

Moment generating functions and multiple transitivity of group actions

木本 一史*

九州大学大学院数理学府

1 序

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の定義作用 $\mathfrak{S}_n \curvearrowright [n] := \{1, \dots, n\}$ に関する不動点の個数 fix_n の, 既約指標 χ^λ による重み付き冪和は

$$(1.1) \quad \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{fix}_n(\sigma)^k \chi^\lambda(\sigma) = \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} K_{\lambda, (n-j, 1^j)}$$

のように, 第2種スターリング数 $\left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\}$ とコストカ数 $K_{\lambda\mu}$ の積和になる ([K1]). ただし, 第2種スターリング数 $\left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\}$ は集合 $[k]$ を j 個の部分集合の disjoint union にわける総数であり, コストカ数 $K_{\lambda\mu}$ はたとえば完全対称関数 h_μ をシューア対称関数 s_λ で展開したときの係数として

$$(1.2) \quad h_\mu = \sum_{\lambda} K_{\lambda\mu} s_\lambda$$

のように現れる数である. 特に, 指標が付かない場合はスターリング数だけを用いて

$$(1.3) \quad \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{fix}_n(\sigma)^k = \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\}$$

となる. 不動点の個数は自然表現の指標を与えるから, 上の式は淡白に言えば, 自然表現のテンソル積表現の既約分解を表す式であり, 指標が付かない場合の式は自明表現の重複度を与えている. 式 (1.3) に現れる量は $n \geq k$ のときに k のみで決まり, その量を $\beta_k := \sum_{j=1}^k \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\}$ と書くことにする. β_k はベル数と呼ばれる.

*Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science, partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.12000766.

指標付きの一般的な式 (1.1) は対称群の表現論, 特に自然な包含列

$$(1.4) \quad \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3 \subset \mathfrak{S}_4 \subset \cdots$$

に関する表現の分岐則を用いて計算されるが, (1.3) については直接的に計算できる. 実際, 次が成り立つ ($k=1$ の場合がいわゆるフロベニウスの公式であり, 一般の k の場合もフロベニウスの公式から従う).

Proposition 1.1. 有限群 G が有限集合 X に作用しているとする. $g \in G$ による不動点の個数を $\text{fix}(g)$ と書くとき,

$$(1.5) \quad G \curvearrowright X \text{ が } k \text{ 重推移的} \iff \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \text{fix}(g)^k = \beta_k$$

である. □

ただし, 群の作用 $G \curvearrowright X$ が k 重推移的であるとは, X の相異なる k 個の元のからなる 2 つの列 $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)$ ($i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j, y_i \neq y_j$) を勝手に取ったときに, G の元 g が存在していつせいに $gx_i = y_i$ ($1 \leq i \leq k$) とできることをいうのだった.

つまり, (1.3) は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の定義作用が n 重推移的であることからの帰結である. ここで現れた量

$$(1.6) \quad m(k) = m(k; G \curvearrowright X) := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \text{fix}(g)^k$$

を, 確率論の言葉を拝借して k 次モーメントと呼ぶ. 上の命題は, モーメントが群作用の多重推移性, あるいは, 対称群の作用との差異を測っていることを示している.

2 モーメントと多重推移性

2.1 有限群の作用と階乗モーメント

G を有限群, X を有限集合として, G は X に作用しているとする. このとき, $g \in G$ に対してその不動点の個数を

$$(2.1) \quad \text{fix}(g; G \curvearrowright X) := \#\{x \in X \mid g.x = x\}$$

で表す. 文脈上 G や X が明らかな場合 (あるいは固定して議論している場合) には, 省略して $\text{fix}(g)$ のように書くこともある. 自然数 k に対して, 不動点の個数 $\text{fix}(\cdot; G \curvearrowright X)$ の k 階乗幂の G 上での平均を

$$(2.2) \quad m(k; G \curvearrowright X) := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \text{fix}(g; G \curvearrowright X)^k$$

とおき, $m(k; G \curvearrowright X)$ を k 次の階乗モーメントと呼ぶ. ただしここで

$$(2.3) \quad x^k := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ x(x-1)\cdots(x-k+1) & k > 0 \end{cases}$$

とおいた.

フロベニウスの公式としてよく知られているように, 1 次のモーメント $m(1; G \curvearrowright X)$ は X 上の G -軌道の個数に等しい. つまり,

$$(2.4) \quad G \curvearrowright X \text{ が推移的} \iff m(1; G \curvearrowright X) = 1$$

である. 群作用 $G \curvearrowright X$ が k 重推移的であるとは, それが誘導する作用

$$(2.5) \quad G \curvearrowright X^{(k)} := \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$$

が推移的であることであったので, 次が成り立つ.

Theorem 2.1. G を有限群, X を有限集合として, G は X に作用しているとする. このとき,

$$(2.6) \quad \begin{aligned} G \curvearrowright X \text{ が } k \text{ 重推移的} &\iff m(k; G \curvearrowright X) = 1 \\ &\iff m(k; G \curvearrowright X) = \beta_k \end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. 実際, $m(1; G \curvearrowright X^{(k)}) = m(k; G \curvearrowright X)$ であるから, フロベニウスの公式より従う. また後半は

$$(2.7) \quad m(k; G \curvearrowright X) = \sum_{j=1}^k \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} m(j; G \curvearrowright X)$$

より分かる. □

2.2 モーメント母関数

$m(k; G \curvearrowright X)$ たちの (指数関数型) 母関数

$$(2.8) \quad \mathcal{M}(x; G \curvearrowright X) := \sum_{j \geq 0} m(j; G \curvearrowright X) \frac{x^j}{j!}.$$

を, ここでは $G \curvearrowright X$ のモーメント母関数と呼ぶことにする. 容易に分かるように, この和は有限項で終わるので多項式になる. 定義からただちに分かる書き換えとして, 次の同値が成り立つ:

$$(2.9) \quad G \curvearrowright X \text{ が } k \text{ 重推移的} \iff \mathcal{M}^{(k)}(0) = 1.$$

また、次のような表示を持つことが分かる：

$$(2.10) \quad \mathcal{M}(x; G \curvearrowright X) = 1 + \sum_{g \in G} \frac{(1+x)^{\text{fix}(g)} - 1}{\#G}.$$

群作用 $G \curvearrowright X$ に対して、 G を含む群 $\tilde{G}$ が X を含む集合 $\tilde{X}$ に推移的に作用していて、 G が $x_0 \in \tilde{X} \setminus X$ の固定部分群となっているとき（このとき $\tilde{X} = X \amalg \{x_0\}$ である）、 $\tilde{G} \curvearrowright \tilde{X}$ は $G \curvearrowright X$ の推移拡大であるという。群作用とその推移拡大について、次が成り立つ。

Theorem 2.2. 群作用 $G \curvearrowright X$ が推移的であるとする。

(i) ある一点 $x_0 \in X$ の固定部分群を G' とし、 $X' = X \setminus \{x_0\}$ とおくと、

$$(2.11) \quad \mathcal{M}(x; G' \curvearrowright X') = \frac{d}{dx} \mathcal{M}(x; G \curvearrowright X).$$

(ii) もし推移拡大 $\tilde{G} \curvearrowright \tilde{X}$ が存在するならば、

$$(2.12) \quad \mathcal{M}(x; \tilde{G} \curvearrowright \tilde{X}) = 1 + \int_0^x \mathcal{M}(t; G \curvearrowright X) dt.$$

Proof. 各 l に対して、写像

$$G' \setminus X'^{(l)} \ni G'(p_1, \dots, p_l) \mapsto G(x_0, p_1, \dots, p_l) \in G \setminus X^{(l+1)}$$

が全単射であることから (i) が従う。(ii) は (i) より明らか。 □

Example 2.1. q を素数冪として、 $\mathbb{F}_q$ を q 元体とする。 $\mathbb{F}_q$ 上の特殊線型群 $SL_2(\mathbb{F}_q)$ は一次分数変換によって射影空間 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{F}_q \sqcup \{\infty\}$ に作用する：

$$(2.13) \quad g.z := \frac{az+b}{cz+d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_q).$$

この作用のモーメント母関数を計算すると次で与えられる。

$$(2.14) \quad \mathcal{M}(z; SL_2(\mathbb{F}_q) \curvearrowright \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \sum_{j=3}^{q+1} \frac{(q-2)!}{(q-j+1)!} \frac{z^j}{j!}.$$

$q=3$ のときだけ 4 重推移的になり、それ以外の場合は 3 重推移的な作用であることが見て取れる。 ■

2.3 観察：モーメント列

群作用 $G \curvearrowright X$ の階乗モーメント $m(i)$ たちから作られる列

$$(2.15) \quad M(G \curvearrowright X) = \left(\frac{m(1)}{m(0)}, \frac{m(2)}{m(1)}, \frac{m(3)}{m(2)}, \dots, \frac{m(d)}{m(d-1)} \right)$$

を観察しよう. これを群作用 $G \curvearrowright X$ のモーメント列と呼ぶことにする. ここで $d = \#X$ である. 既に述べたことの言い換えとしてただちに次が分かる.

Proposition 2.3. $G \curvearrowright X$ が k 重推移的であるための必要十分条件は

$$(2.16) \quad M(G \curvearrowright X) = (\overbrace{1, \dots, 1}^k, \mu_1, \mu_2, \dots)$$

となることである. このとき, ある一点の固定部分群への制限を $G' \curvearrowright X'$, 推移拡大を $\tilde{G} \curvearrowright \tilde{X}$ とすると, これらのモーメント列は

$$(2.17) \quad M(G' \curvearrowright X') = (\overbrace{1, \dots, 1}^{k-1}, \mu_1, \mu_2, \dots),$$

$$(2.18) \quad M(\tilde{G} \curvearrowright \tilde{X}) = (\overbrace{1, \dots, 1}^{k+1}, \mu_1, \mu_2, \dots),$$

で与えられる. □

対称群や交代群の定義作用は共に, 推移拡大の無限列を持つ. 以下の例では, いくつかの代表的な非自明な多重推移的な作用に対して, モーメントの計算結果を示す.

Example 2.2. 素数冪 q に対して, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の特殊線型群 $SL_2(\mathbb{F}_q)$ の射影空間 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ への一次分数変換による作用を考えると

$$(2.19) \quad M(SL_2(\mathbb{F}_q) \curvearrowright \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)) = (\overbrace{1, 1, 1}^3, \overbrace{q-2, q-3, \dots, 2, 1}^{q-2})$$

となり, 一般に 3 重推移的であるが, $q = 3$ のときだけ 4 重推移的である. ■

Example 2.3. マッシュー群 M_{12} は 12 点集合 $[12]$ の上に作用する.

$$(2.20) \quad M(M_{12} \curvearrowright [12]) = (\overbrace{1, 1, 1, 1, 1}^5, \overbrace{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}^7)$$

であり, $M_{12} \curvearrowright [12]$ はちょうど 5 重推移的に作用することが分かる. ■

Example 2.4. マッシュー群 M_{24} は 24 点集合 $[24]$ の上に作用する.

$$(2.21) \quad M(M_{24} \curvearrowright [24]) = \left(\overbrace{1, 1, 1, 1, 1}^5, 2, \frac{9}{2}, \frac{41}{3}, \frac{646}{41}, \overbrace{15, 14, \dots, 2, 1}^{15} \right)$$

であり, $M_{24} \curvearrowright [24]$ はちょうど 5 重推移的に作用することが分かる. ■

3 置換表現

群 G が集合 X に作用しているとし, X は G -不変測度 μ を持つとする. μ に関する X 上の自乗可積分関数のなすヒルベルト空間を $V = L^2(X)$ とし, 自然に誘導される G の V 上のユニタリ表現を ρ と書く. 有限群の作用の場合に置換表現の基本的な性質として, 次の命題が一般に成り立つ.

Proposition 3.1. 作用 $G \curvearrowright X$ が推移的ならば, V の G -不変部分空間 W が存在して $V = I \oplus W$ と分解する. ここで I は G の自明表現を表す. さらに作用が 2 重推移的ならば, W は既約表現となる. $\square$

対称群の場合に倣って, 上の命題で現れる W を $G \curvearrowright X$ から決まる標準表現と呼ぶことにする. 有限群の場合にはテンソル積表現での自明表現の重複度によって多重推移性を測っていた. しかし, G や X が無限集合の場合を考えようとすると, もし $\mu(X) = \infty$ ならば $V = L^2(X)$ は自明表現を含まない. 従って, これはそのままでは無限の場合の類似にうまくいかない. そこで, 自明表現の代わりに標準表現に着目してみると, 有限群の作用の場合には「標準表現で代替できる」ことを示す次のような命題が得られる.

Proposition 3.2. G の表現 U_1, U_2 に対して, U_1 の中に U_2 が部分表現として現れる重複度を $\text{mult}(U_1|U_2)$ とする. 上記の記号の下で, 有限群の作用の場合に
(1) 自明表現に着目すると

$$(3.1) \quad G \curvearrowright X \text{ が } k \text{ 重推移的} \iff \text{mult}(V^{\otimes k}|I) = \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} = \beta_k.$$

(2) 標準表現に着目すると

$$(3.2) \quad G \curvearrowright X \text{ が } (k+1) \text{ 重推移的} \iff \text{mult}(V^{\otimes k}|W) = \sum_{j=1}^n j \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\}.$$

$\square$

この結果を踏まえて, 無限群の場合の類似物に関する具体的な問題としては, たとえば次のような問題が興味深い.

Problem 3.1. $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ に作用する群の多重推移性について, 有限の場合の類似物を考えよ (X 上の測度は counting measure をとる). たとえば, 群の作用 $G \curvearrowright X$ が与えられたとき, その“モーメント” $m(k; G \curvearrowright X)$ を, 置換表現 V , 標準表現 W に対して

$$(3.3) \quad m(k; G \curvearrowright X) := \text{mult}(V^{\otimes k}|W)$$

によって定義する.

(1) $\tilde{\beta}_k$ を $\tilde{\beta}_k := m(k; \mathfrak{S}_\infty \curvearrowright X)$ によって定義するとき, $\tilde{\beta}_k$ を計算せよ.

(2) 群の作用 $G \curvearrowright X$ が与えられたとき,

$$(3.4) \quad G \curvearrowright X \text{ が } (k+1) \text{ 重推移的 } \iff m(k; G \curvearrowright X) = \tilde{\beta}_k$$

となっているか.

Remark 3.1. 無限版の類似を考える出発点として, これらのほかにも, 有限群の多重推移性を反映している量はもちろんたくさんある. たとえば, 有限群 G の置換表現 ρ のテンソル積表現に現れる既約表現の“個数”

$$(3.5) \quad \sum_{\pi \in \hat{G}} m_k(\pi)^2 \quad \left(\text{ただし } \rho^{\otimes k} \cong \sum_{\pi \in \hat{G}} \pi^{\oplus m_k(\pi)} \right)$$

も, 群作用の多重推移性だけで決まる量になる.

参考文献

- [F] W. Fulton: “Young Tableaux.” Cambridge University Press, 1997.
- [GKP] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik: “Concrete Mathematics.” Addison-Wesley Publ., 1989.
- [K1] K. Kimoto: Power-sums of the number of fixed points of symmetric group actions. Kyushu University Preprint Series in Mathematics **1999-8** (1999).
- [K2] K. Kimoto: Weighted moments and multiple transitivity of finite group actions. Preprint (1999).
- [M] I. G. Macdonald: “Symmetric Functions and Hall Polynomials, Second Edition.” Oxford University Press, 1995.