

リーマン対称空間のスタイン拡張とその一般化

京都大学総合人間学部 松木 敏彦

1 Introduction

1.1 Akhiezer-Gindikin 領域と岩沢領域

$G_{\mathbb{C}}$ を連結複素半単純リー群、 $G_{\mathbb{R}}$ をその連結な real form とする。 K を $G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群とし、 $K_{\mathbb{C}}$ をその (連結な) 複素化とする。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ を対応する $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とする。 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{m}$ の 1 つの極大可換部分空間とし、

$$\mathfrak{t}^+ = \{Y \in \mathfrak{t} \mid |\alpha(Y)| < \frac{\pi}{2} \text{ for all } \alpha \in \Sigma\}$$

とおく。このとき **Akhiezer-Gindikin 領域** D が次の式で定義される ([AG])。

$$D = G_{\mathbb{R}}(\exp \mathfrak{t}^+)K_{\mathbb{C}}$$

$G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群 B を $G_{\mathbb{R}}B$ が $G_{\mathbb{C}}$ の閉集合になるように取ると、 $K_{\mathbb{C}}B$ は $G_{\mathbb{C}}$ の開部分集合になる。 $G_{\mathbb{C}}$ の部分集合 Ω を

$$\Omega = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid x^{-1}G_{\mathbb{R}}B \subset K_{\mathbb{C}}B\}$$

で定義する。 $G_{\mathbb{R}}B/B$ がコンパクトだから、 Ω は $G_{\mathbb{C}}$ の開部分集合である。 Ω の単位元を含む連結成分 Ω_0 は最近しばしば**岩沢領域**と呼ばれている。

注意 1 S_j ($j \in J$) を $G_{\mathbb{C}}$ の複素余次元 1 の $K_{\mathbb{C}}B$ 両側剰余類とし、 T_j を S_j の閉包とすると、 $K_{\mathbb{C}}B$ の補集合は $\bigcup_{j \in J} T_j$ と表わせる ([GM2] Theorem 2)。よって

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid x^{-1}G_{\mathbb{R}} \cap T_j = \emptyset \text{ for all } j \in J\} \\ &= \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid x \notin gT_j^{-1} \text{ for all } j \in J \text{ and } g \in G_{\mathbb{R}}\}. \end{aligned}$$

と表わせる。したがって、 Ω は無限個の複素超曲面族 $\{gT_j^{-1} \mid j \in J, g \in G_{\mathbb{R}}\}$ の union の補集合なのでスタインである。

この 2 つの領域が一致することすなわち

$$D = \Omega_0$$

は、 $G_{\mathbb{R}}$ が古典型および例外エルミート型のときに [GM1] において示された。[KS] においては独立に、古典型のときに $D \subset \Omega_0$ が示されている。他方、Barchini ([B]) は一般的かつ初等的な方法により $\Omega_0 \subset D$ を証明した。

最近、Huckleberry ([H], [FH]) は [BHH] (revised version) で示されたある関数 ρ の強多重劣調和性を用いて、inclusion

$$D \subset \Omega_0 \quad (\text{A})$$

を示した。(arXiv math の [BHH] にはひどい間違いが放置されているので注意しよう。)

しかしながら、実は (A) を示すのに複素解析はまったく必要ないのである。なぜならば、以下に示すようにこの問題は実リー群の 2 つの随伴 (associate) する対称部分群に関する問題に一般化でき、(A) の一般化を初等解析だけで証明することができるからである。

1.2 実リー群への一般化

G を連結実半単純リー群とし、 σ を G の involution とする。 σ と可換な G の Cartan involution θ を取り、 $H = G_0^\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}_0$, $H' = G_0^{\sigma\theta}$ とおく。このとき、 H と H' は互いに**随伴** (associate) する対称部分群と呼ばれる ([M1] など参照)。 $G = G_{\mathbb{C}}$ のとき、 $K_{\mathbb{C}}$ と $G_{\mathbb{R}}$ が随伴していることがわかる。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ を $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ の θ および σ に関する $+1, -1$ 固有空間分解とする。 $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$ の 1 つの極大可換部分空間とすると、linear form $\alpha : \mathfrak{t} \rightarrow i\mathbb{R}$ に対し、ルート空間

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [Y, X] = \alpha(Y)X \text{ for all } Y \in \mathfrak{t}\}$$

が定義され、

$$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}) = \{\alpha \in i\mathfrak{t}^* - \{0\} \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \alpha) \neq \{0\}\}$$

がルート系の公理をみたすこと ([R]) が知られている。 $Y \in \mathfrak{t}$ に対し $\theta(Y) = Y$ であるから、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \alpha)$ は

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \alpha) = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \alpha) \oplus \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \alpha).$$

と θ に関して $+1, -1$ 固有空間分解できる。 Σ の部分集合 $\Sigma(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t})$ を $\Sigma(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}) = \{\alpha \in i\mathfrak{t}^* - \{0\} \mid \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \alpha) \neq \{0\}\}$ で定義し、

$$\mathfrak{t}^+ = \{Y \in \mathfrak{t} \mid |\alpha(Y)| < \frac{\pi}{2} \text{ for all } \alpha \in \Sigma(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t})\}.$$

とおく。このとき、Akhiezer-Gindikin 領域の一般化が

$$D = H'T^+H$$

($T^+ = \exp \mathfrak{t}^+$) で定義できる。

P を G の放物型部分群であって $H'P$ が G の閉集合であるものとしよう。このとき、 HP は G の開部分集合になる ([M2])。 G の開部分集合

$$\Omega = \{x \in G \mid x^{-1}H'P \subset HP\} = \{x \in G \mid H'x \subset PH\}$$

の単位元の連結成分 Ω_0 は岩沢領域の一般化である。(A) の一般化として次の定理が成り立つ。

定理 $D \subset \Omega_0$

1.3 cycle space への応用

H と H' の役割を入れ替えることができることに注意しよう。これを $G_{\mathbb{C}}$ の中の $K_{\mathbb{C}}$ と $G_{\mathbb{R}}$ に適用すると次のようになる。 P を $G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群で $S = K_{\mathbb{C}}P$ が $G_{\mathbb{C}}$ の閉部分集合になるものとする。このとき、 $S' = G_{\mathbb{R}}P$ は $G_{\mathbb{C}}$ の開部分集合である。

$$\Omega(S) = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid x^{-1}K_{\mathbb{C}}P \subset G_{\mathbb{R}}P\}$$

とおくと、定理により、 $D^{-1} = K_{\mathbb{C}}T^+G_{\mathbb{R}} \subset \Omega(S)_0$ であり、よって

$$D \subset \Omega(S)_0^{-1}$$

である。しかるに $\Omega(S)^{-1} = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xK_{\mathbb{C}}P \subset G_{\mathbb{R}}P\} = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS \subset S'\}$ であるから $\Omega(S)_0^{-1}$ は通常 “cycle space” と呼ばれているものに他ならない。よって、次の知られた事実の直接的証明が得られた。

系 Akhiezer-Gindikin 領域 D はすべての cycle space に含まれる。

注意 2 [GM1] において、任意の $K_{\mathbb{C}}P$ 両側剰余類 S に対して cycle space の一般化を定義し、多くの具体例に基づいて、たいていの場合 (S が nonholomorphic type のとき) これらは D と一致するであろうと予想したが、最近 [FH] において、 $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型でない場合の任意の閉軌道 S に関してこの予想の証明が与えられているようである。(筆者には、まだその本質的な部分が難解で理解できていない。) 彼らの証明は「小林双曲性」という複素幾何的概念を用いるものである。これについても複素構造に関係無く証明できるはずのことと思われるので、研究中である。

もちろん、 $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型の方の方が容易ですでに知られている。これについては、[WZ1], [WZ2], [GM1], [GM2], [M5] を参照。

2 定理の証明の概要

定理の証明の概要は次のとおりである。詳細は [M4] を見ていただきたい。

$Y \in \mathfrak{t}^+$ とし、 $a = \exp Y$ とおく。 $\sigma_a = \text{Ad}(a)\sigma\text{Ad}(a)^{-1} = \sigma\text{Ad}(a)^{-2}$ は G の involution であって、

$$\mathfrak{g}^{\sigma_a} = \text{Ad}(a)\mathfrak{h}, \quad G_0^{\sigma_a} = aHa^{-1}$$

が成り立つ。[M3] のアイデアは $\mathfrak{g}$ の自己同型 $\tau\sigma_a$ (これは一般に involution にならない) を研究することであった。 $\tau\sigma_a$ に関する $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の固有空間分解を調べることで、次の補題が示せる。

補題 1 $\mathfrak{g}^{\tau\sigma_a} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(Y) = \{X \in \mathfrak{k} \mid [Y, X] = 0\}$

[M3] の Section 3 の議論と同様にして次の 2 つの命題が証明できる。これらはそれぞれ [AG] の Proposition 4 および Proposition 8 の一般化になっている。

命題 1 D は G の開部分集合である。

命題 2 $H' \backslash D/H \cong T^+/W$

ただし、 $W = W_{K \cap H}(\mathfrak{t}) = N_{K \cap H}(\mathfrak{t})/Z_{K \cap H}(\mathfrak{t})$.

ρ_0 を $\mathfrak{t}^+$ 上の W -不変実解析関数で原点以外の特異点を持たず、境界で $+\infty$ になるものとする。例えば

$$\rho_0(Z) = \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t})} \frac{1}{\pi - 2i\alpha(Z)}.$$

とおけばよい。このとき

$$\rho(\ell(\exp Z)h) = \rho_0(Z) \quad \text{for } \ell \in H', h \in H \text{ and } Z \in \mathfrak{t}^+.$$

によって、 D 上の実解析関数 ρ が定義できることが命題 2 を用いて示せる。

点 a における G の接空間 $T_a(G)$ は右からの a の作用によって $T_e(G)$ と同一視できるが、これは a における $\mathfrak{g}$ の左からの無限小作用 (infinitesimal action) を考えることと同じであることに注意しよう。補題 1 から導かれる次の補題が key lemma である。

補題 2 $Y \in \mathfrak{t}^+ - \{0\}$, $a = \exp Y$ とする。このとき $d\rho = 0$ で定義される $T_a(G)$ 内の超平面は $\mathfrak{g}$ の Killing form に関してある $\mathfrak{k}$ の元 $Z \neq 0$ と直交する。

証明 Da^{-1} 上の関数 ρ_a を

$$\rho_a(x) = \rho(xa)$$

で定義するとき、 $d\rho_a = 0$ で定義される $T_e(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$ 内の超平面を考えればよい。 ρ_a は左 H' -不変かつ右 aHa^{-1} -不変であるので、 $d\rho_a$ は $\mathfrak{h}' + \text{Ad}(a)\mathfrak{h}$ 上 0 である。したがって、超平面 $d\rho_a = 0$ の Killing form に関する normal vector Z は $\mathfrak{h}' + \text{Ad}(a)\mathfrak{h}$ の直交補空間 $\mathfrak{q}' \cap \text{Ad}(a)\mathfrak{q}$ に含まれる。

$$\mathfrak{g}^{\tau\sigma_a} = (\mathfrak{h}' \cap \text{Ad}(a)\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{q}' \cap \text{Ad}(a)\mathfrak{q})$$

([M3], Section 3) であるので、補題 1 により $Z \in \mathfrak{k}$ である。

q.e.d.

定理の証明 基本的考え方は [FH] の Proposition 2.0.2 と同じである。(しかしながら、複素解析は不要である。) $D \not\subset PH$ と仮定して矛盾を導けばよい。

PxH を D と交わる P - H 両側剰余類のうちで次元が最小のものとする。したがって、 $PxH \cap D$ は D の相対的閉部分集合である。 $H'P = (K \cap H)P$ ([M2]) だから

$$H' = (K \cap H)(P \cap H') = (P \cap H')(K \cap H)$$

となる。よって PxH は $(K \cap H)T^+$ と交わり、 $\rho|_{PxH \cap D}$ の値域と $\rho|_{(K \cap H)T^+ \cap D}$ の値域は等しい。 ρ を D の境界で $+\infty$ となるように取ったので、任意の $m \in \mathbb{R}$ に対し、集合

$$\{x \in (K \cap H)T^+ \mid \rho(x) \leq m\}$$

はコンパクトである。したがって、 $\rho|_{(K \cap H)T^+ \cap D}$ はある点 ka ($k \in K \cap H$, $a \in T^+$) において最小になる。 P を $k^{-1}Pk$ に取りかえることにより、 $k = e$ としてよい。また、 $a \in PxH$, $PxH \cap PH = \phi$ だから $a \neq e$ である。

$\rho|_{PxH \cap D}$ は a において最小であるから、補題 2 により、ある $Z \in \mathfrak{k}$ があって、 $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$ と直交する。しかるに、 Z は $\mathfrak{k}$ の元だから $\theta\mathfrak{p}$ と直交し、したがって、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + \theta\mathfrak{p}$ と直交する。 $\mathfrak{g}$ は半単純だからこのようなことは起こり得ない。 q.e.d.

References

- [AG] D. N. Akhiezer and S. G. Gindikin. On Stein extensions of real symmetric spaces. *Math. Ann.*, 286:1–12, 1990.
- [B] L. Barchini. Stein extensions of real symmetric spaces and the geometry of the flag manifold. preprint
- [BHH] D. Burns, S. Halverscheid and R. Hind. The geometry of Grauert tubes and complexification of symmetric spaces. preprint (CV/0109186)
- [FH] G. Fels and A. Huckleberry. Characterization of cycle domains via Kobayashi hyperbolicity. preprint (AG/0204341)
- [GM1] S. Gindikin and T. Matsuki. Stein extensions of Riemann symmetric spaces and dualities of orbits on flag manifolds. preprint (MSRI-Preprint 2001-028)
- [GM2] S. Gindikin and T. Matsuki. A remark on Schubert cells and duality of orbits on flag manifolds. preprint (RT/0208071)
- [H] A. Huckleberry. On certain domains in cycle spaces of flag manifolds. *Math. Annalen*, 323:797–810, 2002.
- [KS] B. Krötz and R. Stanton. Holomorphic extension of a representations: (I) automorphic functions. preprint (RT/0210111)
- [M1] T. Matsuki. The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups. *J. Math. Soc. Japan*, 31:331–357, 1979.

- [M2] T. Matsuki. Orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups. *Hiroshima Math. J.*, 12:307–320, 1982.
- [M3] T. Matsuki. Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions. *J. of Algebra*, 197:49–91, 1997.
- [M4] T. Matsuki. Stein extensions of Riemann symmetric spaces and some generalization. preprint (RT/0208175)
- [M5] T. Matsuki. Schubert cell と旗多様体上の軌道対応. to appear in 数理解析研究所講究録
- [R] W. Rossmann. The structure of semisimple symmetric spaces. *Canad. J. Math.*, 31:157–180, 1979.
- [WZ1] J. A. Wolf and R. Zierau. Linear cycle spaces in flag domains. *Math. Ann.*, 316:529–545, 2000.
- [WZ2] J. A. Wolf and R. Zierau. A note on the linear cycle spaces for groups of Hermitian type. to appear in *J. of Lie Theory*.