表現論シンポジウム講演集, 2002
pp.210-217

Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications

梶原 康史
神戸大学大学院自然科学研究科
e-mail:kaji@math.kobe-u.ac.jp

1 Introduction

本論説では最近筆者の得た多次元（底つき）超幾何級数に関する Euler 変換公式 [8] とその応用について概説する。

およそ 20 年前に Holman, Biedenharn, Louck によって導入された高次元の超幾何級数 [6], [5] は Lie 群 $SU(n)$ の表現論および量子力学を起源に持つ。その q-変形も含めて、これらは解析的整数論（$(q;q)_\infty^n$ の展開公式など）[10], [18] や cylindric partition[4] 等への応用も知られており、数々の興味深い変換公式、和公式も知られている [2],[14],[15],[16],[17],[19] （(底つき) 超幾何級数の性質等は [1],[3],[20] 等を参照のこと。本論説の記号の定義もこれらの本に概ね従う。)。

(q-) 超幾何関数の変換公式の中で重要なものとして超幾何関数の Euler 変換公式

$$ {}_2F_1\begin{bmatrix} a,b \\ c \end{bmatrix};u\Big] = (1-u)^{c-a-b}{}_2F_1\begin{bmatrix} c-a,c-b \\ c \end{bmatrix};q;u\Big] \tag{1.1}$$

や、その q-変形である、底つき (q-) 超幾何関数に関する Heine の第 3 変換公式（本論説では $0<q<1$ とする。）

$$ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};q;u\right] = \frac{(abu/c)_\infty}{(u)_\infty}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} c/a,c/b \\ c \end{matrix};q;abu/c\right] \tag{1.2}$$

が古典的に知られている。ここで ${}_{n+1}F_n$ は一般超幾何級数

$$ {}_{n+1}F_n\left[\begin{matrix} a_0, & a_1,\dots,a_n \\ & b_1,\dots,b_n \end{matrix};u\right] = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{[a_0]_k[a_1]_k\cdots[a_n]_k}{k![b_1]_k\cdots[b_n]_k}u^k. \tag{1.3}$$

を表し（$[z]_n = z(z+1)\cdots(z+n-1)$ は Pochhammer symbol）、また ${}_{r+1}\phi_r$ は底付き (q-) 一般超幾何級数

$$ {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} a_0,a_1,\dots a_r \\ c_1,\dots c_r \end{matrix};q;u\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(a_0)_n(a_1)_n\dots(a_r)_n}{(q)_n(c_1)_n\dots(c_r)_n}u^n. \tag{1.4}$$

を表す。ここで q-shifted factorial を

$$ (a)_\infty := (a;q)_\infty = \prod_{n\in\mathbb{N}}(1-aq^n), \quad (a)_k := (a;q)_k = \frac{(a)_\infty}{(aq^k)_\infty} \quad \text{for } k\in\mathbb{C}, \tag{1.5}$$

で定義する。

本論説では最近筆者の得た上の Euler の変換公式、Heine の第三変換公式の多次元化の公式とその応用について述べる。以下では主に底つき (q-) 超幾何級数の場合で議論を進めていく。

2 q-multiple hypergeometric series

まず、本論説では

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}\frac{\Delta(xq^\beta)}{\Delta(x)}u_1^{\beta_1}\cdots u_n^{\beta_n}\times(\text{basic hypergeometric stuff}) \tag{2.1}$$

(ここで $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{N}^n, |\beta|=\sum_{i=1}^n\beta_i$ であり、

$$\Delta(x)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)\quad\text{and}\quad\Delta(xq^\beta)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_iq^{\beta_i}-x_jq^{\beta_j})$$

は $x=(x_1,\dots,x_n), xq^\beta=(x_1q^{\beta_1},\dots x_nq^{\beta_n})$ の Vandermonde 行列式を表す。) の形をした形式的冪級数を (A_n 型) 多次元超幾何級数と呼ぶ。

まず、多次元底つき超幾何級数の変換公式、和公式の中で最も基本的なものの一つとして q-2 項定理

$$\frac{(bu)_\infty}{(u)_\infty}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(b)_n}{(q)_n}u^n$$

の多次元版 ([17], Theorem1.47)

Theorem 2.1.

$$\frac{(b_1\cdots b_nu)_\infty}{(u)_\infty} = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}(u)^{|\beta|}\frac{\Delta(xq^\beta)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(b_jx_i/x_j)_{\beta_i}}{(qx_i/x_j)_{\beta_i}} \tag{2.2}$$

が知られている。

ここで、多次元超幾何級数に関して、multiindexβ の長さが一定の範囲で和をとると、適当な変数の付け替えによって

$$\begin{aligned}&\sum_{\beta\in\mathbb{N}^{n+1},|\beta|=N}\frac{\Delta(xq^\beta)}{\Delta(x)}u_1^{\beta_1}\cdots u_{n+1}^{\beta_{n+1}}\times(\text{basic hypergeometric stuff}) &(2.3)\\ =&\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}\frac{\Delta(xq^\beta)}{\Delta(x)}\prod_1^n\frac{1-aq^{|\beta|+\beta_i}x_i/x_n}{1-ax_i/x_n}z_1^{\beta_1}\cdots z_n^{\beta_n}\times(\text{another basic hypergeometric stuff})\end{aligned}$$

となることに注意すると、(以下では、右辺のような形の級数を多次元 very-well-poised 底つき超幾何級数と呼ぶ。)

Corollary 2.1. (2.2) において、両辺の u^N の係数をとりだし、更にパラメータの付け

替えをすることにより、

$$\frac{(aq/b_1\cdots b_nc)_N}{(aq/c)_N}\prod_{1\le i\le n}\frac{(aqx_i/x_n)_N}{((aq/b_i)x_i/x_n)_N} \tag{2.4}$$
$$= \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n}\left(\frac{aq^{1+n}}{b_1\cdots b_nc}\right)^{|\beta|}\frac{\Delta(xq^\beta)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i\le n}\frac{1-bq^{|\beta|+\beta_i}x_i/x_n}{1-bx_i/x_n}$$
$$\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(b_jx_i/x_j)_{\beta_i}}{(qx_i/x_j)_{\beta_i}}\prod_{1\le i\le n}\frac{(cx_i/x_n)_{\beta_i}}{(aq^{1+N}x_i/x_n)_{\beta_i}}\frac{(q^{-N})_{|\beta|}}{(aq/c)_{|\beta|}}\prod_{1\le i\le n}\frac{(ax_i/x_j)_{|\beta|}}{((aq/b_i)x_i/x_j)_{|\beta|}}$$

が得られる。$n=1$ のとき、(2.4) は

$$\frac{(aq/bc)_N}{(aq/c)_N}\frac{(aq)_N}{(aq/b_1)_N} = {}_6\phi_5\left[\begin{matrix}a,\sqrt{a}q,-\sqrt{a}q,b,c,q^{-N}\\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b,aq/c,aq^{1+N}\end{matrix};q;\frac{aq^{1+N}}{bc}\right] \tag{2.5}$$

となり、右辺が *very-well-poised* 底つき超幾何級数で表せ、この式は *Bailey* の *terminating* ${}_6\phi_5$ の和公式として知られている。なお(2.3) の右辺は $n=1$ のとき、*very-well-poised* 底つき超幾何級数で表示が出来る。*very-well-poised (*底つき*)* 超幾何級数に関しては古典的にも様々な和公式、変換公式、そしてそれらの応用も知られている。また(2.4) の無限和のタイプの一般の *root* 系への拡張として、国内では伊藤雅彦氏の精力的な仕事がある。

3 Main result

野海と筆者 [7] は Macdonald 多項式の列型の昇降演算子の係数を explicit に決める必要から、(2.2) の（u の）多項式版を定数関数 1 が Macdonald の q-差分作用素の固有関数であることを表す恒等式

$$\begin{aligned} D_x(u;t,q)\cdot 1 &= \sum_{K\subset[1,\dots,n]}(-u)^{|K|}q^{\binom{|K|}{2}}\prod_{i\in K,j\notin K}\frac{1-qx_i/x_j}{1-x_i/x_j} \\ &= (u;q)_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

を然るべく特殊化をすることによって得た。(ここで

$$\begin{aligned} D_x(u;q,t) &:= \sum_{K\subset[1,\dots,n]}(-u)^{|K|}t^{\binom{|K|}{2}}\prod_{i\in K,j\notin K}\frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j}\prod_{i\in K}T_{q,x_i} \\ &= \sum_{r=0}^{n}(-u)^rD_r(x), \end{aligned} \tag{3.2}$$

は Macdonald[12] の可換な q-差分作用素 (Macdonald 作用素) の母関数。また T_{q,x_i} は変数 x_i に対する q-差分作用素 Macdonald 多項式は parttionλ によって parametrize される $x=(x_1,\dots,x_n)$ の対称多項式で、Macdonald 作用素の固有関数

$$D_x(u;q,t)P_\lambda(x;q,t) = P_\lambda(x;q,t)\prod_{i=1}^{n}(1-ut^{n-i}q^{\lambda_i}). \tag{3.3}$$

として特徴づけられる。)

Remark 3.1. (3.1) は Coxeter 群に関する Poincaré 多項式の恒等式 ([11], Theorem2.8) の A 型の場合にあたる。また(2.2) をうまく解析接続して u に関する Laurent 級数にまで伸ばしたものから、A 型の Macdonald 恒等式が導出される [17]。

その idea を用いて、最近筆者 [8] は Heine の第 3 変換公式の多次元版である公式を得た。

Theorem 3.1. *(Y.Kajihara [8] Theorem 1.1)*

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^n} u^{|\gamma|}\frac{\Delta(xq^\gamma)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}}\prod_{1\le i\le n,1\le k\le m}\frac{(b_kx_iy_k/x_ny_m)_{\gamma_i}}{(cx_iy_k/x_ny_m)_{\gamma_i}}\\
=\ &\frac{(a_1\cdots a_nb_1\cdots b_mu/c^m)_\infty}{(u)_\infty}\\
&\sum_{\delta\in\mathbb{N}^m}(a_1\cdots a_nb_1\cdots b_mu/c^m)^{|\delta|}\frac{\Delta(yq^\delta)}{\Delta(y)}\\
&\prod_{1\le k,l\le m}\frac{((c/b_l)y_k/y_l)_{\delta_k}}{(qy_k/y_l)_{\delta_k}}\prod_{1\le i\le n,1\le k\le m}\frac{((c/a_i)x_iy_k/x_ny_m)_{\delta_k}}{(cx_iy_k/x_ny_m)_{\delta_k}}.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Remark 3.2. $m=n=1$ のとき、(3.4) は Heine の第三変換公式(1.2) に帰着する。また、(3.4) の両辺の和をとる格子の次元は独立である。このような多次元（底つき）超幾何級数の恒等式は筆者の仕事以前には知られていなかった。標語的にいえば、先ほどの Remark までで'Macdonald (operator) meets Macdonald (identities).' といえるかも知れない。これ以降で論ぜられる応用も含めて少なくとも Macdonald 作用素および Macdonald 多項式は多次元超幾何関数に関するかなりの性質を孕んでいると言っていいと思われる。

上の恒等式は Macdonald 多項式の再生核

$$\begin{aligned}
\prod(x;y)=\prod_{1\le i\le n,1\le k\le m}\frac{(tx_iy_k)_\infty}{(x_iy_k)_\infty} &= \sum_{l(\lambda)\le min(n,m)} b_\lambda(q,t)P_\lambda(x;q,t)P_\lambda(y;q,t) \quad (3.5)\\
b_\lambda(q,t) &= \prod_{s\in\lambda}\frac{1-t^{l(s)+1}q^{a(s)}}{1-t^{l(s)}q^{a(s)+1}}
\end{aligned}$$

に関する自己共役性を表す式 (三町、野海による [13]) を然るべく特殊化して得られる。

Corollary 3.1. また、$m=1$ のとき、(3.4) は

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^n} u^{|\gamma|}\frac{\Delta(xq^\gamma)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}}\prod_{1\le i\le n}\frac{(bx_i/x_n)_{\gamma_i}}{(cx_i/x_n)_{\gamma_i}} \qquad (3.6)\\
=\ &\frac{(a_1\cdots a_nbu/c)_\infty}{(u)_\infty}\\
&{}_{n+1}\phi_n\left[\begin{matrix}c/b,(c/a_1)x_1/x_n,\ldots,(c/a_{n-1})x_{n-1}/x_n,c/a_n\\ cx_1/x_n,\ldots,cx_{n-1}/x_n,c\end{matrix};q,a_1\ldots a_nbu/c\right].
\end{aligned}$$

に帰着し、右辺の和をとる格子の次元が *1* なので一般底つき超幾何級数 ${}_{n+1}\phi_n$ で表せる。

4 Application

応用として、S.Milne によって知られていた (terminating balanced) ${}_3\phi_2$ の多次元版の非常に簡単な別証明が、この公式の特殊な場合を用いて行なうことが出来る。更に、その証明と同様の方法で、新たな数々の多次元超幾何級数に関する変換公式、和公式が得られる。

まず

Proposition 4.1. *(Pfaff-Saalschutz summation formula for basic hypergeometric series in $U(n+1)$)*

$$\begin{aligned}&\sum_{|\gamma|\le l} q^{|\gamma|}\frac{\Delta(xq^{\gamma})}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{\gamma_i}}{(qx_i/x_j)_{\gamma_i}}\prod_{1\le i\le n}\frac{(bx_i/x_n)_{\gamma_i}}{(cx_i/x_n)_{\gamma_i}}\frac{(q^{-l})_{|\gamma|}}{(a_1\cdots a_nbq^{1-l}/c)_{|\gamma|}}\\ =\ &\frac{(c/b)_l}{(c/a_1\cdots a_nb)_l}\prod_{1\le i\le n}\frac{((c/a_i)x_i/x_n)_l}{(cx_i/x_n)_l}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

は、Milne([17], Theorem 4.15) によって知られているが、(3.6) の両辺の u の冪を比較することによって 1 次元（${}_3F_2$）のとき

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}-l,a,b\\ c,a+b-c-l+1\end{matrix};1\right]=\frac{[c-a]_l[c-b]_l}{[c]_l[c-a-b]_l}\tag{4.2}$$

と同様に非常に簡略な証明をつけることが出来る。

また、多次元底つき超幾何級数特有の性質として、等式の片側（もしくは両辺）が多次元 very-well-poised（底つき）超幾何級数に関する和公式、変換公式も幾つか得られる。(3.4) に関して同様にすれば、$m=2, n=1$ のときに

$$\begin{aligned}&\frac{(c^2/ab_1b_2)_N}{(c/b_2)_N}\frac{(c)_N}{(c/a)_N}\frac{(y_2/y_1)_N}{((c/b_1)y_2/y_1)_N}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix}q^{-N},a,b_1y_1/y_2,b_2\\ q^{1-N}ab_1b_2/c^2,cy_1/y_2,c\end{matrix};q,q\right]\\ =\ &{}_8\phi_7\left[\begin{matrix}q^{-N}y_1/y_2,q^{1-\frac{N}{2}}\sqrt{y_1/y_2},-q^{1-\frac{N}{2}}\sqrt{y_1/y_2},c/b_1,(c/b_2)y_1/y_2,q^{-N},\\ q^{-\frac{N}{2}}\sqrt{y_1/y_2},-q^{-\frac{N}{2}}\sqrt{y_1/y_2},q^{1-N}(b_1/c)y_1/y_2,q^{1-N}(b_2/c),qy_1/y_2,\end{matrix}\right.\\ &\left.\begin{matrix}(c/a)y_1/y_2,q^{1-N}c^{-1}\\ q^{1-N}a/c,cy_1/y_2\end{matrix};q,ab_1b_2q/c^2\right].\end{aligned}\tag{4.3}$$

という変換公式を含むような多次元の（底つき）超幾何関数に関しての変換公式が得られる。主論文 [8] の中ではこれを Watson type の公式と呼んでいる。(以下、本論説では一般の $m,n\in\mathbb{N}$ での結果は式が冗長になるので省略する。一般の表示は [8] を参照のこと。)

また(3.4) において、$a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m=c^m$ と特殊化すれば、$n=m=2$ のときに

$$\frac{(a_2)_N}{(c/a_2)_N}\frac{(b_2)_N}{(c/b_2)_N}\frac{(y_2/y_1)_N}{((c/b_1)y_2/y_1)_N}\frac{(b_1y_1/y_2)_N}{(cy_1/y_2)_N}\frac{(cx_1/x_2)_N}{((c/a_1)x_1/x_2)_N}\frac{(a_1x_2/x_1)_N}{(x_2/x_1)_N}$$

$$ {}_{10}\phi_9\left[\begin{matrix} q^{-N}x_1/x_2, q^{1-\frac{N}{2}}\sqrt{x_1/x_2}, -q^{1-\frac{N}{2}}\sqrt{x_1/x_2}, a_1, a_2x_1/x_2, q^{-N}, \\ q^{-\frac{N}{2}}\sqrt{x_1/x_2}, -q^{-\frac{N}{2}}\sqrt{x_1/x_2}, q^{1-N}a_1^{-1}x_1/x_2, q^{1-N}a_2^{-1}, qx_1/x_2, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} F_1, G_1, F_2, G_2 \\ q^{1-N}x_1/x_2F_1, q^{1-N}x_1/x_2G_1, q^{1-N}x_1/x_2F_2, q^{1-N}x_1/x_2G_2 \end{matrix}; q, q\right]$$

$$= {}_{10}\phi_9\left[\begin{matrix} q^{-N}y_1/y_2, q^{1-\frac{N}{2}}\sqrt{y_1/y_2}, -q^{1-\frac{N}{2}}\sqrt{y_1/y_2}, c/b_1, (c/b_2)y_1/y_2, q^{-N}, \\ q^{-\frac{N}{2}}\sqrt{y_1/y_2}, -q^{-\frac{N}{2}}\sqrt{y_1/y_2}, q^{1-N}(b_1/c)y_1/y_2, q^{1-N}(b_2/c), qy_1/y_2, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} K_1, L_1, K_2, L_2 \\ q^{1-N}y_1/y_2K_1, q^{1-N}y_1/y_2L_1, q^{1-N}y_1/y_2K_2, q^{1-N}y_1/y_2L_2 \end{matrix}; q, q\right] \tag{4.4}$$

(ここで $i,k=1,2$ において

$$K_i=(c/a_i)x_iy_1/x_2y_2, \quad L_i=q^{1-N}c^{-1}x_2/x_i \tag{4.5}$$

$$F_k=b_kx_1y_k/x_2y_2, \quad G_k=q^{1-N}c^{-1}y_2/y_k \tag{4.6}$$

)、$n=2, m=1$ のときに、and

$$ {}_8\phi_7\left[\begin{matrix} q^{-N}x_1/x_2, q^{1-\frac{N}{2}}\sqrt{x_1/x_2}, -q^{1-\frac{N}{2}}\sqrt{x_1/x_2}, a_1, a_2x_1/x_2, q^{-N}, \\ q^{-\frac{N}{2}}\sqrt{x_1/x_2}, -q^{-\frac{N}{2}}\sqrt{x_1/x_2}, q^{1-N}a_1^{-1}x_1/x_2, q^{1-N}a_2^{-1}, qx_1/x_2, \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} F_1, G_1 \\ q^{1-N}x_1/x_2F_1, q^{1-N}x_1/x_2G_1, \end{matrix}; q, q\right]$$

$$= \frac{(c/b)_N}{(b)_N}\frac{(c/a_2)_N}{(a_2)_N}\frac{((c/a_1)x_1/x_2)_N}{(cx_1/x_2)_N}\frac{(x_2/x_1)_N}{(a_1x_2/x_1)_N} \tag{4.7}$$

(ここで

$$F_1=bx_1/x_2, \quad G_1=q^{1-N}c^{-1} \tag{4.8}$$

) を特殊な場合として含む公式が得られる。[8] ではそれを Bailey-Jackson type の公式と呼んでいる。

最後に(3.4) を 2 つ組合せることによって、Sears の公式

$$ {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-N}, a, b, c \\ d, e, f \end{matrix}; q, q\right] \tag{4.9}$$

$$= a^N\frac{(e/a)_N(f/a)_N}{(e)_N(f)_N}{}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-N}, a, d/b, d/c \\ d, aq^{1-N}/e, aq^{1-N}/f \end{matrix}; q, q\right], \quad (abc=defq^{N-1})$$

の多次元版も得られることを報告して、本論説を終える。

Remark 4.1. Sears の公式(4.9) の多次元版の応用については [9] にあるので、興味のある方は参考にされたい。

References

[1] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions.* Cambridge University Press, 1999.

[2] J.F.van Diejen, *On certain multiple Bailey, Rogers and Dougall type summation formulas.* Publ. RIMS. **33** (1997), pp 483–508.

[3] G. Gasper, M. Rahman, *Basic hypergeometric series.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, (G.C.Rota, ed.), vol. 35, Cambridge Univ. press, Cambridge, 1990.

[4] I.M. Gessel, C. Krattenthaler. *Cylindric partitions.* Trans. AMS, **349** (1997), 429–479.

[5] W. J. Holman, *Summation theorems for hypergeometric series in $U(n)$.* SIAM J. Math Anal. **11**(1980), pp523–532.

[6] W. J. Holman, L.C, Biedenharn, J.D.Louck, *On hypergeometric series well-poised in $SU(n)$.* SIAM J. Math Anal. **7**(1976), pp529–541.

[7] Y. Kajihara, M. Noumi,: *Raising operators of row type for Macdonald polynomials.* Compositio Math. **120** (2000), 119–136.

[8] Y. Kajihara,: *Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications.* to appear in Adv. in Math.

[9] Y. Kajihara,: *Some remarks on multiple Sears transformations.* Contemp. Math. **291** (2001), pp 139–145.

[10] V.E. Leininger, S.C. Milne. *Expansions for $(q)_\infty^{n^2+2n}$ and basic hypergeometric series in $U(n)$.* Discrete Math. **204**, (1999), 281–317.

[11] I.G. Macdonald, *The Poincaré series of a Coxeter groups.* Math. Ann. **199** (1972), 161–174.

[12] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd Edition.* Oxford Univ. Press,(1995).

[13] K. Mimachi, M. Noumi, *An integral representation of eigenfunction for Macdonald's q-difference operators.* Tohoku Math. J. **91**, (1997), 517–525.

[14] S.C. Milne. *An elementary proof of Macdonald identities for $A_l^{(1)}$.* Adv. in Math. **57**, (1985), 34–70.

[15] S.C. Milne. *A q-analogue of the Gauss summation theorem for hypergeometric series in $U(n)$.* Adv. in Math. **72**, (1988), 59–131.

[16] S.C. Milne. *A q-analogue of a Whipple's transformation of hypergeometric series in $U(n)$.* Adv. in Math. **108**, (1994), 1–76.

[17] S.C. Milne. *Balanced ${}_3\phi_2$ summation formulas for $U(n)$ basic hypergeometric series.* Adv. in Math. **131**, (1997), 93–187.

[18] S.C. Milne. *Infinite families of exact sum of squares formulas, Jacobi elliptic functions, continued fractions, and Schur functions.* Ramanujan J. **6** (2002), 7–149.

[19] M. Schlosser. *Multidimensional matrix inversions and A_r and D_r basic hypergeometric series.* Ramanujan J. **1**, (1997), 243–274.

[20] L.J. Slater, *Generalized hypergeometric functions.* Cambridge University Press, 1966.