

CAPELLI IDENTITIES FOR REDUCTIVE DUAL PAIRS

伊藤 稔 (京大理)

Introduction. 一般の reductive dual pair に関する Capelli 型の等式について報告する.

不変式論で有名な Capelli 恒等式は多項式係数微分作用素環 (または Weyl 代数) の等式であり, 表現論的には普遍包絡環の中心と不変微分作用素の空間とのあいだのある自然な対応を生成元レベルで記述する等式だと見なせる. これと同様の等式が Clifford 代数においても成立する [N]. この Nazarov による等式も Capelli 恒等式と同じように普遍包絡環の中心と不変作用素の空間 (Clifford 代数における不変式環) との対応を生成元のレベルで記述する等式と見なせる.

このような普遍包絡環の中心と不変作用素の空間との対応は, より一般に dual pair の枠組みで成り立つ. すなわち, 同様の対応は複素 symplectic 群 Sp_k , 複素直交群 O_k における reductive dual pair とその oscillator 表現, spin 表現に成立しており, 上記の不変式環の対応はその特別な場合であるから見なせる. そこで本講演ではこのような dual pair の枠組みで Capelli 恒等式の類似を考えたい. 具体的には上記の Capelli と Nazarov の結果, つまり $(GL_r, GL_s) \subset Sp_{2rs}$ と $(GL_r, GL_s) \subset O_{2rs}$ という dual pair の場合に加えて, $(O_M, Sp_N) \subset Sp_{MN}$ と $(O_M, O_N), (Sp_M, Sp_N) \subset O_{MN}$ という dual pair の場合に普遍包絡環の中心と不変作用素の空間とを結び付ける Capelli 型の等式を与える. これで Sp_k , O_k における既約な reductive dual pair に関して Capelli 型の等式が揃うことになる.

通常 Capelli 恒等式に現れる普遍包絡環の中心元は Capelli element と呼ばれるもので, 行列式を用いて定義される. 昨年の表現論シンポジウムで報告したとおり, Sp_k における dual pair だけを考察する場合にはこのような行列式による普遍包絡環の中心元を考えれば十分である. しかし さらに O_k における dual pair も視野に入れると, 新たに permanent (行列式の定義から符号を除いたもの) で表される中心元が必要になってくる. 今回はこのような行列式, permanent によるふたつのタイプの中心元をめぐって議論を行う. これによって Sp_k における dual pair の等式にも新しい側面が現れる.

一般線型 Lie 環 $\mathfrak{gl}_r$ の普遍包絡環ではこれらの中心元は column-determinant, column-permanent と呼ばれる比較的単純な関数で定義され, 固有値の計算も容易にできた. これに対し Lie 環 $\mathfrak{o}_N, \mathfrak{sp}_N$ の普遍包絡環の中心元はより複雑な “対称化した行列式, permanent” を用いて表すことが必要になる. その固有値は直接計算するのは難しいが, [KV], [H3] などによる dual pair の分解に関する結果と本講演の主結果を応用することで求めることが

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

できる. 結論は $\mathfrak{gl}_r$ の場合によく対応しており, 特にこの行列式, permanent によるふたつの系列の中心元の母関数が互いに逆数になることがわかる (§7).

1. Capelli type elements for $\mathfrak{gl}_r$. まず, 基本的な場合として一般線型 Lie 環 $\mathfrak{gl}_r$ の普遍包絡環の中心元 $C_k^{\mathfrak{gl}_r}, D_k^{\mathfrak{gl}_r}$ を復習する. $C_k^{\mathfrak{gl}_r}$ は Capelli element と呼ばれるもので行列式を用いて表される. 一方 $D_k^{\mathfrak{gl}_r}$ は Nazarov による Capelli element の類似であり, 行列式の代わりに permanent を用いて表される. 以下, 複素数体上で議論を行う.

1.1. まず簡単に multi-index の記号を用意しておこう. r 個の非負整数の列

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$$

に対し

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_r!$$

とおく. また $\mathcal{I}_k^r$ を次のように定める:

$$\mathcal{I}_k^r = \{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \mid |\alpha| = k\}.$$

さらに $r \times s$ 行列 $Z = (Z_{ij})$ および $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$ に対し, 新しい行列 $Z_{\alpha\beta}$ を

$$Z_{\alpha\beta} = (Z_{i_\alpha j_\beta})_{1 \leq i \leq |\alpha|, 1 \leq j \leq |\beta|}$$

と定める. ただし i_α は $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ で決まる次の非減少列で定義される自然数である:

$$(1_\alpha, 2_\alpha, \dots, |\alpha|_\alpha) = (\overbrace{1, \dots, 1}^{\alpha_1}, \overbrace{2, \dots, 2}^{\alpha_2}, \dots, \overbrace{r, \dots, r}^{\alpha_r}).$$

これらの記号の下, 普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_r)$ の 2 系列の中心元を導入する. $E_{ij}^{\mathfrak{gl}_r}$ を Lie 環 $\mathfrak{gl}_r$ の標準的な基底として, これらを要素とする行列 $E^{\mathfrak{gl}_r} = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} \in \text{Mat}_r(U(\mathfrak{gl}_r))$ を考える. 普遍包絡環の元 $C_k^{\mathfrak{gl}_r}, D_k^{\mathfrak{gl}_r}$ を次のように定義する:

$$C_k^{\mathfrak{gl}_r} = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r} \frac{1}{\alpha!} \det(E_{\alpha\alpha}^{\mathfrak{gl}_r} + \mathbf{1}_{\alpha\alpha} \text{diag}(k-1, k-2, \dots, 0)),$$

$$D_k^{\mathfrak{gl}_r} = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r} \frac{1}{\alpha!} \text{per}(E_{\alpha\alpha}^{\mathfrak{gl}_r} - \mathbf{1}_{\alpha\alpha} \text{diag}(k-1, k-2, \dots, 0)).$$

記号の説明をしよう. まず $\mathbf{1}$ は単位行列を表す. また行列 E の要素は非可換であるから, 行列式および permanent の意味をきちんと定義する必要がある. 本講演では “det” と “per” はいわゆる column-determinant, column-permanent を表す. すなわち一般に非可換な要素からなる r 次の正方行列 Z に対し次のように定める:

$$\det Z = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \text{sgn}(\sigma) Z_{\sigma(1)1} \cdots Z_{\sigma(r)r}, \quad \text{per } Z = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} Z_{\sigma(1)1} \cdots Z_{\sigma(r)r}.$$

$C_k^{\mathfrak{gl}_r}$ は Capelli element と呼ばれ, 普遍包絡環の中心 $ZU(\mathfrak{gl}_r)$ の生成系となることが知られている. 一方 $D_k^{\mathfrak{gl}_r}$ は Nazarov によるその類似である. これもまた $ZU(\mathfrak{gl}_r)$ の生成系になることが知られている.

Remarks. (1) “det” と “per” をまとめて扱うために, $h^- = \det$, $h^+ = \text{per}$ という記号も導入しておく. こうすれば上記の定義は次のように書き直せる:

$$h^\varepsilon(Z) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} [\text{sgn}(\sigma)]_\varepsilon Z_{\sigma(1)1} \cdots Z_{\sigma(r)r}.$$

ここで $[\cdot]_\varepsilon$ は次を意味する:

$$[x]_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \varepsilon = +, \\ x, & \varepsilon = -. \end{cases}$$

(2) “det” と “per” は行の入れ替えについてそれぞれ交代制, 対称的である. しかし列の入れ替えについては必ずしもそうではない.

(3) $\det = h^-$ は行に関して交代制だから, $\alpha \in \{0, 1\}^r$ (すなわち $\alpha! \neq 1$) のときには次の等式が成立する:

$$\det(E_{\alpha\alpha}^{\mathfrak{gl}_r} + \mathbf{1}_{\alpha\alpha} \text{diag}(k-1, k-2, \dots, 0)) = 0.$$

よって, Capelli element は次のように書き直すことができる (普通はこれを定義とする):

$$C_k^{\mathfrak{gl}_r} = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r} \det(E_{\alpha\alpha}^{\mathfrak{gl}_r} + \text{diag}(k-1, k-2, \dots, 0)).$$

ただし $\mathcal{I}_k^r = \{\alpha \in \mathcal{I}_k^r \mid \alpha! = 1\}$ とする. 特に r 次の元はひとつの行列式で表される:

$$C_r^{\mathfrak{gl}_r} = \det(E^{\mathfrak{gl}_r} + \text{diag}(r-1, r-2, \dots, 0)).$$

また $C_{r+1}^{\mathfrak{gl}_r} = C_{r+2}^{\mathfrak{gl}_r} = \cdots = 0$ となることもわかる.

1.2. $C_k^{\mathfrak{gl}_r}$, $D_k^{\mathfrak{gl}_r}$ は普遍包絡環の中心元であるから, $\mathfrak{gl}_r$ の既約表現の上ではスカラー倍として作用する. この値, すなわち固有値は $\det$, per の定義に従って最高ウェイトベクトルへの作用を見ることが比較的容易に計算できる:

Proposition 1.1. ウェイト $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ で定まる $\mathfrak{gl}_r$ の既約表現 $\pi = \pi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \pi(C_k^{\mathfrak{gl}_r}) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r} (\lambda_{1_\alpha} + k - 1)(\lambda_{2_\alpha} + k - 2) \cdots \lambda_{k_\alpha}, \\ \pi(D_k^{\mathfrak{gl}_r}) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r} (\lambda_{1_\alpha} - k + 1)(\lambda_{2_\alpha} - k + 2) \cdots \lambda_{k_\alpha}. \end{aligned}$$

この関係は次のような母函数を用意すると見やすい:

$$C^{\mathfrak{gl}_r}(u) = \sum (-)^k C_k^{\mathfrak{gl}_r} u^{\overline{r-k}}, \quad D^{\mathfrak{gl}_r}(u) = \sum D_k^{\mathfrak{gl}_r} / u^{r+k}.$$

ただし $u^{\overline{k}}, u^{\underline{k}}$ は次のような階乗幂である:

$$u^{\overline{k}} = u(u+1) \cdots (u+k-1), \quad u^{\underline{k}} = u(u-1) \cdots (u-k+1).$$

Proposition 1.1 は次のように書き直せる:

Proposition 1.2. $\mathfrak{gl}_r$ の既約表現 $\pi = \pi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\pi(C^{\mathfrak{gl}_r}(u)) = (u-l_1) \cdots (u-l_r), \quad \pi(D^{\mathfrak{gl}_r}(u)) = \frac{1}{(u-l_1) \cdots (u-l_r)}.$$

ただし $l_i = \lambda_i + r - i$ とする.

特に重要な帰結として $C^{\mathfrak{gl}_r}(u) \cdot D^{\mathfrak{gl}_r}(u) = 1$ という関係が成立することがわかる.

Remark. 母函数 $C^{\mathfrak{gl}_r}(u)$ は固有多項式に似た n 次の行列式で書き表すこともできる:

$$C^{\mathfrak{gl}_r}(u) = \det(E - u\mathbf{1} + \text{diag}(r-1, r-2, \dots, 0)).$$

1.3. 函数 $h^\pm$ は計算は容易だが, あまり良い対称性を持たない. そのため $C_k^{\mathfrak{gl}_r}$ や $D_k^{\mathfrak{gl}_r}$ が普遍包絡環の中心元になることは, そのままの定義ではあまり確かめやすすくない. そこで行列式と permanent のより対称性の高い非可換化を用意する. 以下, 結合的代数 $\mathcal{A}$ の元を要素とする行列の空間 $\text{Mat}_r(\mathcal{A})$ の上の函数を考える.

まず $h^\pm$ の定義を参考にして, $Z = (Z_{ij}) \in \text{Mat}_r(\mathcal{A})$ の次のような函数を考える:

$$H^{\varepsilon\varepsilon'}(Z) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_r} [\text{sgn}(\sigma)]_\varepsilon [\text{sgn}(\sigma')]_{\varepsilon'} Z_{\sigma(1)\sigma'(1)} \cdots Z_{\sigma(r)\sigma'(r)}.$$

ただし $\varepsilon = \pm, \varepsilon' = \pm$ とする. イメージをつかみやすいように次の記号も用意する:

$$\det\text{-}\det Z = H^{--}(Z), \quad \text{per}\text{-}\text{per} Z = H^{++}(Z),$$

$$\det\text{-}\text{per} Z = H^{-+}(Z), \quad \text{per}\text{-}\det Z = H^{+-}(Z).$$

これらの函数は行, 列いずれについても交代的あるいは対称的になっている. Z の要素が可換なときには $\det\text{-}\det Z, \text{per}\text{-}\text{per} Z$ は通常の行列式, permanent に一致し, $\det\text{-}\text{per} Z, \text{per}\text{-}\det Z$ はゼロになってしまう (ただし $r = 1$ のときを除く) ことに注意する. 以下, 特に $\det\text{-}\det = H^{--}, \text{per}\text{-}\text{per} = H^{++}$ をさらに簡潔な記号 $\text{Det} = H^-$ および $\text{Per} = H^+$ で表して, それぞれ “対称化した行列式”, “対称化した permanent” と呼ぶことにする:

$$\text{Det} Z = H^-(Z) = \det\text{-}\det Z = H^{--}(Z), \quad \text{Per} Z = H^+(Z) = \text{per}\text{-}\text{per} Z = H^{++}(Z).$$

これをもとにさらに次の和で表される函数を考える:

$$\begin{aligned} H_k^\pm(Z) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r} \frac{1}{\alpha!} H^\pm(Z_{\alpha\alpha}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_k} \frac{1}{\alpha!} [\text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma')]_{\pm} Z_{\sigma(1)\alpha} \sigma'(1)_\alpha \cdots Z_{\sigma(k)\alpha} \sigma'(k)_\alpha. \end{aligned}$$

また次のようにパラメータを含むものも考えることにする:

$$\begin{aligned} H_k^\pm(Z; a_1, \dots, a_k) \\ = \frac{1}{k!} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_k} \frac{1}{\alpha!} [\text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma')]_{\pm} Z_{\sigma(1)\alpha} \sigma'(1)_\alpha(a_1) \cdots Z_{\sigma(k)\alpha} \sigma'(k)_\alpha(a_k). \end{aligned}$$

ただし $Z_{ij}(a) = Z_{ij} + \delta_{ij}a$ とする. このパラメータを含む函数は実際にはパラメータを含まないもので書き表せる (Proposition 5.3) が, Capelli 型の元を扱う上で便利である.

この $H_k^\pm$ は conjugation に関して不変である:

Proposition 1.3. $g \in GL_r = GL_r(\mathbb{C})$ に対して次の等式が成立する:

$$H_k^\pm(gZg^{-1}; a_1, \dots, a_k) = H_k^\pm(Z; a_1, \dots, a_k).$$

特に $H_k^\pm$ を用いて普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_r)$ の中心元を構成することができる:

Proposition 1.4. $H_k^\pm(E^{\mathfrak{gl}_r}; a_1, \dots, a_k)$ は $ZU(\mathfrak{gl}_r) = U(\mathfrak{gl}_r)^{GL_r}$ に属する.

これは Proposition 1.3 と行列 $E^{\mathfrak{gl}_r}$ の次の関係式から容易にわかる:

Lemma 1.5. $g \in GL_r$ に対し $(\text{Ad}(g)E_{ij}^{\mathfrak{gl}_r}) = {}^t g E_{ij}^{\mathfrak{gl}_r} {}^t g^{-1}$ という等式が成立する.

以下ではこの函数 $H_k^\pm$ を “Det_k”, “Per_k” という記号で表すことにする:

$$\begin{aligned} \text{Det}_k(Z) &= H_k^-(Z), & \text{Det}_k(Z; a_1, \dots, a_k) &= H_k^-(Z; a_1, \dots, a_k), \\ \text{Per}_k(Z) &= H_k^+(Z), & \text{Per}_k(Z; a_1, \dots, a_k) &= H_k^+(Z; a_1, \dots, a_k). \end{aligned}$$

1.4. 行列の要素が可換でなければ, $h^\pm$ と $H^\pm$ は一般には一致しない. しかし Lie 環 $\mathfrak{gl}_r$ の基底からなる行列 $E^{\mathfrak{gl}_r}$ については次のような関係が成り立つ:

Proposition 1.6. 行列 $E^{\mathfrak{gl}_r}$ に対し, 次の関係が成立する:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r} \frac{1}{\alpha!} h^\pm(E_{\alpha\alpha}^{\mathfrak{gl}_r} + u \mathbf{1}_{\alpha\alpha} \mp \mathbf{1}_{\alpha\alpha} \text{diag}(k-1, k-2, \dots, 0)) \\ = H_k^\pm(E^{\mathfrak{gl}_r} + u \mathbf{1}; \mp(k-1), \mp(k-2), \dots, 0). \end{aligned}$$

この命題の帰結として $C_k^{\mathfrak{gl}_r}$, $D_k^{\mathfrak{gl}_r}$, $C^{\mathfrak{gl}_r}(u)$ を次のように表示することができる:

$$\begin{aligned} C_k^{\mathfrak{gl}_r} &= \text{Det}_k(E^{\mathfrak{gl}_r}; k-1, k-2, \dots, 0), \\ D_k^{\mathfrak{gl}_r} &= \text{Per}_k(E^{\mathfrak{gl}_r}; -k+1, -k+2, \dots, 0), \\ C^{\mathfrak{gl}_r}(u) &= \text{Det}_r(E^{\mathfrak{gl}_r} - u1; r-1, r-2, \dots, 0). \end{aligned}$$

特に Proposition 1.4 からこれらが普遍包絡環の中心元であることがわかる.

2. The oscillator representation and the spin representation. 今節では oscillator 表現と spin 表現を復習する. これらはそれぞれ symplectic 群, 直交群の表現であり, Weyl 代数および Clifford 代数の言葉で表される. 今節の内容は大部分が[H3] による.

2.1. まず Weyl 代数を復習する. Weyl 代数は代数の構造としては多項式係数微分作用素環に他ならないのであるが, Clifford 代数と並行に議論するために以下のような導入の仕方をする. W を有限次元複素線型空間として, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をその上の symplectic 形式, つまり非退化で交代的な双線型形式とする. $T(W)$ を W 上のテンソル代数, $\mathcal{I}$ をその両側イデアルで

$$w_1 \otimes w_2 - w_2 \otimes w_1 - \langle w_1, w_2 \rangle 1, \quad w_1, w_2 \in W$$

という元から生成されるものとする. このとき W 上の Weyl 代数を $\mathcal{W}(W) = T(W)/\mathcal{I}$ で定義する. これは単純な結合的代数になることが知られている.

W の極大等方部分空間上の対称テンソル代数には以下のように自然に $\mathcal{W}(W)$ の既約加群の構造が入る. まず W のふたつの極大等方部分空間 V, V^* を $W = V \oplus V^*$ となるようにとると, この V^* は W の symplectic 形式を通じて V の双対空間と同一視できる. そこで $v \in V, v^* \in V^*$ に対し, 対称テンソル代数 $S(V)$ 上の線型作用素 $M^S(v), \partial^S(v^*)$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} M^S(v) &: v_1 \cdots v_k \mapsto v \cdot v_1 \cdots v_k, \\ \partial^S(v^*) &: v_1 \cdots v_k \mapsto \sum_{i=1}^k \langle v^*, v_i \rangle \cdot v_1 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_k. \end{aligned}$$

ただし $v_1, \dots, v_k \in V$ とする. また $\widehat{v_i}$ は v_i を除くことを意味する. このとき

$$\mathcal{W}(W) \supset W \ni v + v^* \mapsto M^S(v) + \partial^S(v^*)$$

という対応は $\mathcal{W}(W)$ から $\text{End}(S(V))$ の中への同型を導く. すなわち Weyl 代数 $\mathcal{W}(W)$ は “掛け算” $M^S(v)$ と “微分” $\partial^S(v^*)$ から生成される $\text{End}(S(V))$ の部分代数 $\text{End}^\circ(S(V))$ に同型となる. 対称テンソル代数 $S(V)$ は V の双対空間上の多項式環と同一視できるから, $\text{End}^\circ(S(V))$ は本質的に多項式係数微分作用素環に等しい.

Weyl 代数 $\mathcal{W}(W)$ には自然に symplectic 群 $Sp(W)$ が自己同型として作用する. この作用は次の意味で infinitesimal に内部自己同型である. すなわち $\mathcal{W}^2(W)$ を

$$w_1 w_2 + w_2 w_1, \quad w_1, w_2 \in W$$

というかたちの元で張られる $\mathcal{W}(W)$ の部分空間とすると, これは交換子積で Lie 環をなし, $\mathfrak{sp}(W)$ に同型になる. この $\mathcal{W}^2(W)$ の交換子積による $\mathcal{W}(W)$ への作用は上記の $Sp(W)$ の作用の微分表現に一致する. この $\mathcal{W}^2(W)$ を $\mathfrak{sp}(W)$ の “oscillator 表現” と呼ぶ. さらに $\mathfrak{sp}(W) \simeq \mathcal{W}^2(W)$ の適当な実型は Weyl 代数を適当な函数空間に作用させたとき実 symplectic 群の作用へ持ち上げることができる. これも oscillator 表現と呼ばれる.

2.2. 次に Clifford 代数と spin 表現を復習しよう. W を有限次元複素線型空間として, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をその上の非退化な交代的な双線型形式とする. $\mathcal{I}$ をテンソル代数 $T(W)$ の両側イデアルで次のかたちの元から生成されるものとする:

$$w_1 \otimes w_2 + w_2 \otimes w_1 - \langle w_1, w_2 \rangle 1, \quad w_1, w_2 \in W.$$

このとき Clifford 代数 $\mathcal{C}(W)$ を $\mathcal{C}(W) = T(W)/\mathcal{I}$ で定義する.

Weyl 代数と同様のことが直交群 $O(W)$ の $\mathcal{C}(W)$ への自然な作用についても成立する. $\mathcal{C}^2(W)$ を $\mathcal{C}(W)$ の部分空間で

$$w_1 w_2 - w_2 w_1, \quad w_1, w_2 \in W$$

というかたちの元で張られるものとする. するとやはり交換子積でこの $\mathcal{C}^2(W)$ は Lie 環をなし, $\mathfrak{o}(W)$ と同型になる. また交換子積による $\mathcal{C}(W)$ への作用は $O(W)$ の作用の微分表現に一致する. この $\mathcal{C}^2(W)$ を $\mathfrak{o}(W)$ の “spin 表現” と呼ぶ.

この $\mathcal{C}^2(W)$ を exponentiate することにより “spin 群” と呼ばれる $SO(W)$ の二重被覆群を得る. さらにこの spin 群を含む $O(W)$ の二重被覆群 “pin 群” が $\{w \in W \mid \langle w, w \rangle = 1\}$ から生成される $\mathcal{C}(W)$ の乗法群として実現できる. これらを $SO(W)$, $O(W)$ の double-valued な表現と見なしてそれぞれ “spin 表現”, “pin 表現” と呼ぶ. spin 群の conjugation による $\mathcal{C}(W)$ への作用は $SO(W)$ の $\mathcal{C}(W)$ への自然な自己同型作用に一致する. pin 群についても正確には符号のずれが生じるがほぼ同様のことが成立する.

W の次元が偶数のときには Clifford 代数 $\mathcal{C}(W)$ は単純代数となり, その既約加群は W の極大等方部分空間の外積代数として以下のように実現できる. V と V^* を W の極大等方部分空間で $W = V \oplus V^*$ をみたすものとする. W の双線型形式を通じて V^* は V の双対空間と同一視できる. そこで $v \in V$, $v^* \in V^*$ に対し, $\Lambda(V)$ に対する “掛け算” $M^\Lambda(v)$ および “微分” (いわゆる内部積) $\partial^\Lambda(v^*)$ を

$$M^\Lambda(v): v_1 \cdots v_k \mapsto v \cdot v_1 \cdots v_k,$$

$$\partial^\Lambda(v^*): v_1 \cdots v_k \mapsto \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \langle v^*, v_i \rangle \cdot v_1 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_k$$

で定める. ただし $v_1, \dots, v_k \in V$ とする. すると $W \ni v + v^* \mapsto M^\Lambda(v) + \partial^\Lambda(v^*)$ という対応は $\mathcal{C}(W) \simeq \text{End}^\circ(\Lambda(V))$ という同型を与える. ここで $\text{End}^\circ(\Lambda(V))$ は $M^\Lambda(v), \partial^\Lambda(v^*)$ から生成される $\text{End}(\Lambda(V))$ の部分代数であるが, 実際には $\text{End}(\Lambda(V))$ と一致する.

3. Reductive dual pairs and the images of universal enveloping algebras. W を複素 symplectic 空間とし, (G, G') を symplectic 群 $Sp(W)$ における reductive dual pair とする. すなわち G, G' は互いが互いの centralizer であるような $Sp(W)$ の reductive な部分群である. このとき G および G' で不変な Weyl 代数 $\mathcal{W}(W)$ の元はそれぞれ Lie 環 $\mathfrak{g}' = \text{Lie}(G')$, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ の oscillator 表現 ω による作用から生成される [H2]. 特に普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g}')$ の作用について次の等式が成立する:

$$(3.1) \quad \omega(U(\mathfrak{g})^G) = \mathcal{W}(W)^{G \times G'} = \omega(U(\mathfrak{g}')^{G'}).$$

ただし $U(\mathfrak{g})^G$ は G の adjoint 作用に関する $U(\mathfrak{g})$ の不変元全体のなす環, $\mathcal{W}(W)^{G \times G'}$ は $G \times G'$ 不変な Weyl 代数の元のなす環である.

同様の等式は直交群における dual pair およびその spin 表現に対しても成立する. W を非退化で対称な双線型形式をもつ複素ベクトル空間とする. (G, G') を複素直交群 $O(W)$ における reductive dual pair とする. このとき G および G' で不変な Clifford 代数 $\mathcal{C}(W)$ の元はそれぞれ Lie 環 $\mathfrak{g}' = \text{Lie}(G')$, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ の spin 表現 σ による作用から生成される [H2]. 特に普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g}')$ の作用について次の等式が成立する:

$$(3.2) \quad \sigma(U(\mathfrak{g})^G) = \mathcal{C}(W)^{G \times G'} = \sigma(U(\mathfrak{g}')^{G'}).$$

このように dual pair の一般論として三つの不変式環のあいだの等式が成立する. しかし, この等式は抽象的な議論の産物であり, 具体的にどの普遍包絡環の中心元がどの不変作用素に対応するのかを表しているわけではない. 以下この等式の生成元のレベルの具体的な記述を考える.

4. The Capelli type identities for $\mathfrak{gl}_r$. 今節では主結果の手本として Lie 環 $\mathfrak{gl}_r$ に関連した Capelli 型の等式を復習する. すなわち Capelli 恒等式そのものと Nazarov によるその比較的単純な類似である. 普通 Capelli 恒等式は多項式係数微分作用素の等式として表されるが, ここでは外積代数との比較のため Weyl 代数の枠組みで説明する.

4.1. $V = \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^s$ というテンソル積の空間を考える. この上の対称テンソル代数 $S(V)$ にはふたつの一般線型群 GL_r, GL_s , さらにその Lie 環 $\mathfrak{gl}_r, \mathfrak{gl}_s$ が自然に作用する. この作用 L^S, R^S は symplectic Lie 環 $\mathfrak{sp}_{2rs} = \mathfrak{sp}(V \oplus V^*)$ の oscillator 表現 ω を dual pair $(\mathfrak{gl}_r, \mathfrak{gl}_s)$ へ制限したものにスカラー作用の差を除いて一致する. 特に等式 (3.1) の特別な場合として次の等式が成立する:

$$(4.1) \quad L^S(ZU(\mathfrak{gl}_r)) = \text{End}^\circ(S(V))^{GL_r \times GL_s} = R^S(ZU(\mathfrak{gl}_s)).$$

不変式論で有名な Capelli 恒等式はこの等式の生成元レベルの記述と見なせる。このことを説明するためにまず $\mathfrak{gl}_r, \mathfrak{gl}_s$ の L^S, R^S による作用を具体的に表そう。 v_{ij} を V の標準的な基底, v_{ij}^* をその双対基底とする。これらの掛算と微分による $S(V)$ への作用を x_{ij}, x_{ij}^* という記号で表す:

$$x_{ij} = M^S(v_{ij}), \quad x_{ij}^* = \partial^S(v_{ij}^*).$$

さらにこれらを要素とする行列 $X = (x_{ij}), X^* = (x_{ij}^*)$ を考える。このとき $\mathfrak{gl}_r, \mathfrak{gl}_s$ の表現 L^S, R^S は次のように表される:

$$(4.2) \quad L^S(E^{\mathfrak{gl}_r}) = X^t X^*, \quad R^S(E^{\mathfrak{gl}_s}) = {}^t X X^*.$$

この枠組みで次の等式が成立する。Theorem 4.1 が Capelli によって与えられた Capelli 恒等式であり, Theorem 4.2 は Nazarov によるその類似である[N]:

Theorem 4.1 (The Capelli identity). 次の等式が成立する:

$$L^S(C_k^{\mathfrak{gl}_r}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r, \beta \in \mathcal{I}_k^s} \frac{1}{\alpha! \beta!} \det X_{\alpha\beta} \det X_{\alpha\beta}^* = R^S(C_k^{\mathfrak{gl}_s}).$$

Theorem 4.2. 次の等式が成立する:

$$L^S(D_k^{\mathfrak{gl}_r}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r, \beta \in \mathcal{I}_k^s} \frac{1}{\alpha! \beta!} \text{per } X_{\alpha\beta} \text{per } X_{\alpha\beta}^* = R^S(D_k^{\mathfrak{gl}_s}).$$

$C_k^{\mathfrak{gl}_n}, D_k^{\mathfrak{gl}_n}$ はそれぞれ普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心を生成するから, このふたつの定理は等式 (4.1) の生成元レベルの記述と見なせる。また (4.2) という関係に注意すると, 行列式, permanent の乗法公式 (正確には Cauchy-Binet 関係式) の非可換な類似とも見なせる。

Remarks. (1) 正確には L^S, R^S と oscillator 表現 ω との間には次のようなずれがある:

$$\omega(E^{\mathfrak{gl}_r}) = X^t X^* + \frac{s}{2} \mathbf{1}, \quad \omega(E^{\mathfrak{gl}_s}) = {}^t X X^* + \frac{r}{2} \mathbf{1}.$$

(2) Theorems 4.1, 4.2 の中辺に現れる行列式, permanent は行列成分が互いに可換であるから “普通の” 行列式, permanent である。また行列式が行, 列いづれについても交代式的であることに注意すると, Theorem 4.1 の中辺はより簡潔に次のように書ける:

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^r, \beta \in \mathcal{I}_k^s} \det X_{\alpha\beta} \det X_{\alpha\beta}^*.$$

4.2. 同様の等式が $V = \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^s$ の上の外積代数 $\Lambda(V)$ への作用に関して成立する。まずこの外積代数にはふたつの一般線型群 GL_r, GL_s , さらにその Lie 環 $\mathfrak{gl}_r, \mathfrak{gl}_s$ が自然に作

用する. この作用 L^Λ, R^Λ は $\mathfrak{o}_{2rs} = \mathfrak{o}(V \oplus V^*)$ の spin 表現 σ の dual pair $(\mathfrak{gl}_r, \mathfrak{gl}_s)$ への制限にスカラー作用の差を除いて一致する. そこで等式 (3.2) の特別な場合として次の等式が成立する:

$$(4.3) \quad L^\Lambda(ZU(\mathfrak{gl}_r)) = \text{End}^\circ(\Lambda(V))^{GL_r \times GL_s} = R^\Lambda(ZU(\mathfrak{gl}_s)).$$

この等式の記述として以下のようにやはり Capelli 恒等式の類似が成立する. まず $\Lambda(V)$ への作用 L^Λ, R^Λ を表すために, 次の作用素を考える:

$$y_{ij} = M^\Lambda(v_{ij}), \quad y_{ij}^* = \partial^\Lambda(v_{ij}^*).$$

さらにこれらを要素とする行列 $Y = (y_{ij}), Y^* = (y_{ij}^*)$ を考える. すると先程と同じように $\mathfrak{gl}_r, \mathfrak{gl}_s$ の L^Λ, R^Λ による作用は次のように表される:

$$L^\Lambda(E^{\mathfrak{gl}_r}) = Y^t Y^*, \quad R^\Lambda(E^{\mathfrak{gl}_s}) = {}^t Y Y^*.$$

これらの作用について次の等式が成立する[N]:

Theorem 4.3.

$$\begin{aligned} L^\Lambda(C_k^{\mathfrak{gl}_r}) &= (-)^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{\alpha \in I_k^r, \beta \in I_k^s} \frac{1}{\alpha! \beta!} \det Y_{\alpha\beta} \det Y_{\alpha\beta}^* \\ &= (-)^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{\alpha \in I_k^r, \beta \in I_k^s} \frac{1}{\alpha! \beta!} \text{per } {}^t Y_{\alpha\beta} \text{per } {}^t Y_{\alpha\beta}^* \\ &= (-)^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{\alpha \in I_k^r, \beta \in I_k^s} \frac{1}{\alpha! \beta!} \det\text{-per } Y_{\alpha\beta} \det\text{-per } Y_{\alpha\beta}^* = R^\Lambda(D_k^{\mathfrak{gl}_s}). \end{aligned}$$

Remarks. (1) 正確には L^Λ, R^Λ と spin 表現 σ との間には次のようなずれがある:

$$\sigma(E^{\mathfrak{gl}_r}) = Y^t Y^* - \frac{s}{2} \mathbf{1}, \quad \sigma(E^{\mathfrak{gl}_s}) = {}^t Y Y^* - \frac{r}{2} \mathbf{1}.$$

(2) Theorem 4.3 の第 2, 第 3 の等号は行列要素が互いに反可換であることに注意すれば容易にわかる. また $\det\text{-per}$ は行の入れ替えに関して交代式的であるから, ここに現れる和は実際には $\alpha \in I_k^r, \beta \in I_k^s$ という範囲で取れば十分である.

4.3. Theorems 4.1, 4.2, 4.3 はそれぞれ次のような母関数の等式に書き直せる:

$$\begin{aligned} L^S(C^{\mathfrak{gl}_r}(u)) &= R^S(C^{\mathfrak{gl}_s}(u + s - r)) \cdot u^{\underline{r-s}}, \\ L^S(D^{\mathfrak{gl}_r}(u)) &= R^S(D^{\mathfrak{gl}_s}(u + s - r)) \cdot \frac{1}{u^{\underline{r-s}}}, \\ L^\Lambda(C^{\mathfrak{gl}_r}(u)) &= (-)^n R^\Lambda(D^{\mathfrak{gl}_s}(-u + s + r - 1)) \cdot \frac{1}{u^{\underline{r+s}}}. \end{aligned}$$

§6 で見るように本講演の主結果はこのような母関数の等式として簡潔に表される.

5. Capelli type elements for $\mathfrak{o}_N$ and $\mathfrak{sp}_N$. 今節では主結果を述べるための準備として, Capelli elements の $U(\mathfrak{o}_N)$, $U(\mathfrak{sp}_N)$ での対応物を用意する. $U(\mathfrak{gl}_r)$ では $C_k^{\mathfrak{gl}_r}$, $D_k^{\mathfrak{gl}_r}$ は $h^\pm$ という関数で定義したが, これらが中心元であることは conjugation で不変な関数 $H_k^\pm$ で表示することで確かめられた. $U(\mathfrak{o}_N)$, $U(\mathfrak{sp}_N)$ においては (一部の実現を除けば) $h^\pm$ を用いて中心元を構成することが難しいため, 直接 $H_k^\pm$ で定義して議論する.

5.1. Proposition 1.4 で見たように, $H_k^\pm(E^{\mathfrak{gl}_r}; a_1, \dots, a_k)$ は普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_r)$ の中心元になる. 同様の結果は直交 Lie 環 および symplectic Lie 環 に対しても成立する. それを見るために, まず $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_N, \mathfrak{sp}_N$ に対して $E^{\mathfrak{gl}_r}$ に相当する行列を用意しよう. $G = O_N, Sp_N$ は非退化な対称または交代行列 J を用いて GL_N の部分群 $G = \{g \in GL_N \mid {}^t g J g = J\}$ として実現できる. すると Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_N, \mathfrak{sp}_N$ は $\mathfrak{gl}_N$ の中で $\mathfrak{g} = \{Z \in \mathfrak{gl}_N \mid {}^t Z J + J Z = 0\}$ と表される. そこでこの Lie 環の生成系として $F_{ij}^{\mathfrak{g}} = E_{ij}^{\mathfrak{gl}_N} - J^{-1} E_{ji}^{\mathfrak{gl}_N} J$ を取り, これらを要素とする行列 $F^{\mathfrak{g}} = (F_{ij}^{\mathfrak{g}})$ を考える. このとき次が成立する:

Proposition 5.1. $H_k^\pm(F^{\mathfrak{g}}; a_1, \dots, a_k)$ は $U(\mathfrak{g})^G$ に属する:

この命題は Proposition 1.4 と同様に次の $F^{\mathfrak{g}}$ の関係式に注意すれば Proposition 1.3 ($H_k^\pm$ の conjugation による不変性) から得られる:

Lemma 5.2. $g \in G$ に対し $(\text{Ad}(g)F_{ij}^{\mathfrak{g}}) = {}^t g \cdot F^{\mathfrak{g}} \cdot {}^t g^{-1}$ という等式が成立する.

5.2. Capelli element の $U(\mathfrak{o}_N)$, $U(\mathfrak{sp}_N)$ における対応物を考えよう. 安直には適当なパラメータとともに $\text{Det}_k = H_k^-$, $\text{Per}_k = H_k^+$ という関数で定義されるもの考えたくなるが, 実際にはそれだけではあまりうまく行かない. そこで Det_k , Per_k を少し変形した Det'_k , Per'_k という関数も用意して普遍包絡環の中心元を構成する. まず次の等式に注意する:

Proposition 5.3. N 次の正方行列 Z について次の等式が成立する:

$$H_k^\pm(Z; a_1, \dots, a_k) = \sum_{\bigwedge} \frac{(\pm N + k - 1)^l}{k^l} e_l(a_1, \dots, a_k) H_{k-l}^\pm(Z).$$

ただし e_l は l 次の基本対称式とする. $(\pm 1)^l$

これに注意して, $H_k'^\pm$ を次のように定義する:

$$H_k'^\pm(Z; a_1, \dots, a_k) = \sum_{l=0}^k \frac{(\pm N + k - 2)^l}{k^l} e_l(a_1, \dots, a_k) H_{k-l}^\pm(Z).$$

以下これを $\text{Det}'_k = H_k'^-$ および $\text{Per}'_k = H_k'^+$ と表すことにする.

この記号の下, $C_{2k}^{\mathfrak{gl}_r}$, $D_{2k}^{\mathfrak{gl}_r}$ の $\mathfrak{o}_N$, $\mathfrak{sp}_N$ の普遍包絡環での対応物として次を考える:

$$\begin{aligned} C_{2k}^{\mathfrak{o}_N} &= \text{Det}_{2k}(F^{\mathfrak{o}}; k-1, k-2, \dots, -k+1, 0), \\ D_{2k}^{\mathfrak{sp}_N} &= \text{Per}_{2k}(F^{\mathfrak{sp}}; k-1, k-2, \dots, -k+1, 0), \\ C_{2k}^{\mathfrak{sp}_N} &= \text{Det}'_{2k}(F^{\mathfrak{sp}}; k-1, k-2, \dots, -k+1, 0), \\ D_{2k}^{\mathfrak{o}_N} &= \text{Per}'_{2k}(F^{\mathfrak{o}}; k-1, k-2, \dots, -k+1, 0). \end{aligned}$$

これらは $U(\mathfrak{o}_N)^{O_N}$, $U(\mathfrak{sp}_N)^{Sp_N}$ の生成系となる. さらにこれらの母関数を用意しておく:

$$\begin{aligned} C^{\mathfrak{o}_N}(u) &= \sum C_{2k}^{\mathfrak{o}_N} u^{[N-2k]}, & D^{\mathfrak{sp}_N}(u) &= \sum D_{2k}^{\mathfrak{sp}_N} u^{[-N-2k]}, \\ C^{\mathfrak{sp}_N}(u) &= \sum C_{2k}^{\mathfrak{sp}_N} u^{[N-2k]'}, & D^{\mathfrak{o}_N}(u) &= \sum D_{2k}^{\mathfrak{o}_N} u^{[-N-2k]'} \end{aligned}$$

ここで $x^{[k]}$, $x^{[k]'}$ は次のような階乗幂の変形である:

$$x^{[k]} = x^{\overline{k-1}} \cdot x, \quad x^{[k]'} = x^{\overline{k+1}} \cdot x^{-1}.$$

ただし $k \geq 0$ に対して $x^{\overline{k}} = (x + \frac{k-1}{2})(x + \frac{k-3}{2}) \cdots (x - \frac{k-1}{2})$, $x^{\overline{-k}} = (x^{\overline{k}})^{-1}$ と定める.

Remarks. (1) $\text{Det}'_k = H_k'^{-}$ は次のように表すこともできる:

$$\text{Det}'_k(Z; a_1, \dots, a_k) = \text{Det}_k(\hat{Z}; a_1, \dots, a_k).$$

ここで $\hat{Z}$ は第 $N+1$ 行, 第 $N+1$ 列が 0 であることを除いて要素が Z に一致する $N+1$ 次の正方行列である:

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & Z & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

しかし $\text{Per}'_k = H_k'^{+}$ についてはこのような簡潔な表示は難しいようだ.

(2) $C_{2k}^{\mathfrak{o}_N}$ は [HU] の appendix で与えられた直交 Lie 環における Capelli element の類似に本質的に等しい. 実際, 直交 Lie 環を交代行列全体として実現したときにはこの元は column-determinant を用いて表すことができる [IU]. また $C_{2k}^{\mathfrak{o}_N}$, $D_{2k}^{\mathfrak{sp}_N}$ は次のような Pfaffian, Hafnian による表示も可能である:

$$\begin{aligned} C_{2k}^{\mathfrak{o}_N} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{2k}^{\prime N}} \text{Pf}(F^{\mathfrak{o}_N} J)_{\alpha\alpha} \text{Pf}(J^{-1} F^{\mathfrak{o}_N})_{\alpha\alpha}, \\ D_{2k}^{\mathfrak{sp}_N} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{2k}^N} \frac{1}{\alpha!} \text{Hf}(F^{\mathfrak{sp}_N} J)_{\alpha\alpha} \text{Hf}(J^{-1} F^{\mathfrak{sp}_N})_{\alpha\alpha}. \end{aligned}$$

(3) 母関数 $C^{\mathfrak{o}_N}(u)$ は $C^{\mathfrak{gl}_r}(u)$ と同様に次のような固有多項式に似た表示を持つ:

$$C^{\mathfrak{o}_N}(u) = \text{Det}_N(F^{\mathfrak{o}_N} - u\mathbf{1}; \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2, \dots, -\frac{N}{2} + 1, 0).$$

6. Main results. 以上の準備の下, 主結果を述べよう. つまり $(G, G') = (O_M, Sp_N) \subset Sp_{MN}$ および $(O_M, O_N), (Sp_M, Sp_N) \subset O_{MN}$ の場合に等式 (3.1), (3.2) の生成元レベルの対応を Capelli 恒等式の類似というかたちで与える. 以下で見るように幾つかの符号を除けばいずれの場合もほぼ同じかたちの等式が成立する. 今節では $m = M/2, n = N/2$ という記号の下で議論を行う (m, n は一般には半整数となる).

6.1. まず (O_M, Sp_N) の場合から見る (この結果は今年のシンポジウムの報告と本質的に同じである. [I5] を参照のこと).

V, V' を M 次元, N 次元の有限次元複素ベクトル空間とし, $(\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot)'$ をそれぞれの非退化な双線型形式とする. また $(\cdot, \cdot)$ は対称的, $(\cdot, \cdot)'$ は交代적であるとする. すると自然に $W = V \otimes V'$ に交代的な双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が入る:

$$\langle v_1 \otimes v'_1, v_2 \otimes v'_2 \rangle = (v_1, v_2)(v'_1, v'_2)'.$$

このとき $O_M = O(V), Sp_N = Sp(V')$ は自然に $Sp(W)$ の部分群と見なしたとき, 互いに dual pair をなす.

この設定で Capelli 恒等式の類似を考えるために, まず $\mathfrak{sp}(W)$ の oscillator 表現の $\mathfrak{o}_M, \mathfrak{sp}_N$ への制限 L, R を具体的に表そう. J, J' を V, V' それぞれの双線型形式に対応した対称行列, 交代行列とする. W の双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は標準的な基底 p_{ij} の等式として $\langle p_{ij}, p_{kl} \rangle = J_{ik}J'_{jl}$ と表される. Weyl 代数 $\mathcal{W}(W)$ の元を並べた次の行列を考える:

$$P = (p_{ij}), \quad P^* = (p_{ij}^*) = J^{-1} P^t J'^{-1}.$$

これらの行列要素は次の交換関係を満たす (ただし Z^{ij} は Z^{-1} の (i, j) 成分):

$$[p_{ij}, p_{kl}] = J_{ik}J'_{jl}, \quad [p_{ij}^*, p_{kl}^*] = J^{ki}J'^{lj}, \quad [p_{ij}^*, p_{kl}] = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

これらを用いて $\mathfrak{o}_M, \mathfrak{sp}_N$ の表現 L, R は次のように表される[H3]:

$$L(F^{\mathfrak{o}_M}) = P^t P^* + n\mathbf{1}, \quad R(F^{\mathfrak{sp}_N}) = {}^t P P^* + m\mathbf{1}.$$

このとき次のような Capelli 恒等式の類似が成立する:

Theorem 6.1. 次の等式が成立する:

$$L(\text{Det}_k(F^{\mathfrak{o}_M} - n\mathbf{1}; k-1, k-2, \dots, 0)) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^M, \beta \in \mathcal{I}_k^N} \frac{1}{\alpha! \beta!} \det P_{\alpha\beta} \det P_{\alpha\beta}^*.$$

Theorem 6.2. 次の等式が成立する:

$$L(C_{2k}^{\circ M}) = \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} (m-k+1)^{\bar{l}} (n-k+1)^{\bar{l}} (m-n-1)^l R(C_{2k-2l}^{\mathfrak{sp}_N}).$$

このふたつの定理のうち Theorem 6.1 は Capelli 恒等式の“左半分”の類似である。実際、 $(G, G') = (O_M, Sp_N)$ の場合に等式 (3.1) の第一の等号の生成元レベルの対応を表している。本来ならばさらに普遍包絡環 $U(\mathfrak{sp}_N)$ のどんな中心元の像になっているのかも合わせて書きたいところであるが、あまり簡潔には表せない。

一方 Theorem 6.2 は等式 (3.1) のふたつの普遍包絡環の不変式環の対応を生成元のレベルで記述している。証明は Theorem 6.1 よりもかなり難しい。これは次のような母函数のかたちで簡潔に書き直すことができる:

Corollary 6.3. 次の等式が成立する:

$$L(C^{\circ M}(u)) = R(C^{\mathfrak{sp}_N}(u)) \cdot u^{[M-N]}.$$

Remark. 行列 $P_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}^*$ の column-determinant は 対称化した行列式 $\text{Det} = \det\text{-}\det$ と一致するが、いわゆる row-determinant とは一般に一致しない:

$$\det P_{\alpha\beta} = \det\text{-}\det P_{\alpha\beta} \neq \det {}^t P_{\alpha\beta}, \quad \det P_{\alpha\beta}^* = \det\text{-}\det P_{\alpha\beta}^* \neq \det {}^t P_{\alpha\beta}^*.$$

特に Theorem 6.1 の右辺の和は $\alpha \in \mathcal{I}_k^M$, $\beta \in \mathcal{I}_k^N$ という範囲で取れば十分である。

6.2. 同じ設定の下で permanent で表される中心元の対応を見たい。この場合、先程の結果と比べて O_M と Sp_N の役割がほぼ反転する。そこで設定そのものを左右反転しておこう。

V, V' を M 次元, N 次元の有限次元複素ベクトル空間とし, $(\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot)'$ をそれぞれの非退化な双線型形式とする。ここで $(\cdot, \cdot)$ は交代制, $(\cdot, \cdot)'$ は対称的であるとすると、自然に $W = V \otimes V'$ に非退化で交代制な双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が入る。このとき $Sp_M = Sp(V)$, $O_N = O(V')$ は $Sp(W)$ の部分群と見なして、互いに dual pair をなす。

$\mathfrak{sp}(W)$ の oscillator 表現の $\mathfrak{sp}_M, \mathfrak{o}_N$ への制限 L, R は以下のように表される。 J, J' を V, V' それぞれの双線型形式に対応した交代行列, 対称行列とする。 p_{ij} を W の標準的な基底として、次のような行列を考える:

$$P = (p_{ij}), \quad P^* = J^{-1} P {}^t J'^{-1}.$$

これを用いて $\mathfrak{sp}_M, \mathfrak{o}_N$ の表現 L, R は次のように表される:

$$L(F^{\mathfrak{sp}_M}) = P {}^t P^* + n \mathbf{1}, \quad R(F^{\mathfrak{o}_N}) = {}^t P P^* + m \mathbf{1}.$$

これらについて先程と同じような次の関係式が成立する:

Theorem 6.4. 次の等式が成立する:

$$L(\text{Per}_k(F^{\text{sp}_M} - n\mathbf{1}; -k+1, -k+2, \dots, 0)) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^M, \beta \in \mathcal{I}_k^N} \frac{1}{\alpha! \beta!} \text{per } P_{\alpha\beta} \text{ per } P_{\alpha\beta}^*.$$

Theorem 6.5. 次の等式が成立する:

$$L(D_{2k}^{\text{sp}_M}) = \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} (-m-k+1)^{\bar{l}} (-n-k+1)^{\bar{l}} (-m+n-1)^l R(D_{2k-2l}^{\text{o}_N}).$$

Corollary 6.6. 次の等式が成立する:

$$L(D^{\text{sp}_M}(u)) = R(D^{\text{o}_N}(u)) \cdot u^{[-M+N]}.$$

この場合にも $P_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}^*$ について次の関係が成り立つ:

$$\text{per } P_{\alpha\beta} = \text{per-per } P_{\alpha\beta} \neq \text{per } {}^t P_{\alpha\beta}, \quad \text{per } P_{\alpha\beta}^* = \text{per-per } P_{\alpha\beta}^* \neq \text{per } {}^t P_{\alpha\beta}^*.$$

6.3. 次に (O_M, O_N) の場合を見よう. V, V' を M 次元, N 次元の有限次元複素ベクトル空間とし, $(\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot)'$ をそれぞれの非退化で対称的な双線型形式とする. すると自然に $W = V \otimes V'$ に非退化な対称双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が入る. このとき $O_M = O(V)$, $O_N = O(V')$ は $O(W)$ の部分群と見なして, 互いに dual pair をなす.

$\mathfrak{o}(W)$ の spin 表現の $\mathfrak{o}_M, \mathfrak{o}_N$ への制限 L, R は以下のように表される. J, J' を V, V' それぞれの双線型形式に対応した対称行列とする. p_{ij} を W の標準的な基底として, Clifford 代数 $\mathcal{C}(W)$ 元を要素とする次のような行列を考える:

$$P = (p_{ij}), \quad P^* = (p_{ij}^*) = J^{-1} P {}^t J'^{-1}.$$

これらの行列要素は次の交換関係を満たす (ただし $\{a, b\} = ab + ba$ とする):

$$\{p_{ij}, p_{kl}\} = J_{ik} J'_{jl}, \quad \{p_{ij}^*, p_{kl}^*\} = J^{ki} J'^{lj}, \quad \{p_{ij}^*, p_{kl}\} = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

これを用いて $\mathfrak{o}_M, \mathfrak{o}_N$ の表現 L, R は $\mathcal{C}(W)$ への準同型として次のように表される[H3]:

$$L(F^{\text{o}_M}) = P {}^t P^* - n\mathbf{1}, \quad R(F^{\text{o}_N}) = {}^t P P^* - m\mathbf{1}.$$

この場合にも次の Capelli 型の等式が成り立つ:

Theorem 6.7. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} L(\text{Det}_k(F^{\circ M} + n\mathbf{1}; k-1, k-2, \dots, 0)) \\ = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^M, \beta \in \mathcal{I}_k^N} \frac{1}{\alpha! \beta!} \det P_{\alpha\beta} \det P_{\alpha\beta}^*. \end{aligned}$$

Theorem 6.8. 次の等式が成立する:

$$L(C_{2k}^{\circ M}) = \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} (m-k+1)^{\bar{l}} (-n-k+1)^{\bar{l}} (m+n-1)^l R(D_{2k-2l}^{\circ N}).$$

Corollary 6.9. 次の等式が成立する:

$$L(C^{\circ M}(u)) = R(D^{\circ N}(u)) \cdot u^{[M+N]}.$$

行列 $P_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}^*$ について次の関係が成立する:

$$\det P_{\alpha\beta} = \det\text{-per } P_{\alpha\beta} \neq \text{per } {}^t P_{\alpha\beta}, \quad \det P_{\alpha\beta}^* = \det\text{-per } P_{\alpha\beta}^* \neq \text{per } {}^t P_{\alpha\beta}^*.$$

6.4. 最後に (Sp_M, Sp_N) の場合を見よう. V, V' を M 次元, N 次元の有限次元複素ベクトル空間とし, $(\cdot, \cdot)$, $(\cdot, \cdot)'$ をそれぞれの非退化で交代的な双線型形式とする. すると自然に $W = V \otimes V'$ に非退化な対称双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が入る. このとき $Sp_M = Sp(V)$, $Sp_N = Sp(V')$ は $O(W)$ の部分群と見なして, 互いに dual pair をなす.

$\mathfrak{o}(W)$ の spin 表現の $\mathfrak{sp}_M, \mathfrak{sp}_N$ への制限 L, R は以下のように表される. J, J' を V, V' それぞれの双線型形式に対応した対称行列とする. p_{ij} を W の標準的な基底として, Clifford 代数 $\mathcal{C}(W)$ の元を要素とする次のような行列を考える:

$$P = (p_{ij}), \quad P^* = J^{-1} P {}^t J'^{-1}.$$

これを用いて $\mathfrak{sp}_M, \mathfrak{sp}_N$ の表現 L, R は $\mathcal{C}(W)$ への準同型として次のように表される[H3]:

$$L(F^{\mathfrak{sp}_M}) = P {}^t P^* - n\mathbf{1}, \quad R(F^{\mathfrak{sp}_N}) = {}^t P P^* - m\mathbf{1}.$$

これらについて次の Capelli 型の等式が成り立つ:

Theorem 6.10. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} L(\text{Per}_k(F^{\mathfrak{sp}_M} + n\mathbf{1}; -k+1, -k+2, \dots, 0)) \\ = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_k^M, \beta \in \mathcal{I}_k^N} \frac{1}{\alpha! \beta!} \text{per } P_{\alpha\beta} \text{per } P_{\alpha\beta}^*. \end{aligned}$$

Theorem 6.11. 次の等式が成立する:

$$L(D_{2k}^{\mathfrak{sp}_M}) = \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} (-m-k+1)^{\bar{l}} (n-k+1)^{\bar{l}} (-m-n-1)^l R(C_{2k-2l}^{\mathfrak{sp}_N}).$$

Corollary 6.12. 次の等式が成立する:

$$L(D^{\mathfrak{sp}_M}(u)) = R(D^{\mathfrak{sp}_N}(u)) \cdot u^{[-M-N]}.$$

行列 $P_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}^*$ について次の関係が成立する:

$$\text{per } P_{\alpha\beta} = \text{per-det } P_{\alpha\beta} \neq \det {}^t P_{\alpha\beta}, \quad \text{per } P_{\alpha\beta}^* = \text{per-det } P_{\alpha\beta}^* \neq \det {}^t P_{\alpha\beta}^*.$$

7. The eigenvalues of the Capelli type elements. ここまで C , D という記号で表される中心元に関して Capelli 型の関係式を見てきた. 一般線型 Lie 環 $\mathfrak{gl}_r$ の場合にはこれらの中心元の固有値は容易に計算できた. というのはこの場合はこれらの元が column-determinant と column-permanent で表されていたからである. 一方 Lie 環 $\mathfrak{o}_N$, $\mathfrak{sp}_N$ の場合にはこのような表示はなく, 固有値を直接計算することは易しくない. しかし主結果をうまく利用することでその値を求めることができる:

Theorem 7.1. Lie 環 $\mathfrak{o}_N$ の既約表現 $\pi^{\mathfrak{o}_N} = \pi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n'})}^{\mathfrak{o}_N}$ に関して次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \pi^{\mathfrak{o}_N}(C^{\mathfrak{o}_N}(u)) &= \begin{cases} (u^2 - l_1^2) \cdots (u^2 - l_{n'}^2), & N: \text{even}, \\ u(u^2 - l_1^2) \cdots (u^2 - l_{n'}^2), & N: \text{odd}, \end{cases} \\ \pi^{\mathfrak{o}_N}(D^{\mathfrak{o}_N}(u)) &= \begin{cases} \frac{1}{(u^2 - l_1^2) \cdots (u^2 - l_{n'}^2)}, & N: \text{even}, \\ \frac{1}{u(u^2 - l_1^2) \cdots (u^2 - l_{n'}^2)}, & N: \text{odd}. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで n' は $n = N/2$ を越えない最大の整数とする. また $l_i = \lambda_i + n - i$ とする.

Theorem 7.2. Lie 環 $\mathfrak{sp}_N$ の既約表現 $\pi^{\mathfrak{sp}_N} = \pi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}^{\mathfrak{sp}_N}$ に関して次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \pi^{\mathfrak{sp}_N}(C^{\mathfrak{sp}_N}(u)) &= (u^2 - l_1^2) \cdots (u^2 - l_n^2), \\ \pi^{\mathfrak{sp}_N}(D^{\mathfrak{sp}_N}(u)) &= \frac{1}{(u^2 - l_1^2) \cdots (u^2 - l_n^2)}. \end{aligned}$$

ただし $n = N/2$, $l_i = \lambda_i + n - i + 1$ とする.

特に次の重要な関係式が成立することがわかる:

$$C^{\mathfrak{o}_N}(u) \cdot D^{\mathfrak{o}_N}(u) = 1, \quad C^{\mathfrak{sp}_N}(u) \cdot D^{\mathfrak{sp}_N}(u) = 1.$$

Theorems 7.1, 7.2 は Pfaffian を用いて計算された $C^{\mathfrak{o}_N}(u)$ の固有値に関する結果 [I2] を出発点にして, 我々の主結果を適用することで確かめられる. 実際, 固有値のレベルでは §6 で与えたような dual pair における普遍包絡環の中心の対応は [KV], [H3] などの表現の分解に関する結果からわかるため, これらを §6 の結果と照らし合わせることで中心元の固有値を計算することができるのである.

REFERENCES

- [Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.
- [Ca2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.
- [H1] R. Howe, *θ -series and invariant theory*, in “Automorphic Forms, Representations, and L -Functions” Part I, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 275–285.
- [H2] ———, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 823.
- [H3] ———, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond*, in “the Schur Lectures (1992),” Israel Math. Conf. Proc. **8**, 1995.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.
- [I1] M. Itoh, *Explicit Newton's formulas for $\mathfrak{gl}_n$* , J. Algebra **208** (1998), 687–697.
- [I2] ———, *Capelli elements for the orthogonal Lie algebras*, J. Lie Theory **10** (2000), 463–489.
- [I3] ———, *A Cayley-Hamilton theorem for the skew Capelli elements*, J. Algebra **242** (2001), 740–761.
- [I4] ———, *Correspondences of the Gelfand invariants in the reductive dual pairs*, preprint (2000).
- [I5] ———, *Capelli identities for the dual pair (O_M, Sp_N)* , preprint (2002).
- [IU] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, Compositio Math. **127** (2001), 333–359.
- [KV] M. Kashiwara and M. Vergne, *On the Segal–Shale–Weil representation and harmonic polynomial*, Invent. Math. **44** (1978), 1–47.
- [MVW] C. Mœglin, M.-F. Vignéras and J.-L. Waldspurger, *Correspondances de Howe sur un corps p -adique*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1291, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [M] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), 923–943.
- [MN] A. Molev and M. Nazarov, *Capelli identities for classical Lie algebras*, Math. Ann. **313** (1999), 315–357.
- [N] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.
- [NUW] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$* , Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.
- [U1] T. Umeda, *The Capelli identities, a century after*, Sūgaku **46** (1994), 206–227; (in Japanese); English transl. in “Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants,” AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu
- [U2] ———, *On the proof of the Capelli identities*, preprint (1997).
- [U3] ———, *Newton's formula for $\mathfrak{gl}_n$* , Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3169–3175.
- [U4] ———, *On Turnbull identity for skew symmetric matrices*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **43** (2000), 379–393.
- [Z] D.P. Želobenko, *Compact Lie Groups and their Representations*, Translations of Mathematical Monographs **40**, American Mathematical Society, 1973.