

Special values of the spectral zeta functions for locally symmetric Riemannian manifolds

橋本康史 (Yasufumi Hashimoto)

1 Introduction

G を実階数 1 の半単純リー群, K を G の極大コンパクト群, Γ を co-compact torsion free な G の離散部分群とする. このとき, λ_j を $\Gamma \backslash G/K$ 上のラプラシアン Δ の固有値 ($0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$), n_j を λ_j の重複度とし, スペクトルゼータ関数 $\zeta_\Delta(s)$ を次で定義する.

$$\zeta_\Delta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} n_j \lambda_j^{-s} \quad \operatorname{Re} s > d/2. \quad (1.1)$$

ここで, d は G/K の次元である. 前回の表現論シンポジウムにおいて, セルバーグゼータ関数のローラン展開の係数として定義されるオイラーセルバーグ定数に関する研究発表 ([H]) を行い, $\Gamma \backslash G/K$ がコンパクトリーマン面である場合に, $\zeta_\Delta(2)$ をこのオイラーセルバーグ定数を用いて記述する公式を紹介した. $n \geq 3$ のときも同様に $\zeta_\Delta(n)$ がオイラーセルバーグ定数を用いて表せることが知られており, [HIKW], [St] によって, その関係式が本質的に n に関する漸化式の形で得られている.

本講演では, コンパクトリーマン面の場合も含めたコンパクトな局所対称リーマン多様体 $\Gamma \backslash G/K$ に関するスペクトルゼータ関数の整数点の値 $\zeta_\Delta(n)$ ($n > d/2$) をオイラーセルバーグ定数と $\zeta(n)$ たちを用いて表す公式を (漸化式ではなく) 一般式の形で明示的に記述することを主目的とする. さらに, コンパクトでない場合にも Γ が $SL_2(\mathbb{Z})$, 及び $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群の場合に限って, コンパクトの場合と同様の公式が記述できたので紹介する.

また, 応用として, Γ が四元数群である場合の ζ_Δ の数値計算を行ったので紹介したい. Theorem 4.1 から ζ_Δ がオイラーセルバーグ定数を用いて記述されているので, オイラーセルバーグ定数を計算することによって $\zeta_\Delta(n)$ の値が求まることがわかる. ここでは, 前回の講演の際に証明したオイラーセルバーグ定数の双曲元の和としての表示式 ([H]) を [AKN] によって得られたセルバーグゼータ関数の数論的表示を用いて書き直す, という方法をとった. 本講演ではさらに, $\{\zeta_\Delta(n)\}_{n \geq 2}$ の n に関する増大度が主に λ_1 に依っていることを利用して, ラプラシアンの第一固有値の数値評価を行った.

2 Preliminaries and Main result

G を実階数1の半単純リー群, K を G の極大コンパクト群とし, d を G/K の次元とする. $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K のリー環とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan 対合 θ に関する Cartan 分解とする. $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間とする. このとき, G/K の階数が1なので, $\dim \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = 1$ である. $\mathfrak{a}$ を, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ ($\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}$) となるように $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ を θ -stable に拡張した $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環とする. このとき, $A = \exp \mathfrak{a}$, $A_{\mathfrak{p}} = \exp \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, $A_{\mathfrak{k}} = \exp \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ とおく.

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}$ の複素化とする. このとき, Φ を $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}^{\mathbb{C}})$ のルートの集合, Φ^+ を Φ の元で正であるものたちのなす集合, P_+, P_- をそれぞれ $P_+ = \{\alpha \in \Phi^+ | \alpha \neq 0 \text{ on } \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\}$, $P_- = \Phi^+ - P_+$ とし, $\rho = 1/2 \sum_{\alpha \in P_+} \alpha$ とおく. $h \in A$ と $\mathfrak{a}$ 上の線形形式 λ に対して, ξ_{λ} を $\xi_{\lambda}(h) = \exp \lambda(\log h)$ で定義する. Σ を P_+ の元の $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ への制限とする. このとき, Σ は高々2つの元からなる集合であり, ある $\beta \in \Sigma$ に対して $\Sigma = \{\beta\}, \{\beta, 2\beta\}$ と書ける. $H_0 \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ を $\beta(H_0) = 1$ で定め, $\rho_0 = \rho(H_0)$ とおく.

Γ を co-compact torsion free な G の離散部分群とする. $C(\Gamma)$ を Γ の位数が有限でない半単純元の Γ 共役類のなす集合, $\text{Prim}(\Gamma)$ を Γ の素元のなす集合, $Z(\Gamma)$ を Γ の中心とする. $\gamma \in C(\Gamma)$ に対して, δ_{γ} を $\gamma = \delta_{\gamma}^j (j \geq 1)$ なる素元, $h(\gamma)$ を γ と共役な A の元とし, $h_{\mathfrak{p}}(\gamma) \in A_{\mathfrak{p}}$, $h_{\mathfrak{k}}(\gamma) \in A_{\mathfrak{k}}$ を $h(\gamma) = h_{\mathfrak{p}}(\gamma)h_{\mathfrak{k}}(\gamma)$ で定める. また, $N(\gamma)$ を $N(\gamma) = \exp(\beta(\log(h_{\mathfrak{p}}(\gamma))))$, $D(\gamma)$ を $D(\gamma) = N(\gamma)^{2\rho_0} \prod_{\alpha \in P_+} |1 - \xi_{\alpha}(h(\gamma))^{-1}|$ で定義する.

G/K の Plancherel 測度を $\mu(s)$ とする. 便宜上, 次を定義する.

$$\hat{\rho}_0 = \begin{cases} \rho_0, \\ \rho_0/2, \end{cases} \quad \bar{\mu}(r) = \begin{cases} \mu(r) & \text{if } G = SO(n, 1), \\ 2\mu(2r) & \text{if } G \neq SO(n, 1). \end{cases} \quad (2.1)$$

このとき, $\bar{\mu}(r)$ は

$$\bar{\mu}(s) := \pi C_G^{-1} P(r) \sigma(r), \quad (2.2)$$

と表されることが知られている. ここで, $C_G, P(r), \sigma(r)$ は次のように定まる ([Mi], [Wi]).

G	d	ρ_0	$\hat{\rho}_0$	C_G	$\sigma(r)$
$SO(2m-1, 1)$	$2m-1$	$m-1$	$m-1$	$2^{4m-6} \Gamma(m-1/2)^2$	1
$SO(2m, 1)$	$2m$	$m-1/2$	$m-1/2$	$2^{4m-4} \Gamma(m)^2$	$\tanh \pi r$
$SU(2m-1, 1)$	$4m-2$	$2m-1$	$m-1/2$	$2^{4m-5} \Gamma(2m-1)^2$	$\tanh \pi r$
$SU(2m, 1)$	$4m$	$2m$	m	$2^{4m-5} \Gamma(2m)^2$	$\coth \pi r$
$SP(m, 1)$	$4m$	$2m+1$	$m+1/2$	$2^{4m-1} \Gamma(2m)^2$	$\tanh \pi r$
F_4	16	11	11/2	$2^{19} \Gamma(8)^2$	$\tanh \pi r$

G	$P(r)$
$SO(2m-1, 1)$	$r^2 \prod_{j=0}^{m-2} (r^2 + j^2)$
$SO(2m, 1)$	$r \prod_{j=1}^{m-1} \{r^2 + (j-1/2)^2\}$
$SU(2m-1, 1)$	$r \prod_{j=1}^{m-1} \{r^2 + (j-1/2)^2\}^2$
$SU(2m, 1)$	$r^3 \prod_{j=1}^{m-1} (r^2 + j^2)^2$
$SP(m, 1)$	$r \{r^2 + (m-1/2)^2\} \prod_{j=1}^{m-1} \{r^2 + (j-1/2)^2\}^2$
F_4	$r(r^2 + 1/4)^2 (r^2 + 9/4)^2 (r^2 + 25/4) (r^2 + 49/4) (r^2 + 81/4)$

(2.3)

Special values of the spectral zeta functions

λ_j を $\Gamma \backslash G / K$ 上のラプラシアン Δ の固有値 ($0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$), r_j を $\lambda_j = \rho_0^2 + r_j^2$ で定まる値, n_j を λ_j の重複度とする. このとき, スペクトルゼータ関数 $\zeta_\Delta(s)$ を次で定義する.

$$\zeta_\Delta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} n_j \lambda_j^{-s} \quad s > d/2. \quad (2.4)$$

関数 f をフーリエ変換 $\hat{f}(r) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixr} dx$ が次の条件を満たすものとする.

- 1) $\hat{f}(r) = \hat{f}(-r)$,
 - 2) $\hat{f}$ が $\{|\operatorname{Im} r| \leq \rho_0 + \delta\}$ で正則であるような $\delta > 0$ が存在する,
 - 3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\hat{f}(r) = O(|r|^{-d-\varepsilon})$ as $|r| \rightarrow \infty$ である.
- このとき, 次のセルバーグ跡公式が成り立つ ([Ga]).

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} \hat{f}(r_j) &= \sum_{\gamma \in C(\Gamma) - Z(\Gamma)} \log N(\delta_\gamma) D(\gamma)^{-1} N(\gamma)^{\rho_0} f(\log N(\gamma)) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \operatorname{vol}(\Gamma \backslash G) [Z(\Gamma)] \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \mu(r) dr. \end{aligned} \quad (2.5)$$

セルバーグゼータ関数を次で定義する.

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{\delta \in \operatorname{Prim}(\Gamma)} \prod_{\lambda \in L} (1 - \xi_\lambda(h(\delta))^{-1} N(\delta)^{-s})^{m_\lambda} \quad \operatorname{Re} s > 2\rho_0. \quad (2.6)$$

ここで, L を $L := \{\sum_{i=1}^l m_i \alpha_i \mid \alpha_i \in P_+, m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, m_λ を $\lambda = \sum_{i=1}^l m_i \alpha_i \in L$ となる相異なる $(m_1, \dots, m_l)$ の個数である. このとき, $Z_\Gamma(s)$ の対数微分は次で書ける.

$$\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)} = \sum_{\gamma \in C(\Gamma) - Z(\Gamma)} \log N(\delta_\gamma) D(\gamma)^{-1} N(\gamma)^{2\rho_0-s} \quad \operatorname{Re} s > 2\rho_0. \quad (2.7)$$

$Z'_\Gamma(s)/Z_\Gamma(s)$ は $s = 2\rho_0$ で 1 位の極を持つことが知られており, $s = 2\rho_0$ でのローラン展開は

$$\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)} = \frac{1}{s - 2\rho_0} + \tilde{\gamma}_\Gamma^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)} (s - 2\rho_0)^k. \quad (2.8)$$

と書ける. ここで, $\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$ は k 次のオイラーセルバーグ定数と呼ばれる定数で, 次のような表示を持つ ([H]).

$$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\substack{\gamma \in C(\Gamma) - Z(\Gamma) \\ N(\gamma) < x}} \log N(\delta_\gamma) D(\gamma)^{-1} (\log N(\gamma))^k - \frac{(\log x)^{k+1}}{k+1} \right\}. \quad (2.9)$$

本講演では, スペクトルゼータ関数の $s = n > d/2$ での値と上述のオイラーセルバーグ定数の間の関係式が次のように表されることを主定理とする.

Theorem 2.1. $n > d/2$ に対して、次が成り立つ.

$$(2\rho_0)^{2n}\zeta_\Delta(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-k-2}{n-1} (2\rho_0)^{k+1} \tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)} - \binom{2n-1}{n-1} + [Z(\Gamma)] \text{vol}(\Gamma \backslash G) I_G^{(n)},$$

ここで

$$I_G^{(n)} := C_G^{-1} \times \begin{cases} \sum_{l=2}^n A_l^{(n)} \left(\zeta(l) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2\rho_0} k^{-l} \right) - \frac{1}{2} A_0^{(n)}, & \text{if } G \neq SO(2m-1, 1), \\ \pi \sum_{m=1}^{(d-1)/2} (-1)^{m-1} p_{2m} \sum_{q=0}^{\min(2m, n-1)} \frac{(-2)^q}{(2m-q)!} \binom{2n-q-2}{n-1} & \text{if } G = SO(2m-1, 1), \end{cases}$$

$$A_l^{(n)} := (2\hat{\rho}_0)^l \sum_{m=1}^{d/2} (-1)^{m-1} \hat{\rho}_0^{2m-1} p_{2m-1} \sum_{q=0}^{\min(n-l, 2m-1)} \binom{2m-1}{q} \binom{2n-l-q-1}{n-1} (-2)^q.$$

であり、また、 p_m は $P(r) = \sum_{m=1}^{d-1} p_m r^m$ で定まる値である.

3 Theorem 2.1 の証明の概略

テスト関数として

$$\hat{f}(r) = (r^2 + a^2)^{-n},$$

$$f(x) = e^{-a|x|} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \binom{2n-k-2}{n-1} (2a)^{-2n+k+1} |x|^k$$

をとり ($n > d/2, a > \rho_0$), 跡公式(2.5) にあてはめると次の公式を得る.

$$(a^2 - \rho_0^2)^{-n} + \zeta_\Delta(n, a^2 - \rho_0^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k-2}{n-1} (2a)^{-2n+k+1} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{Z'_\Gamma}{Z_\Gamma} \right)^{(k)} (a + \rho_0) + \frac{\text{vol}(\Gamma \backslash G) [Z(\Gamma)]}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (r^2 + a^2)^{-n} \mu(r) dr. \quad (3.1)$$

ここで、 $\zeta_\Delta(n, x) = \sum_{j \geq 1} (\lambda_j + x)^{-n}$ である. λ_0 の寄与からあらわれる $(a^2 - \rho_0^2)^{-n}$ は

$$(a^2 - \rho_0^2)^{-n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k-2}{n-1} (2a)^{-2n+k+1} \{ (a - \rho_0)^{-(k+1)} + (a + \rho_0)^{-(k+1)} \}, \quad (3.2)$$

と書き換えられるので、(3.1) の左辺の第1項と右辺の第1項の差が

$$- (a^2 - \rho_0^2)^{-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k-2}{n-1} (2a)^{-2n+k+1} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{Z'_\Gamma}{Z_\Gamma} \right)^{(k)} (a + \rho_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k-2}{n-1} (2a)^{-2n+k+1} \left\{ \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{Z'_\Gamma}{Z_\Gamma} \right)^{(k)} (a + \rho_0) - (a - \rho_0)^{-k-1} - (a + \rho_0)^{-k-1} \right\} \quad (3.3)$$

となるので、あとは $a \rightarrow \rho_0$ とすればよい. $\square$

4 $G = SL_2(\mathbb{R})$ の数論的部分群の場合

$G = SL_2(\mathbb{R})$, $K = SO(2)$, Γ が co-compact torsion free な $SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群であるとき, Theorem 2.1 は次のように書ける.

$$\begin{aligned} \zeta_\Delta(n) = & \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-k-2}{n-1} \tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)} - \binom{2n-1}{n-1} \\ & + \frac{\text{vol}(\Gamma \backslash H)}{2\pi} \left[\sum_{l=2}^{n-1} \left\{ \binom{2n-l-1}{n-1} - 2 \binom{2n-l-2}{n-1} \right\} \zeta(l) + \zeta(n) \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで, H は上半平面である. Γ が co-compact だが torsion free でない (Γ が楕円元をもつ) 場合にも (4.1) と同様の公式を作ることができる. Section 4.1 では, その一例として四元数群に関してみていきたい. また, Γ が co-compact でない場合は, 跡公式中の散乱行列式を含む項が明示的に書けていないので, (4.1) と同様の公式を作ることは難しい. しかしながら, Γ が $SL_2(\mathbb{Z})$, および, $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群である場合には [He1] などによって散乱行列式が明示的に計算されているため, 公式の具体的な記述が可能である. Section 4.2 では $SL_2(\mathbb{Z})$ の場合に関する公式を紹介する.

4.1 四元数群

$a, b > 0$ を互いに素な平方因子をもたない整数とし, B を $B = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\alpha + \mathbb{Q}\beta + \mathbb{Q}\alpha\beta$ ($\alpha^2 = a, \beta^2 = b, \alpha\beta = -\beta\alpha$) で定義される $\mathbb{Q}$ 上の不定値四元数環とする. B の元 $q = q_0 + q_1\alpha + q_2\beta + q_3\alpha\beta$ ($q_i \in \mathbb{Q}$) に対して, $\bar{q}$, $n(q)$, $\text{tr } q$ をそれぞれ $\bar{q} = q_0 - q_1\alpha - q_2\beta - q_3\alpha\beta$, $n(q) = q\bar{q} = q_0^2 - q_1^2a - q_2^2b + q_3^2ab$, $\text{tr } q = q + \bar{q} = 2q_0$ で定義する. B の極大整環をひとつ選びそれを $\mathcal{O}$ と書く. B の判別式 d_B を $\mathcal{O}$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底 $\{u_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ を用いて次のように定義する.

$$d_B := |\det(\text{tr}(u_i, u_j))|^{1/2}. \quad (4.2)$$

このとき, d_B は $\mathcal{O}$ や $\{u_i\}$ のとりかたに依らない値であり, $B/\mathbb{Q}$ で分岐する素数 (このような素数は偶数個ある) の積と等しいことが知られている. B^1 , $\mathcal{O}^1$ をそれぞれ B , $\mathcal{O}$ の元であって $n(q) = 1$ である q からなる群とする. このとき, 群 $\mathcal{O}^1$ は次の写像によって $SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群 $\Gamma_{\mathcal{O}}$ と同一視される.

$$q \mapsto \begin{pmatrix} q_0 + q_1\sqrt{a} & q_2\sqrt{b} + q_3\sqrt{ab} \\ q_2\sqrt{b} - q_3\sqrt{ab} & q_0 - q_1\sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

$SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群 $\Gamma_{\mathcal{O}}$ は co-compact であり, 位数 2 または 3 の楕円元をもち得る. ν_2 , ν_3 をそれぞれ位数 2, 3 の楕円の共役類の個数とすると, $\nu_2, \nu_3, \text{vol}(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash H)$ はそれぞれ次のように定まる ([He2], [Sh]).

$$\text{vol}(\Gamma_{\mathcal{O}} \backslash H) = \frac{\pi}{3} \prod_{p|d_B} (p-1), \quad \nu_2 = \prod_{p|d_B} \left(1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\right), \quad \nu_3 = \prod_{p|d_B} \left(1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right). \quad (4.3)$$

ここで,

$$(-1/p) = \begin{cases} 0 & (p = 2), \\ 1 & (p \equiv 1 \pmod{4}), \\ -1 & (p \equiv 3 \pmod{4}), \end{cases} \quad (-3/p) = \begin{cases} 0 & (p = 3), \\ 1 & (p \equiv 1 \pmod{3}), \\ -1 & (p \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

である. この場合, 跡公式は次のように書ける.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(r_j) &= \sum_{\gamma \in \text{Hyp}(\Gamma)} \frac{\log N(\delta_\gamma)}{N(\gamma)^{1/2} - N(\gamma)^{-1/2}} f(\log N(\gamma)) + \frac{\text{vol}(\Gamma \setminus H)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) r \tanh \pi r dr \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\nu_2}{8} + \frac{\nu_3}{3\sqrt{3}} \cosh \frac{\pi r}{3} \right) \frac{\hat{f}(r)}{\cosh \pi r} dr. \end{aligned} \quad (4.4)$$

それゆえ, Theorem 2.1 と同様の方法で次の公式を得る.

Theorem 4.1. Γ を四元数環とする. このとき, $n \geq 2$ に対して次の公式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \zeta_{\Delta}(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-k-2}{n-1} \hat{\gamma}_{\Gamma}^{(k)} - \binom{2n-1}{n-1} \\ &\quad + \frac{\text{vol}(\Gamma \setminus H)}{2\pi} \left[\sum_{l=2}^{n-1} \left\{ \binom{2n-l-1}{n-1} - 2 \binom{2n-l-2}{n-1} \right\} \zeta(l) + \zeta(n) \right] \\ &\quad + \frac{\nu_2}{2} \sum_{l=1}^n \binom{2n-l-1}{n-1} \xi(l) + \frac{\nu_3}{3\sqrt{3}} \left[\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{[m/2]}}{m!} \binom{2n-m-1}{n-1} \left(\frac{\pi}{3} \right)^m \alpha_m \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{l=1}^{[n/2]} \sum_{m=0}^{n-2l} \frac{(-1)^{[m/2]}}{m!} \alpha_m \binom{2n-2l-m-1}{n-1} \xi(2l) + 2 \sum_{l=1}^n \binom{2n-l-1}{n-1} \alpha_{l+1} \eta(l) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \begin{cases} 1 & (m \text{ が奇数}), \\ \sqrt{3} & (m \text{ が偶数}), \end{cases} \\ \xi(l) &= \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} k^{-l} = \begin{cases} \log 2 & (l = 1), \\ (1 - 2^{1-l}) \zeta(l) & (l \geq 2), \end{cases} \\ \eta(l) &= \begin{cases} \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \cos \frac{\pi k}{3} k^{-l} & (l \text{ が奇数}), \\ \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \sin \frac{\pi k}{3} k^{-l} & (l \text{ が偶数}). \end{cases} \end{aligned}$$

4.2 $SL_2(\mathbb{Z})$

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ の場合について考える. カスプの個数を ν_∞ とすると,

$$\text{vol}(\Gamma \backslash H) = \frac{\pi}{3}, \quad \nu_2 = 1, \quad \nu_3 = 1, \quad \nu_\infty = 1$$

である. この場合, 跡公式は次のようになる ([He1]).

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(r_j) &= \sum_{\gamma \in \text{Hyp}(\Gamma)} \frac{\log N(\delta_\gamma)}{N(\gamma)^{1/2} - N(\gamma)^{-1/2}} f(\log N(\gamma)) + \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) r \tanh \pi r dr \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \cosh \frac{\pi r}{3} \right) \frac{\hat{f}(r)}{\cosh \pi r} dr \\ &\quad + f(0) \log \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \left\{ \frac{\Gamma'(\frac{1}{2} + ir)}{\Gamma(\frac{1}{2} + ir)} + \frac{\Gamma'(1 + ir)}{\Gamma(1 + ir)} \right\} dr + 2 \sum_{k \geq 1} \frac{\Lambda(k)}{k} f(2 \log k). \end{aligned} \quad (4.6)$$

それゆえ, Theorem 2.1 と同様の方法で次の公式を得る.

Theorem 4.2. Γ が $SL_2(\mathbb{Z})$ のとき, $n \geq 2$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \zeta_\Delta(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-k-2}{n-1} \tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)} - \binom{2n-1}{n-1} \\ &\quad + \frac{1}{6} \left[\sum_{l=2}^{n-1} \left\{ \binom{2n-l-1}{n-1} - 2 \binom{2n-l-2}{n-1} \right\} \zeta(l) + \zeta(n) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \binom{2n-l-1}{n-1} \xi(l) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{[m/2]}}{m!} \binom{2n-m-1}{n-1} \left(\frac{\pi}{3} \right)^m \alpha_m \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{l=1}^{[n/2]} \sum_{m=0}^{n-2l} \frac{(-1)^{[m/2]}}{m!} \alpha_m \binom{2n-2l-m-1}{n-1} \xi(2l) + 2 \sum_{l=1}^n \binom{2n-l-1}{n-1} \alpha_{l+1} \eta(l) \right] \\ &\quad + \sum_{l=2}^n \binom{2n-l-1}{n-1} 2^l \zeta(l) + \binom{2n-2}{n-1} (\log 2\pi + \gamma) - 2^{2n-1} \\ &\quad + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{2^{l+1}}{l!} \binom{2n-l-2}{n-1} \left(\frac{\zeta'}{\zeta} \right)^{(l)}(2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

講演者は, 合同部分群の場合にも同様の公式を導いているが, ここでは省略する.

5 四元数群に関する最小固有値 λ_1 の数値評価

この Section では, Theorem 4.1 を用いて四元数群に関する $\zeta_\Delta(n)$ の数値計算を行い, ラプラシアン の最小固有値 λ_1 の数値評価を行う. Theorem 4.1 の公式の右辺の中で, $\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$

以外は数値的に計算できる値なので, $\zeta_\Delta(n)$ の計算をするためには, $\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$ を計算すればよい. $\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$ たちは次のように計算される.

$G = SL_2(\mathbb{R})$ のとき, $\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$ は次のように表される ([HIKW], [H]).

$$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\substack{\gamma \in \text{Hyp}(\Gamma) \\ N(\gamma) < x}} \frac{\log N(\delta_\gamma)}{N(\gamma) - 1} (\log N(\gamma))^k - \frac{(\log x)^{k+1}}{k+1} \right\}, \quad (5.1)$$

ここで, $\text{Hyp}(\Gamma)$ は Γ の双曲的共役類のなす集合である. Γ が判別式 d_B の四元数群であるとき, [AKN] の結果を応用すると, (5.1) を次のように書き換えることができる.

$$\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{t=3}^T \sum_{\substack{u; u^2 | t^2 - 4 \\ d(t, u) \equiv 0, 1 \pmod{4}}} h(d(t, u)) \lambda(d(t, u)) \frac{2 \log \varepsilon_0(t, u)}{\varepsilon(t)^2 - 1} (2 \log \varepsilon(t))^k - \frac{(2 \log T)^{k+1}}{k+1} \right\}. \quad (5.2)$$

ここで

$$d(t, u) = \frac{t^2 - 4}{u^2},$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} (t + \sqrt{t^2 - 4}) = \frac{1}{2} (t + u \sqrt{d(t, u)}),$$

$$\varepsilon_0(t, u) = \min \left\{ \frac{1}{2} (t_0 + u_0 \sqrt{d(t, u)}) \left| \left(\frac{1}{2} (t_0 + u_0 \sqrt{d(t, u)}) \right)^k = \varepsilon(t), \quad \exists k \geq 1 \right. \right\},$$

$$\lambda(d) := \begin{cases} 0 & (\text{ある } p | d_B \text{ に対して, } p^2 | d, d/p^2 \equiv 0, 1 \pmod{4} \text{ が成り立つ}), \\ \prod_{p | d_B} \left(1 - \left(\frac{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}{p} \right) \right) & (\text{otherwise}) \quad ((*/p) \text{ はアルティン記号}) \end{cases}$$

であり, $h(d)$ は判別式 $d > 0$ の二元二次形式の狭義類数である. $h(d)$ に関しては [Sc], [Wa] など幾通りもの計算方法が確立されており, また, (5.2) の右辺の $h(d)$ 以外の値は容易に計算できる値なので, T をある程度大きいところまで計算することによって $\tilde{\gamma}_\Gamma^{(k)}$ の近似値を計算することができる.

このように求めた $\zeta_\Delta(n)$ たちを用いて, 次のように λ_1 を評価する.

スペクトルゼータ関数の定義から,

$$\begin{aligned} \zeta_\Delta(n)^{-1/n} &= \lambda_1 \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^n + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right)^n + \dots \right)^{-1/n}, \\ \frac{\zeta_\Delta(m)}{\zeta_\Delta(m+1)} &= \lambda_1 \frac{1 + (\lambda_1/\lambda_2)^m + (\lambda_1/\lambda_3)^m + \dots}{1 + (\lambda_1/\lambda_2)^{m+1} + (\lambda_1/\lambda_3)^{m+1} + \dots}, \end{aligned}$$

であるので,

$$\zeta_\Delta(n)^{-1/n} < \lambda_1 < \frac{\zeta_\Delta(m)}{\zeta_\Delta(m+1)} \quad (\forall n, m \geq 2), \quad (5.3)$$

$$\zeta_\Delta(n)^{-1/n}, \frac{\zeta_\Delta(m)}{\zeta_\Delta(m+1)} \rightarrow \lambda_1 \quad \text{as } n, m \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

Special values of the spectral zeta functions

が容易にわかる.

ここで,

$$\tilde{\gamma}_{\Gamma}^{(k)}(T) := \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \sum_{t=3}^T \sum_{\substack{u; u^2 | t^2 - 4 \\ d(t, u) \equiv 0, 1 \pmod{4}}} h(d(t, u)) \lambda(d(t, u)) \frac{2 \log \varepsilon_0(t, u)}{\varepsilon(t)^2 - 1} (2 \log \varepsilon(t))^k - \frac{(2 \log T)^{k+1}}{k+1} \right\}, \quad (5.5)$$

$$\zeta_{\Delta}(n, T) := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-k-2}{n-1} \tilde{\gamma}_{\Gamma}^{(k)}(T) - \binom{2n-1}{n-1} + \cdots \quad (\text{see (4.5)}), \quad (5.6)$$

を定義し, これらの値を ‘C++’ を用いて $T \leq 3.0 \times 10^6$ で計算したが, n の増加に伴い T に関する誤差が大きくなるため, 大きい n に関しては $\zeta_{\Delta}(n)$ の近似値を求めることは困難である. ここでは,

$$N := \max \left\{ n \geq 2 \mid 2.0 \times 10^6 \leq \forall T \leq 3.0 \times 10^6, \quad \left| \frac{\zeta_{\Delta}(n, 3.0 \times 10^6) - \zeta_{\Delta}(n, T)}{\zeta_{\Delta}(n, 3.0 \times 10^6)} \right| < 0.01 \right\}$$

とし,

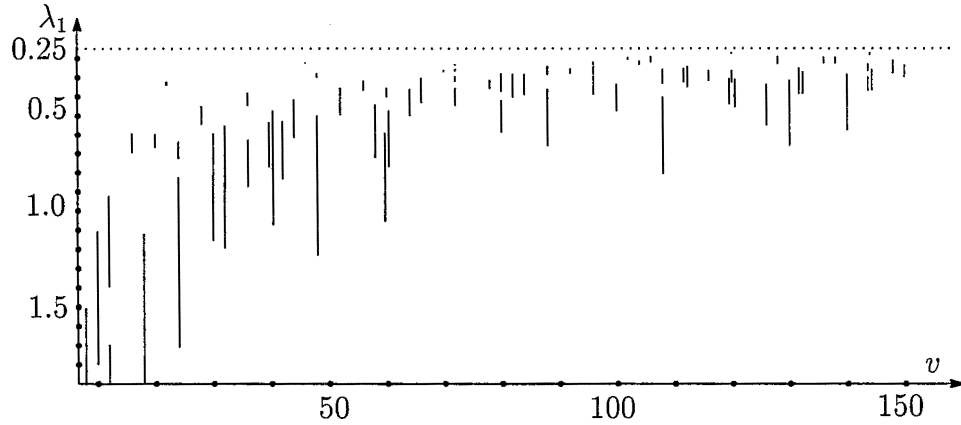
$$L := \zeta_{\Delta}(N, 3.0 \times 10^6)^{-1/N},$$

$$R := \zeta_{\Delta}(N-1, 3.0 \times 10^6) / \zeta_{\Delta}(N, 3.0 \times 10^6)$$

によって, λ_1 を評価することにする. このとき, L, R たちは次のような値をとる.

d	v	ν_2	ν_3	N	L	R	d	v	ν_2	ν_3	N	L	R
6	2	2	2	2	4.922	—	57	36	4	0	4	0.480	0.548
10	4	0	4	3	2.278	3.031	58	28	0	4	4	0.550	0.646
14	6	2	0	2	2.251	—	62	30	2	0	3	0.692	1.255
15	8	0	2	2	1.605	—	65	48	0	0	3	0.596	1.332
21	12	4	0	3	1.022	1.494	69	44	4	2	4	0.514	0.716
22	10	2	4	3	1.204	1.898	74	36	0	0	4	0.728	0.975
26	12	0	0	3	1.797	3.506	77	60	4	0	4	0.572	0.869
33	20	4	2	4	0.696	0.770	82	40	0	4	3	0.573	1.171
34	16	0	4	4	0.691	0.796	85	64	0	4	5	0.459	0.600
35	24	0	0	3	0.925	1.810	86	42	2	0	4	0.627	0.935
38	18	2	0	3	1.218	2.428	87	56	0	2	5	0.417	0.467
39	24	0	0	4	0.738	0.827	91	72	0	0	5	0.455	0.547
46	22	2	4	5	0.422	0.439	93	60	4	0	5	0.452	0.502
51	32	0	2	3	0.652	1.295	94	46	2	4	7	0.323	0.324
55	40	0	4	4	0.633	0.872	95	72	0	0	6	0.393	0.419

d	v	ν_2	ν_3	N	L	R	d	v	ν_2	ν_3	N	L	R
106	52	0	4	5	0.453	0.595	219	144	0	0	6	0.397	0.469
111	72	0	0	6	0.331	0.336	221	192	0	0	6	0.319	0.388
115	88	0	4	4	0.460	0.761	226	112	0	4	6	0.350	0.425
118	58	2	4	4	0.540	0.822	235	184	0	4	5	0.329	0.461
119	96	0	0	7	0.317	0.336	237	156	4	0	7	0.323	0.373
122	60	0	0	4	0.689	1.154	247	216	0	0	6	0.338	0.452
123	80	0	2	5	0.518	0.685	249	164	4	2	10	0.258	0.261
129	84	4	0	5	0.382	0.490	253	220	4	4	5	0.328	0.502
133	108	4	0	5	0.357	0.431	254	126	2	0	5	0.433	0.648
134	66	2	0	4	0.401	0.532	259	216	0	0	6	0.330	0.426
141	92	4	2	6	0.353	0.379	262	130	2	4	4	0.413	0.762
142	70	2	4	6	0.359	0.369	265	208	0	4	6	0.291	0.372
143	120	0	0	6	0.362	0.426	267	176	0	2	9	0.255	0.256
145	112	0	4	5	0.341	0.449	274	136	0	4	7	0.293	0.327
146	72	0	0	6	0.355	0.367	278	138	2	0	4	0.372	0.658
155	120	0	0	5	0.408	0.555	287	240	0	0	7	0.294	0.333
158	78	2	0	5	0.412	0.457	291	192	0	0	6	0.344	0.434
159	104	0	2	7	0.311	0.333	295	232	0	4	6	0.316	0.406
161	132	4	0	5	0.370	0.485	298	148	0	4	6	0.308	0.379
166	82	2	4	5	0.381	0.503	299	264	0	0	8	0.267	0.284
177	116	4	2	5	0.361	0.467	301	252	4	0	6	0.280	0.353
178	88	0	4	5	0.342	0.384	302	150	2	0	6	0.335	0.396
183	120	0	0	5	0.403	0.539	303	200	0	2	6	0.359	0.485
185	144	0	0	6	0.328	0.365	305	240	0	0	5	0.319	0.444
187	160	0	4	5	0.391	0.567	309	204	4	0	7	0.312	0.374
194	96	0	0	6	0.339	0.384	314	156	0	0	7	0.274	0.298
201	132	4	0	5	0.348	0.484	319	280	0	4	8	0.262	0.273
202	100	0	4	5	0.433	0.575	321	212	4	2	7	0.274	0.309
203	168	0	0	5	0.389	0.578	323	288	0	0	5	0.321	0.512
205	160	0	4	6	0.337	0.424	326	162	2	0	6	0.318	0.385
206	102	2	0	8	0.295	0.304	327	216	0	0	7	0.309	0.333
209	180	4	0	5	0.338	0.483	329	276	4	0	7	0.288	0.316
210	48	0	0	6	0.377	0.399	330	80	0	8	5	0.378	0.473
213	140	4	2	4	0.382	0.676	334	166	2	4	6	0.300	0.362
214	106	2	4	7	0.289	0.319	335	264	0	0	8	0.257	0.277
215	168	0	0	10	0.259	0.263	339	224	0	2	7	0.305	0.363
217	180	4	0	7	0.271	0.286	341	300	4	0	6	0.310	0.431
218	108	0	0	4	0.501	0.907	346	172	0	4	8	0.262	0.275



ここで,

$$d := d_B = p_1 p_2 \cdots p_{2l},$$

$$v := \text{vol}(\Gamma \backslash H) / (\pi/3) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_{2l} - 1),$$

である. また, グラフ中の点線... は $1/4$ を表している. ここで, λ_1 が $1/4$ より大きい
か小さいかは, セルバーグ予想 (Γ が $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群であるとき $\lambda_1 \geq 1/4$ である;
[Se]) をはじめとして, 非常に重要な問題である. 上のデータ中では L は全て $1/4$ より大
きいので, Γ が四元数群の場合にも $\lambda_1 \geq 1/4$ が成り立っているようにも思える. しかし
ながら, d , または v が大きいとき, 多くの場合 $L < 1/4$, $R > 1/4$ という結果しか得られ
ていない. 例えば, $d = 30030 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$ の場合 ($v = 5760$, $\nu_2 = \nu_3 = 0$),
 $L \doteq 0.214$, $R \doteq 0.301$ ($N = 10$) であるし, $d = 255255 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$ の場
合 ($v = 92160$, $\nu_2 = \nu_3 = 0$), $L \doteq 0.189$, $R \doteq 0.283$ ($N = 14$) である. このような場
合には, 今のところ, $\lambda_1 \geq 1/4$ の成立, 不成立は確認できていない.

Remark 5.1. [Se] において, 合同部分群に関して $\lambda_1 \geq 3/16$ が証明された. それ以後,
合同部分群の最小固有値評価に関する研究がいくつもなされており, 現在のところ最良
の評価は [Ki] による $\lambda_1 \geq 975/4096 = 0.238\dots$ である ([LRS], [KS] も参照されたい).

Remark 5.2. 前回の表現論シンポジウム ([H]) で, $SL_2(\mathbb{Z})$ の双曲類と原始的不定値
二元二次形式の同値類の間の対応を用いて $\tilde{\gamma}_{SL_2(\mathbb{Z})}^{(0)}$ の数値計算を行った. このことから,
Theorem 4.2. を使って $SL_2(\mathbb{Z})$ の場合の $\zeta_\Delta(n, T)$ を計算することができる. しかしなが
ら, [He1] によって $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ が

$$\lambda_1 = 91.5229\dots, \quad \lambda_2 = 148.4319\dots, \quad \lambda_3 = 190.1315\dots, \quad \dots$$

と大きな値をとることが知られており, このことから $\zeta_\Delta(n)$ の値が非常に小さいことが
予測される. それゆえ, 四元数群の場合と同じように $\zeta_\Delta(n, T)$ から $\zeta_\Delta(n)$ の近似値を計
算するためには非常に大きな T で計算を行わなければならない.

参考文献

- [AKN] T. Arakawa, S. Koyama and M. Nakasuji, *Arithmetic forms of Selberg zeta functions with applications to prime geodesic theorem*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **78** (2002), 120–125.
- [Ga] R. Gangolli, *Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one*, Illinois J. Math. **21** (1977), 1–41.
- [GW] R. Gangolli and G. Warner, *Zeta functions of Selberg's type for some noncompact quotients of symmetric spaces of rank one*, Nagoya Math. J. **78**(1980), 1–44.
- [H] Y. Hashimoto, *The Euler-Selberg constants for nonuniform lattices of rank one symmetric spaces*, Kyushu J. Math. **57**(2003), 347–370. (2002 年表現論シンポジウム講演集 p.91–110)
- [HIKW] Y. Hashimoto, Y. Iijima, N. Kurokawa and M. Wakayama, *Euler's constants for the Selberg and the Dedekind zeta functions*, to appear in Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.
- [He1] D. Hejhal, *The Selberg trace formula of $PSL(2, \mathbb{R})$ I, II*, Springer Lec. Notes in Math. **548**, 1001 Springer-Verlag, (1976, 1983).
- [He2] D. Hejhal, *A classical approach to a well-known spectral correspondence on quaternion groups*, Number theory (New York, 1983–84), 127–196, Lec. Notes in Math. **1135**, Springer, Berlin, 1985.
- [Ki] H. H. Kim, *Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2 (with Appendix 1 by D. Ramakrishnan and Appendix 2 by Kim and P. Sarnak)*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 139–183.
- [KS] H. H. Kim and F. Shahidi, *Cuspidality of symmetric powers with applications*, Duke Math. J. **112** (2002), 177–197.
- [LRS] W. Luo, Z. Rudnick and P. Sarnak, *On Selberg's eigenvalue conjecture*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 387–401.
- [Mi] R. Miatello, *On the Plancherel measure for linear Lie groups of rank one*, Manuscripta Math. **29** (1979), 249–276.
- [Sc] R. J. Schoof, *Quadratic fields and factorization*, Computational methods in number theory, Part II, Math. Centre Tracts, **155** (1982), 235–286.
- [Se] A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. Sympos. Pure Math. **8** Amer. Math. Soc., Providence (1965), 1–15.

Special values of the spectral zeta functions

- [Sh] H. Shimizu, *Hokei kansu. I. (Japanese) [Automorphic functions. I]* Second edition. Iwanami Shoten Kiso Sūgaku [Iwanami Lectures on Fundamental Mathematics], 8, Daisū [Algebra], Iwanami Shoten, Tokyo, 1984.
- [St] F. Steiner, *On Selberg's zeta function for compact Riemann surfaces*, Physics Lett. B **188** (1987), 447–454.
- [Wa] H. Wada, *A table of ideal class numbers of real quadratic fields*, Sophia Kokyuroku in Mathematics, **10**(1981).
- [Wi] F. L. Williams, *A factorization of the Selberg zeta function attached to a rank 1 space form*, Manuscripta Math. **77** (1992), 17–39.

HASHIMOTO, YASUFUMI

Graduate School of Mathematics, Kyushu University.

6-10-1, Hakozaki, Fukuoka, 812-8581 JAPAN.

hasimoto@math.kyushu-u.ac.jp