

旗多様体上の軌道対応に関する領域の同一性について-II

京都大学大学院理学研究科 松木 敏彦

1 Introduction

$G_{\mathbb{C}}$ を連結複素半単純リー群、 $G_{\mathbb{R}}$ をその連結な real form とする。 K を $G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群とし、 $K_{\mathbb{C}}$ をその (連結な) 複素化とする。任意の $G_{\mathbb{C}}$ の旗多様体 $X = G_{\mathbb{C}}/P$ 上の $K_{\mathbb{C}}$ -軌道と $G_{\mathbb{R}}$ -軌道との間には次の自然な 1 対 1 対応がある ([M2])。

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{C}} \backslash X \ni S &\longleftrightarrow S' \in G_{\mathbb{R}} \backslash X \\ &\iff S \cap S' \text{ は空でないコンパクト集合} \end{aligned} \quad (1.1)$$

[GM1] において、 $S \in K_{\mathbb{C}} \backslash X$ に対し、次のような $G_{\mathbb{C}}$ の部分集合を定義した。

$$C(S) = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS \cap S' \text{ は空でないコンパクト集合}\}$$

ただし、 S' は (1.1) によって定まる X 上の $G_{\mathbb{R}}$ -軌道である。明らかに $C(S)$ は左 $G_{\mathbb{R}}$ -不変かつ右 $K_{\mathbb{C}}$ -不変な集合である。

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の Cartan 分解とする。 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{im}$ の 1 つの極大可換部分空間とし、 $\mathfrak{t}^+ = \{Y \in \mathfrak{t} \mid |\alpha(Y)| < \pi/2 \text{ for all } \alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t})\}$ とおく。このとき Akhiezer-Gindikin 領域 D が次の式で定義される ([AG])。

$$D = G_{\mathbb{R}}(\exp \mathfrak{t}^+)K_{\mathbb{C}}$$

[GM1] (Conjecture 1.6) において次のように予想した。

予想 1.1 $S \neq X$ が nonholomorphic type のとき $C(S)_0 = D$ であろう。ただし、 $C(S)_0$ は $C(S)$ の単位元を含む連結成分とする。

注意 1.2 $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型るとき、full flag manifold $G_{\mathbb{C}}/B$ 上には 2 つの特殊な閉 $K_{\mathbb{C}}$ -軌道 $S_1 = Q/B$ と $S_2 = w_0 Q/B$ が存在する。ただし $Q = K_{\mathbb{C}}B$ は $G_{\mathbb{R}}/K$ の複素構造を定義するための極大放物型部分群であり、 w_0 はワイル群の最長元とする。このとき、任意の放物型部分群 $P \supset B$ に対し、 $S_1 P$ と $S_2 P$ は $G_{\mathbb{C}}/P$ の holomorphic type の $K_{\mathbb{C}}$ -軌道と呼ばれ、それ以外の $K_{\mathbb{C}}$ -軌道はすべて nonholomorphic type と定義する。従って、閉でないすべての軌道あるいは $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型でないときのすべての軌道は nonholomorphic type である ([WZ1] 参照)。

$G_{\mathbb{C}}/B$ (B は $G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群) 上の開 $K_{\mathbb{C}}$ -軌道 S_{op} (ただ1つ) を考えよう。このとき S'_{op} は閉 $G_{\mathbb{R}}$ -軌道であるので

$$C(S_{\text{op}}) = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS_{\text{op}} \supset S'_{\text{op}}\}$$

となる。連結成分 $C(S_{\text{op}})_0$ は最近しばしば Iwasawa domain と呼ばれている。[H]、[M4] において inclusion

$$D \subset C(S_{\text{op}})_0$$

が示され、[B] によって $C(S_{\text{op}})_0 \subset D$ が示されているので、

$$C(S_{\text{op}})_0 = D$$

である。また [GM1] Proposition 8.1、Proposition 8.3 において任意の $X = G_{\mathbb{C}}/P$ 上の $K_{\mathbb{C}}$ -軌道 S に対して

$$C(S_{\text{op}})_0 \subset C(S)_0$$

が示されている。従って、予想 1.1 を示すには逆向きの inclusion を示せばよい。

S が開軌道のとき、この予想は [M5] で証明された。従って、 S は開軌道でないとしてよい。 S_0 を S に含まれる dense な $K_{\mathbb{C}}$ - B 両側剰余類とする。任意の simple root α に対し、 $P_{\alpha} = B \sqcup Bw_{\alpha}B$ によって放物型部分群 P_{α} を定義する。[GM2] Lemma 2 によって、

$$S_k^{cl} = S_0^{cl} P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_k}, \quad \dim_{\mathbb{C}} S_k = \dim_{\mathbb{C}} S_0 + k \quad \text{for } k = 1, \dots, \ell$$

($\ell = \text{codim}_{\mathbb{C}} S_0$) となる $K_{\mathbb{C}}$ - B 両側剰余類の列 $\{S_k\}$ と simple root の列 $\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell}$ を取ることができる。このとき、次のことが証明できる ([M6])。

定理 1.3 $x \in D^{cl} \cap C(S)$ ならば

$$xS^{cl} \cap S'_{\text{op}} P_{\alpha_{\ell}} \cdots P_{\alpha_1} = xS \cap S'_0$$

この定理によって、次のように $G_{\mathbb{R}}$ が非エルミート型のときの予想 1.1 が解決される。

系 1.4 $G_{\mathbb{R}}$ は単純かつ非エルミート型とする。このとき任意の旗多様体 $G_{\mathbb{C}}/P$ 上のすべての開でない $K_{\mathbb{C}}$ -軌道 S に対し、 $C(S)_0 = D$

証明 $x \in D^{cl} \cap C(S)$ とする。このとき $x \in D$ であることを示せばよい。 $S_0 P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_{\ell-1}} \cap S_{\text{op}} = \phi$ であるから、duality ([M1]) により $S'_0 P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_{\ell-1}} \cap S'_{\text{op}} = \phi$ であり、よって

$$S'_{\text{op}} P_{\alpha_{\ell-1}} \cdots P_{\alpha_1} \cap S'_0 = \phi$$

である。定理 1.3 より

$$\begin{aligned} xS^{cl} \cap S'_{\text{op}} P_{\alpha_{\ell-1}} \cdots P_{\alpha_1} &= xS^{cl} \cap S'_{\text{op}} P_{\alpha_\ell} \cdots P_{\alpha_1} \cap S'_{\text{op}} P_{\alpha_{\ell-1}} \cdots P_{\alpha_1} \\ &= xS \cap S'_0 \cap S'_{\text{op}} P_{\alpha_{\ell-1}} \cdots P_{\alpha_1} = \phi. \end{aligned}$$

よって

$$xS_{\ell-1}^{cl} \cap S'_{\text{op}} = xS^{cl} P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_{\ell-1}} \cap S'_{\text{op}} = \phi.$$

余次元 1 の $K_{\mathbb{C}}$ -軌道 $S_{\ell-1}$ に対し、[GM2] において次の領域が定義された。

$$\Omega = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS_{\ell-1}^{cl} \cap S'_{\text{op}} = \phi\}_0$$

$G_{\mathbb{R}}$ が非エルミート型のとき、[FH], [M5] において

$$\Omega = D$$

が示されている。従って $x \in D$ である。 □

2 例

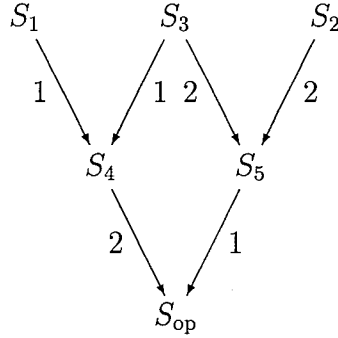
$G_{\mathbb{C}} = SL(3, \mathbb{C})$, $G_{\mathbb{R}} = SU(2, 1)$,

$$K_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}} \right\}$$

とする。 B を $G_{\mathbb{C}}$ に含まれる上半三角行列のなすボレル部分群とする。このとき full flag manifold $X = G_{\mathbb{C}}/B$ は旗 (ℓ, p) (ℓ は $\mathbb{C}^3$ の 1 次元部分空間、 p は ℓ を含む $\mathbb{C}^3$ の 2 次元部分空間) の集合である。 X は次のように 6 つの $K_{\mathbb{C}}$ -軌道に分解される。

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell = V_-^0\}, \\ S_2 &= \{(\ell, p) \in X \mid p = V_+^0\}, \\ S_3 &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell \subset V_+^0, p \supset V_-^0\}, \\ S_4 &= \{(\ell, p) \in X \mid p \supset V_-^0\} - (S_1 \cup S_3), \\ S_5 &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell \subset V_+^0\} - (S_2 \cup S_3), \\ S_{\text{op}} &= X - (S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5). \end{aligned}$$

軌道構造は次の図で表わされる。(記号の意味については [M3], [MO] 参照)



一方、これらに対応する $G_{\mathbb{R}}$ -軌道は次の通りである。

$$\begin{aligned}
S'_1 &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell - \{0\} \subset C_-\}, \\
S'_2 &= \{(\ell, p) \in X \mid p - \{0\} \subset C_+\}, \\
S'_3 &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell - \{0\} \subset C_+, p \cap C_- \neq \emptyset\}, \\
S'_4 &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell \subset C_0\} - S'_{\text{op}}, \\
S'_5 &= \{(\ell, p) \in X \mid p \text{ は } C_0 \text{ に接する}\} - S'_{\text{op}}, \\
S'_{\text{op}} &= \{(\ell, p) \in X \mid \ell \subset C_0, p \text{ は } C_0 \text{ に接する}\}.
\end{aligned}$$

ただし $SU(2, 1)$ を定義するエルミート形式 $Q(z, z) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2$ によって、 $\mathbb{C}^3$ を

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^3 &= C_0 \sqcup C_+ \sqcup C_- \\
&= \{Q(z, z) = 0\} \sqcup \{Q(z, z) > 0\} \sqcup \{Q(z, z) < 0\}
\end{aligned}$$

と分割する。

$C(S_4)_0$ を調べてみよう。

補題 2.1 ([M6] Lemma 2.5) 任意の $x \in G_{\mathbb{C}}$ について $XS_{\text{op}} \cap S'_{\text{op}}$ は S'_{op} の dense subset である。

証明 S_{op} の境界 $\partial S_{\text{op}} = G_{\mathbb{C}} - S_{\text{op}}$ は次の条件をみたす正則関数 f の零点集合である ([GM1] 参照)。

$$f(kzb) = \chi(b)^{-1}f(z) \quad \text{for } z \in G_{\mathbb{C}}, k \in K_{\mathbb{C}}, b \in B$$

ただし $\chi: B \rightarrow \mathbb{C}^\times$ は regular な正則指標である。したがって $\partial(xS_{\text{op}}) = x\partial S_{\text{op}}$ は $g(z) = f(x^{-1}z)$ とおくと、 $g(z) = 0$ で定義される。 g が S'_{op} の開部分集合上 0 であるとする、 S'_{op} は $G_{\mathbb{C}}/B$ 上の $G_{\mathbb{R}}$ -軌道であるので、 $G_{\mathbb{C}}$ 全体で 0 になる。よって $XS_{\text{op}} \cap S'_{\text{op}}$ は S'_{op} の dense subset である。□

補題 2.2 ([M6] Lemma 3.3) $(XS_4 \cap S'_4)/B$ が空でないコンパクト集合であれば、 $(XS_4 \cap S'_4)P_\alpha \supset S'_{\text{op}}$ (ただし、 $\alpha = \alpha_2$ とする。)

証明 $\mathcal{Y} = (xS_4 \cap S'_4)P_\alpha \cap S'_{\text{op}}$ は S'_{op} の空でない閉部分集合である。 $\mathcal{Y} \neq S'_{\text{op}}$ と仮定して矛盾を導けばよい。 y を S'_{op} における $\mathcal{Y}$ の境界点とすると、補題 2.1 により y に収束する $(S'_{\text{op}} - \mathcal{Y}) \cap xS_{\text{op}}$ の点列 $\{y_n\}$ が取れる。
 $y \in xS_4P_\alpha$ のとき

$$\begin{aligned} yP_\alpha/B &= (yP_\alpha \cap xS_4)/B \sqcup (yP_\alpha \cap xS_{\text{op}})/B \\ &\cong \{1 \text{ 点}\} \sqcup \mathbb{C} \end{aligned}$$

であるので、 $zB = yP_\alpha \cap xS_4$, $z_nB = y_nP_\alpha \cap xS_4$ をみたす $zB, z_nB \in G_{\mathbb{C}}/B$ が定まる。このとき、容易に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_nB = zB$$

([M6] Lemma 2.1 参照) が示せる。 S'_4 は $S'_{\text{op}}P_\alpha = S'_4 \sqcup S'_{\text{op}}$ の中で relatively open であり、 $z_n \in S'_{\text{op}}P_\alpha$, $z \in S'_4$ だから、十分大きな n について $z_n \in S'_4$ が成り立つ。よって

$$y_n \in z_nP_\alpha \subset (xS_4 \cap S'_4)P_\alpha$$

となり、これは $y_n \notin \mathcal{Y}$ に矛盾する。 □

系 2.3 $C(S_4)_0 = D$

証明 [GM1] Proposition 8.1 により $D \subset C(S_4)_0$ が示されているので、 $C(S_4)_0 \subset D$ を示せばよい。そのためには、 $x \in D^{\text{cl}} \cap C(S_4)$ のとき、 $x \in D$ であることを示せばよい。補題 2.2 により $(xS_4 \cap S'_4)P_\alpha \supset S'_{\text{op}}$ であるので

$$xS_{\text{op}}P_\alpha = xS_4P_\alpha \supset S'_{\text{op}}P_\alpha \quad (2.1)$$

が成り立つ。 $S_{\text{op}}P_\alpha$ は開 $K_{\mathbb{C}}\text{-}P_\alpha$ 両側剰余類なので、これは

$$x \in C(S_{\text{op}}P_\alpha)$$

を意味するが、 $D \subset C(S_{\text{op}}P_\alpha)$, $x \in D^{\text{cl}}$ だから $x \in C(S_{\text{op}}P_\alpha)_0$ であり、[M5] Corollary 1.4 において $C(S_{\text{op}}P_\alpha)_0 = D$ が示されているので、 $x \in D$ である。 □

定理 1.3 を $S = S_4$ について書くと次の式になる。

$$x \in D^{\text{cl}} \cap C(S_4) \implies xS_4^{\text{cl}} \cap S'_{\text{op}}P_\alpha = S_4 \cap S'_4$$

図より

$$S_4^{\text{cl}} = S_1 \sqcup S_3 \sqcup S_4, \quad S'_{\text{op}}P_\alpha = S'_4 \sqcup S'_{\text{op}}$$

であるので、これは

$$x \in D^{\text{cl}} \cap C(S_4) \implies (xS_1 \sqcup xS_3 \sqcup xS_4) \cap (S'_4 \sqcup S'_{\text{op}}) = xS_4 \cap S'_4 \quad (2.2)$$

を意味する。これを ([M5] Corollary 1.4 を用いず、直接的に) 示そう。 $x \in C(S_4)$ のとき、(2.1) により

$$xS_4 \sqcup xS_{\text{op}} \supset S'_4 \sqcup S'_{\text{op}}$$

であるので、

$$(xS_1 \sqcup xS_3) \cap (S'_4 \sqcup S'_{\text{op}}) = \phi \quad (2.3)$$

である。また、任意の $y \in S'_{\text{op}}$ に対し、補題 2.2 により $yP_\alpha \cap xS_4 \cap S'_4 \neq \phi$ であるが、 $(yP_\alpha \cap xS_4)/B = 1$ 点 であるので、

$$yP_\alpha \cap xS_4 \cap S'_4 = yP_\alpha \cap xS_4$$

が従う。よって

$$yP_\alpha \cap xS_4 \cap S'_{\text{op}} = \phi$$

であり、 $y \in S'_{\text{op}}$ は任意だから、

$$xS_4 \cap S'_{\text{op}} = \phi \quad (2.4)$$

である。(2.3) と (2.4) により (2.2) が成り立つ。(注: (2.2) については、条件 $x \in D^d$ は不要であった。)

References

- [AG] D. N. Akhiezer and S. G. Gindikin. On Stein extensions of real symmetric spaces. *Math. Ann.*, 286:1–12, 1990.
- [B] L. Barchini. Stein extensions of real symmetric spaces and the geometry of the flag manifold. preprint
- [FH] G. Fels and A. Huckleberry. Characterization of cycle domains via Kobayashi hyperbolicity. preprint (AG/0204341)
- [GM1] S. Gindikin and T. Matsuki. Stein extensions of Riemann symmetric spaces and dualities of orbits on flag manifolds. preprint (MSRI-Preprint 2001-028)
- [GM2] S. Gindikin and T. Matsuki. A remark on Schubert cells and duality of orbits on flag manifolds. preprint (RT/0208071)
- [H] A. Huckleberry. On certain domains in cycle spaces of flag manifolds. *Math. Annalen*, 323:797–810, 2002.
- [HN] A. Huckleberry and B. Ntatin. Cycle spaces of G -orbits in $G^{\mathbb{C}}$ -flag manifolds. preprint (RT/0212327)

- [M1] T. Matsuki. Orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups. *Hiroshima Math. J.*, 12:307–320, 1982.
- [M2] T. Matsuki. Closure relations for orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups. Intersections of associated orbits. *Hiroshima Math. J.*, 18:59–67, 1988.
- [M3] T. Matsuki. Schubert cell と旗多様体上の軌道対応. 数理解析研究所講究録 1294:35–43, 2002.
- [M4] T. Matsuki. Stein extensions of Riemann symmetric spaces and some generalization. *J. of Lie Theory*, 13:563–570, 2003.
- [M5] T. Matsuki. Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds. preprint (RT/0309314)
- [M6] T. Matsuki. Equivalence of domains arising from duality of orbits on flag manifolds II. preprint (RT/0309469)
- [MO] T. Matsuki and T. Oshima. Embeddings of discrete series into principal series. In *The Orbit Method in Representation Theory*, 147–175. Birkhäuser, 1990.
- [WZ1] J. A. Wolf and R. Zierau. Linear cycle spaces in flag domains. *Math. Ann.*, 316:529–545, 2000.
- [WZ2] J. A. Wolf and R. Zierau. A note on the linear cycle spaces for groups of Hermitian type. *J. of Lie Theory*, 13:189–191, 2003.