1}^{-\alpha_{n+1}} \quad (5.6) \end{aligned}$$

が成り立つが、これを Feynman の積分公式という。

Example 5.4. $SO(4, 1)/SO(3) \times SO(1, 1)$ の $SO(4)$ -不変同時固有関数を含む空間の $\mathbf{c}$ -関数は

$$\int_{\mathbf{R}^3} (1 + z^2 + \bar{z}^2 + 2u^2 + (z\bar{z} + u^2)^2)^{-\lambda} dx dy du \quad (z = x + \sqrt{-1}y) \quad (5.7)$$

で与えられる。これは Feynman の積分公式を応用して、次のように計算される。

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^3} (1 + z^2 + \bar{z}^2 + 2u^2 + (z\bar{z} + u^2)^2)^{-\lambda} dx dy du \\ & = \int_{\mathbf{R}^3} (1 + x^2 + y^2 + u^2 - 2y)^{-\lambda} (1 + x^2 + y^2 + u^2 + 2y)^{-\lambda} dx dy du \\ & = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (r + (y-1)^2)^{-\lambda} (r + (y+1)^2)^{-\lambda} dr dy \\ & = \frac{\pi}{B(\lambda, \lambda)} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} (1-t)^{\lambda-1} (r + y^2 + 2(2t-1)y + 1)^{-2\lambda} dr dy dt \\ & = \frac{\pi}{B(\lambda, \lambda)(2\lambda-1)} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} t^{\lambda-1} (1-t)^{\lambda-1} ((y+2t-1)^2 + 4t(1-t))^{1-2\lambda} dy dt \\ & = \frac{\pi 4^{\frac{3}{2}-2\lambda}}{B(\lambda, \lambda)(2\lambda-1)} \int_{-\infty}^{\infty} (y^2 + 1)^{1-2\lambda} dy \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-\lambda} (1-t)^{\frac{1}{2}-\lambda} dt \\ & = \frac{2\pi 4^{1-2\lambda}}{2\lambda-1} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2\lambda-\frac{3}{2})}{\Gamma(2\lambda-1)} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\lambda)\Gamma(\frac{3}{2}-\lambda)}{\Gamma(3-2\lambda)} \\ & = \frac{8\pi^{\frac{3}{2}}}{4^{2\lambda}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\lambda)^2 \Gamma(2\lambda-\frac{3}{2})}{\Gamma(\lambda)^2 \Gamma(3-2\lambda)}. \end{aligned}$$

ここで

$$x = \sqrt{r} \cos \theta, \quad u = \sqrt{r} \sin \theta$$

とした。さらに変数 t は Feynman の積分公式に現われる変数である。

Example 5.5. そう簡単には計算できないと思われる例をあげておく. 対称空間 $SU(2, 1)/SO(2, 1)$ に対する c -関数の計算に

$$\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}} \left\{ 1 + z^2 + \left(\sqrt{-1}t + \frac{|z|^2}{2} \right)^2 \right\}^{\lambda + \frac{m}{2}} \left\{ 1 + \bar{z}^2 + \left(\sqrt{-1}t - \frac{|z|^2}{2} \right)^2 \right\}^{\lambda - \frac{m}{2}} dx dy dt \quad (5.8)$$

(ここで $\lambda \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z}, z = x + \sqrt{-1}y$) が現われる. この定積分の計算は難しそうである. さらに, 対称空間 $SU(n+1, 1)/SO(n+1, 1)$ ($n > 0$) に対する c -関数の計算には定積分

$$\int_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}} f_0^{\lambda_0} \cdots f_n^{\lambda_n} dx_1 dy_1 \cdots dx_n dy_n dt \quad (5.9)$$

が現われる. ここで

$$\begin{aligned} f_j &= \left(1 + z_{j+1}^2 + \cdots + z_n^2 \right) \left(1 + \bar{z}_1^2 + \cdots + \bar{z}_j^2 \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{-1}t - \frac{1}{2}(|z_1|^2 + \cdots + |z_j|^2) + \frac{1}{2}(|z_{j+1}|^2 + \cdots + |z_n|^2) \right)^2, \\ z_j &= x_j + \sqrt{-1}y_j \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\lambda_0 - \lambda_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_{n-1} \geq 0. \quad (5.11)$$

である. 特に被積分関数が多価にならないための条件として (5.11) が必要である.

6 半単純対称空間の c -関数の計算法

半対称空間 $X = G/H$ の G -不変なコンパクト境界成分上の関数 φ に対して λ をパラメータをもつ Poisson 変換 $u = \mathcal{P}_\lambda \varphi$ が定義でき, u は X 上の不変微分作用素の同時固有関数になる (cf. [21], [19]). この固有値は λ で記述できる. 一方では λ で記述される固有値に対応する X 上の不変微分作用素の同時固有関数 u に対して境界値 $\beta_\lambda u$ を定義できる. Poisson 変換と境界値写像 β_λ はともに G -同変である.

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分空間とする. このとき $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ の部分空間としてよい. そして $\mathfrak{a}$ の双対 $\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ と同一視することで $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^*$ の部分空間とみなせる. $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関するルート全体 $\Sigma(\mathfrak{a})$ はルート系になる.

パラメータ λ が generic であれば, β_λ と $\mathcal{P}_\lambda$ は定数倍を除いてたがいに逆写像になる. この定数 $c(\lambda)$ が X に対する c -関数という. すなわち, $c(\lambda) = \beta_\lambda \circ \mathcal{P}_\lambda$ である. このようにして c -関数を定義するのは, リーマン対称空間の場合に Harish-Chandra の c -関数がこのように解釈できることに由来している (cf. [12]). G/K_ϵ 型の場合は [24] で定義されており, 一般の場合には [22] で初めて定義された.

半単純対称空間 X に対する c -関数はコンパクトな代数多様体上の超関数の積分として表示できる. X の階数を r , X の実階数を ℓ とする. このとき, この超関数はコンパクト代数群上の r 個の多項式のベキ積になる. ベキはパラメータ λ の 1 次式であり, そのうち ℓ 個は連続で $r - \ell$ 個はある格子 $\simeq \mathbb{Z}^{r-\ell}$ 上を動く. 特に c -関数は連続パラメータの有理型関数である.

c -関数は次のようにして計算される (cf. [22], [23]).

1. $c(\lambda)$ をあるベキ零リー群上の多項式のベキ積の定積分として表す.

2. intertwining 作用素の理論を使って、実階数 1 の対称空間の c -関数の積で表す。実階数 1 の対称空間の c -関数には連続パラメータが 1 個だけであるが、離散変数を含んでいる。
3. パラメータ λ に関する $c(\lambda)$ の漸化式を求める。
4. カルタン部分群の連結度と $c(\lambda)$ の離散パラメータとの関係を調べる。
5. 対称空間 X の実階数が 1 で $c(\lambda)$ の離散パラメータが零、つまり、対応する不変微分作用素の同時固有関数の空間に K -不変関数が含まれている場合 (ここで K は G の極大コンパクト部分群)、ガウスの超幾何微分方程式の接続公式を使って、リーマン対称空間の $c(\lambda)$ との関係を調べる。

すべてを解説していくのは大変なので、項目 5 についてのみ、次節で結果を述べる。

6.1 G/H 上の左 K -不変同時固有関数の c -関数

半単純対称空間 G/H に対して、次の条件を仮定する。

1. G は単連結複素半単純リー群のそのリー環の実型に対応する実解析的部分群である。
2. $H = G^\sigma$
3. G/H の実階数は 1 である。
4. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は $(\mathfrak{so}(n+1, 1), \mathfrak{so}(n < 1))$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) に同型でない。

$\Sigma(\mathfrak{a})$ は階数 1 のルート系なので、 $\frac{1}{2}\lambda \notin \Sigma(\mathfrak{a})^+$ であるルートがただひとつ存在する。 $Y \in \mathfrak{a}$ を $\lambda(Y) = 1$ となるようにとる。また $a_t = \exp(tY)$ とおく。 $\omega_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の Casimir 作用素とする。

Proposition 6.1. 任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して、リーマン対称空間 G/K 上の左 H -不変な関数 $u_s(gK)$ で $u_s(eK) = 1$ でしかも

$$2(m_\lambda + 4m_{2\lambda})\omega_{\mathfrak{g}}u_s = \left\{ s^2 - \left(\frac{m_\lambda + 4m_{2\lambda}}{2} \right)^2 \right\} u_s. \quad (6.1)$$

が成り立つものがただひとつ存在する。そして u_s は次の性質を満たす：

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(-s + \frac{1}{2}m_\lambda + m_{2\lambda})t} u_s(e^{tY}K) &= R_{G,H}(s) \quad \text{if } \operatorname{Re} s > 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(s + \frac{1}{2}m_\lambda + m_{2\lambda})t} u_s(e^{tY}K) &= R_{G,H}(-s) \quad \text{if } \operatorname{Re} s < 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

ここで

$$R_{G,H}(s) = \frac{2^{\frac{1}{4}(m_\lambda + 2m_{2\lambda}) - 1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2}(m_\lambda^+ + m_{2\lambda}^+ + 1)) \Gamma(\frac{1}{4}s) \Gamma(\frac{1}{4}(s+2)) \Gamma(\frac{1}{2}(s+1))}{\Gamma(\frac{1}{4}(s + \frac{1}{2}m_\lambda + m_{2\lambda})) \Gamma(\frac{1}{4}(s + \frac{1}{2}m_\lambda + m_{2\lambda}^+ - m_{2\lambda}^- + 2)) \Gamma(\frac{1}{2}(s + \frac{1}{2}(m_\lambda^+ - m_\lambda^-) + 1))}$$

$\rho_{\mathfrak{a}} = \rho|_{\mathfrak{a}}$ として、 $\iota(\nu) = \nu + \rho - \rho_{\mathfrak{a}}$ ($\forall \nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$) とおく。また X に対する c -関数を $c_X(\nu)$ であらわす。このとき、次が成り立つ。

Proposition 6.2. 任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ：

$$c_{G/K}(\iota(s\lambda)) = \frac{c'(s)}{c'(\frac{1}{2}m_\lambda + m_{2\lambda})}$$

ここで $c'(s)$ は次で与えられる s の関数である：

Type	$c'(s)$
I	$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)\Gamma(\frac{1}{2}(s+1))\Gamma(\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2}m_\lambda+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+\frac{1}{2}(m_\lambda^+-m_\lambda^-)+1))\Gamma(\frac{1}{2}(s+\frac{1}{2}(m_\lambda^--m_\lambda^+)+1))\Gamma(\frac{1}{2}(s+\frac{1}{2}m_\lambda+m_{2\lambda}))}$
I ^d	$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)\Gamma(\frac{1}{2}(s+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+\frac{1}{2}m_\lambda+1))\Gamma(\frac{1}{2}(s+\frac{1}{2}m_\lambda+m_{2\lambda}))}$
II, III, IV	$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)\Gamma(\frac{1}{4}(s-m_\lambda^++m_{2\lambda}^+-m_{2\lambda}^-+2))\Gamma(\frac{1}{4}(s-m_\lambda^++m_{2\lambda}^+-3m_{2\lambda}^-+4))}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+m_{2\lambda}^+-m_{2\lambda}^-+2))\Gamma(\frac{1}{4}(s+m_\lambda^++m_{2\lambda}))\Gamma(\frac{1}{4}(s+m_\lambda^++m_{2\lambda}^+-m_{2\lambda}^-+2))}$
II ^d , III ^d , IV ^d	$\frac{\Gamma(\frac{1}{4}s)\Gamma(\frac{1}{4}(s+2))\Gamma(\frac{1}{4}(s-m_{2\lambda}^++m_{2\lambda}^-))\Gamma(\frac{1}{4}(s-m_{2\lambda}^++m_{2\lambda}^-+2))}{\Gamma(\frac{1}{4}(s+m_\lambda^++m_{2\lambda}))\Gamma(\frac{1}{4}(s+m_\lambda^++m_{2\lambda}^+-m_{2\lambda}^-+2))\Gamma(\frac{1}{4}(s+m_\lambda^+-m_{2\lambda}^++m_{2\lambda}^-+2))}$
V	$\frac{\Gamma(\frac{1}{4}s)\Gamma(\frac{1}{4}(s+2))\Gamma(\frac{1}{4}(s-2m_{2\lambda}^+))\Gamma(\frac{1}{4}(s-4m_{2\lambda}^+))}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+4))^2\Gamma(\frac{1}{4}(s+2m_{2\lambda}^++2))\Gamma(\frac{1}{4}(s+4m_{2\lambda}^++4))}$
V ^d	$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)\Gamma(\frac{1}{4}s)^2}{\Gamma(\frac{1}{4}(s+2m_{2\lambda}^++2))\Gamma(\frac{1}{4}(s+4m_{2\lambda}^++4))^2}$

Q が G の放物型部分群のとき、 $Q = M_Q A_Q N_Q$ をその Langlands 分解とあする。ここでは Q として $Z_G(\mathfrak{a}) = M_Q A_Q$ となるものとする。

さて、 $\langle \nu, \lambda \rangle > 0$ である $\nu \in \mathfrak{a}_c^*$ に対して、次の条件を満たす G 上の関数 $f_\nu(g)$ が存在する：

- (1) $f_\nu(g)$ は連続である。
- (2) $f_\nu(hgman) = a^\nu f_\nu(g)$ ($h \in H, g \in G, m \in M_Q, a \in A_Q, n \in N_Q$).

$f_\nu(g)$ を使って、

$$\varphi_\nu(gH) = \int_K f_{-\nu-\rho_{\mathfrak{a}}}(g^{-1}k)dk \quad (\forall g \in G)$$

とおく。 $\varphi_\nu(gH)$ は G/H 上の左 K -不変な関数である。 $\nu = s\lambda$ ($s \in \mathbb{C}$) とおく。すると、 $\psi_s(gK) = \varphi_{-s\lambda}(g^{-1}H)$ は G/K 上の左 H -不変な関数とみなせ、しかも $\psi_s(gK)$ は微分方程式

$$2(m_\lambda + 4m_{2\lambda})\omega_{\mathfrak{g}}\psi_s = \left\{ s^2 - \left(\frac{m_\lambda + 2m_{2\lambda}}{2} \right) \right\} \psi_s.$$

を満たすことを示せる。さらに、容易な計算によって

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(s\lambda-\rho_{\mathfrak{a}})(tY)} \psi_s(e^{tY}K) = c_{G/K}(\iota(s\lambda)) \quad (6.3)$$

がわかる。また $\psi_s(gK)$ は定数倍を除いて命題 6.1 の $u_s(gK)$ に等しいことがわかる。これで (6.3) と (6.2) を比較して、

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(s\lambda-\rho_{\mathfrak{a}})(tY)} \psi_s(e^{tY}K) = \frac{R_{G,H}(-s)}{R_{G,H}(s)} c_{G/K}(\iota(s\lambda)). \quad (6.4)$$

を得る. $\varphi_{s\lambda}(e^{tY}H) = \psi_s(e^{-tY}K)$ なので,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(-s\lambda + \rho_a)(tY)} \varphi_{s\lambda}(e^{tY}K) = \frac{R_{G,H}(s)}{R_{G,H}(-s)} c_{G/K}(\iota(-s\lambda)). \quad (6.5)$$

がわかる. いま関数 $E_{G/H}(s)$ を

$$E_{G/H}(s) = \frac{R_{G,H}(s)}{R_{G,H}(-s)} \frac{c_{G/K}(\iota(-s\lambda))}{c_{G^d/K^d}(\iota(s\lambda))}$$

で定義する. すると次の定理を得る.

Theorem 6.3. G/H が以前の仮定を満たしているとする. このとき, 次が成り立つ.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(-s\lambda + \rho_a)(tY)} \varphi_{s\lambda}(e^{tY}K) = E_{G/H}(s) c_{G^d/K^d}(\iota(-s\lambda)). \quad (6.6)$$

さらに次が成り立つ.

(i) $E_{G/H}(s) E_{G^d/H^d}(-s) = 1$

(ii) $I - V$ の場合には $E_{G/H}(s)$ は以下で与えられる:

Type	$E_{G/H}(s)$
I	$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(m_\lambda^+ + m_{2\lambda} + 1)) \Gamma(\frac{1}{2}(m_\lambda^- + m_{2\lambda} + 1)) \cos \frac{\pi}{2}(s + \frac{1}{2}(m_\lambda^+ - m_\lambda^-))}{\Gamma(\frac{1}{2}(m_\lambda + m_{2\lambda} + 1)) \Gamma(\frac{1}{2}(m_{2\lambda} + 1)) \cos \frac{\pi}{2}(s + \frac{1}{2}(m_\lambda^+ + m_\lambda^-))}$
II, III, IV	$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(m_\lambda^+ + m_{2\lambda}^-)) \Gamma(\frac{1}{2}m_{2\lambda}^+ + 1) \Gamma(\frac{1}{2}m_\lambda^+ + m_{2\lambda}^+ + 1)}{\Gamma(m_\lambda^+ + m_{2\lambda}^-) \Gamma(m_{2\lambda}^+ + 1) \Gamma(\frac{1}{2}(m_\lambda^+ - m_{2\lambda}^- + 2))} \\ \times \frac{\sin \frac{\pi}{4}(s - m_{2\lambda}^+ + m_{2\lambda}^-) \cos \frac{\pi}{4}(s - m_{2\lambda}^+ + m_{2\lambda}^-)}{\cos \frac{\pi}{4}(s + m_\lambda^+ - m_{2\lambda}^+ + m_{2\lambda}^-) \sin \frac{\pi}{4}(s + m_\lambda^+ - m_{2\lambda}^+ + 3m_{2\lambda}^-)}$
V	$2^{-m_{2\lambda}^+} \cdot \frac{\Gamma(m_{2\lambda}^+ + 1) \Gamma(m_{2\lambda}^+ + 2) \Gamma(\frac{1}{2}(m_{2\lambda}^+ + 3))}{\Gamma(m_{2\lambda}^+ + \frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}(3m_{2\lambda}^+ + 4))} \frac{(\sin \frac{\pi}{4}s)^2}{\sin(\frac{\pi}{4}(s + 2m_{2\lambda}^+)) \sin(\frac{\pi}{4}(s + 4m_{2\lambda}^+))}$

7 文献について

1. 第1節について Harish-Chandra [10], Bhanu Murthy [4], [5], Gindikin-Karpelevič [9], Helgason [11], Schiffman [27]などをあげておく. c -関数の計算についての歴史的解説は Gindikin [8], Knapp [14] などがある. よく知られたものなので, 他にもいくつか教科書がある.
2. 半単純対称対の分類は Berger [2] による. Oshima-Sekiguchi [24], [25] で半単純対称対の構造を調べている. 実階数が1の半単純対称対の表は [25] にある.
3. G/K_e を導入したのは [24] である. この場合の c -関数の計算の実行している.
4. 半単純対称空間の c -関数については Oshima [21], [23] が基本的である.

この原稿は, 半単純対称空間のコンパクト化, 主系列, Poisson 変換, 確定特異型境界値問題など関連する話題に言及していないので, 全体の見通しが悪い. 文献表に完全ではないが参考にしたか, 参考になるであろう論文をあげておいたので, 関心のある方はそれらを直接あたっていただくことをお勧めする.

References

- [1] F. A. Berezin and F. I. Karpelevič, *Zonal spherical functions and Laplace operators on some symmetric spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **118**(1958), 9-12 (Russian).
- [2] M. Berger, *Les espaces symétriques non compacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **74**(1957), 85-177.
- [3] I. N. Bernstein and S. I. Gel'fand, *Meromorphic property of the function P^λ* , Funkt. Anal. i. Ego Prilozheniya **3** (1969), 84-85; English translation, Funct. Anal. Appl., **3** (1969), 68-69.
- [4] T. S. Bhanu Murthy, *Plancherel's measure for the factor space $SL(n, \mathbf{R})/SO(n, \mathbf{R})$* , Dokl. Akad. Nauk. SSSR **133**(1960), 503-506.
- [5] T. S. Bhanu Murthy, *The asymptotic behavior of zonal spherical functions on the Siegel upper half plane*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **135**(1960), 1027-1029.
- [6] M. Eguchi, S. Koizumi and M. Mamiuda, *The expressions of the Harish-Chandra's C -functions of semisimple Lie groups $Spin(n, 1)$, $SU(n, 1)$* , J. Math. Soc. Japan **51** (1999), 955-985.
- [7] I. M. Gelfand, *Spherical functions on symmetric spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **70**(1950), 5-8; English Transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) **37** (1964), 39-44.
- [8] S. Gindikin, *Product formula for c -function and inverse horospherical transform*, in "Lie Groups and Symmetric Spaces in Memory of F. I. Karpelevich", AMS Transl., (2) **210**(2003), 125-134.
- [9] S. G. Gindikin and F. I. Karpelevič, *Plancherel measure of Riemannian symmetric spaces of non-positive curvature*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **145**(1962), 252-255; English Transl., Soviet Math. Doklady **3** (1962), 962-965.
- [10] Harish-Chandra, *Spherical functions on a semi-simple group I*, Amer. J. Math. **80**(1958), 241-310.
- [11] S. Helgason, *A duality for symmetric spaces with application to group representations*, Advan. Math. **5** (1970), 1-154.
- [12] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space*, Ann. Math. **107**(1978), 1-39.
- [13] M. Kashiwara and T. Oshima, *Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems*, Ann. of Math. **106**(1977), 145-200.
- [14] A. W. Knap, *The Gindikin-Karpelevič formula and intertwining operators*, in "Lie Groups and Symmetric Spaces in Memory of F. I. Karpelevich," AMS Transl., (2) **210**(2003), 145-159.
- [15] A. W. Knap and E. M. Stein, *Intertwining operators for semisimple groups, II*, Invent. Math. **60**(1980), 9-84.
- [16] B. Krötz and G. Ólafsson, *The c -function for non-compactly causal symmetric spaces*, Invent. Math., **149** (2002), 647-659.
- [17] B. Krötz and G. Ólafsson, *The c -function for non-compactly causal symmetric spaces and its relations to harmonic analysis and representation theory*, in "Lie Groups and Symmetric Spaces in Memory of F. I. Karpelevich," AMS Transl., (2) **210**(2003), 171-194.
- [18] T. Matsuki, *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan **31**(1979), 331-357.
- [19] G. Ólafsson, *Fourier and Poisson transformation associated to a semisimple symmetric space*, Invent. Math. **90** (1987), 605-629.
- [20] T. Oshima, *A realization of Riemannian symmetric spaces*, J. Math. Soc. Japan **30**(1978), 117-132.
- [21] T. Oshima, *Poisson transformations on affine symmetric spaces*, Proc. Japan Acad. **55** Ser. A(1979), 323-327.
- [22] T. Oshima, *Fourier analysis on semisimple symmetric spaces*, in "Non-Commutative Harmonic Analysis. Proceedings", 1980, Lect. Note in Math. **880**(1981), 357-369, Springer.

- [23] T. Oshima, *A calculation of c -functions for semisimple symmetric spaces*, in “Lie Groups and Symmetric Spaces in Memory of F. I. Karpelevich,” AMS Transl., (2) **210**(2003), 307–330.
- [24] T. Oshima and J. Sekiguchi, *Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space*, Invent. Math. **57**(1980), 1–81.
- [25] T. Oshima and J. Sekiguchi, *The restricted root systems of semisimple symmetric pairs*, Advanced Studies in Pure Math. **4**(1984), 433–497.
- [26] I. Satake, *On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces*, Ann. Math., **71** (1960), 77–110.
- [27] G. Schiffman, *Intégrales d’entrelacement et fonctions de Whittaker*, Bull. Soc. Math. France **99**(1971), 3–72.
- [28] H. Schlichtkrull, *One dimensional K -types in finite dimensional representations of semisimple Lie groups*, Math. Scand. **54**(1984), 279–294.
- [29] J. Sekiguchi, *On Harish-Chandra’s c -function*, Seminar Reports of Unitary Representation **1**(1981), 68–114, in Japanese.
- [30] J. Sekiguchi, *Fundamental groups of semisimple symmetric spaces*, Adv. Studies in Pure Math. **14**(1988), 519–529.
- [31] J. Sekiguchi, *Regularization of the product of complex powers of polynomials and its application*, in “Algebraic Analysis”, 1989, pp. 821–836, Academic Press, San Diego.
- [32] N. Shimeno, *Eigenspaces of invariant differential operators on a homogeneous line bundle on a Riemannian symmetric space*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1990), 201–234.
- [33] N. Shimeno, *The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional K -type on a simply connected simple Lie group of Hermitian type*, J. of Funct. Anal. **121** (1994), 330–388.