表現論シンポジウム講演集, 2002
pp.153-171

量子アファイン環の結晶基底と両側セル

中島 啓 (Hiraku Nakajima)

京都大学・大学院理学研究科

表現論シンポジウム
富士ハイツ
2002/11/14

ここに述べる結果は Jonathan Beck 氏との共同研究である.

なお, 証明には幾何は一切用いられない.

- $\mathfrak{g}$: アファイン・カッツ・ムーディ・リー環
- $\mathbf{U} = \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$: 対応する量子展開環 (Drinfeld-神保)
- $\mathbf{U}^+$: 上三角部分環

第一の目的 : $\mathbf{U}^+$ の基底 B で次のような性質を持つものを構成. (有限次元の量子展開環のPBW基底の類似)

(1) B の各元は, 実ルートベクトルの単項式と虚ルートベクトルのシューア関数の積.

(2) B と柏原–Lusztig の標準基底 (大域結晶基底) との変換行列は上三角で, 対角成分は 1 で, それ以外の成分は $q_s^{-1}\mathbb{Z}[q_s^{-1}]$.

$\mathfrak{g}$ が対称のとき Beck-Chari-Pressley [6], $A_2^{(2)}$ 型のときは 赤坂 [1] の基底に一致. ((2) よりも弱い性質が示されていた.)

- $\tilde{\mathbf{U}}$: Lusztigのモディファイされた量子展開環
- $\tilde{\mathcal{B}}$: その(大域)結晶基底([21])

第二の目的 : $\tilde{\mathcal{B}}$ の Peter-Weyl 類似の分解と, $\tilde{\mathcal{B}}$ の両側セルと $\tilde{\mathbf{U}}$ の $q=0$ における極限の代数の具体的な表示を与える.

= 中島(俊)[32], 柏原 [18], Lusztig[23] の予想の解決

手法 : 柏原 [17] によって導入された extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ $(\lambda \in P)$ とその(大域)結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ を調べる

大域結晶/標準 基底

- $q_s = q^{\min_i(\alpha_i,\alpha_i)/2}$
- $e_i^{(n)} = e_i^n/[n]_i!$: divided power
- ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{U}^+ = \langle e_i^{(n)} \rangle$: Lusztig の integral form ($\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q_s, q_s^{-1}]$)
- $\overline{}$: bar involution, $\overline{q_s} = q_s^{-1}$, $\overline{e_i} = e_i$, $\overline{f_i} = f_i$, $\overline{q^h} = q^{-h}$
- $(\ ,\ )$: $\mathbf{U}^+$ 上のある非退化対称双線型形式
- $\mathbf{A}_\infty = \{f \in \mathbb{Q}(q_s) \mid f \text{ is regular at } q_s = \infty\}$

柏原, Lusztigの大域結晶/標準 基底 $\mathcal{B}(-\infty)$ は, ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{U}^+$ の $\mathcal{A}$-加群としての基底であり, 様々なよい性質を持つ.

性質の例

(1) $b \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{U}^+$

(2) $(b, b') = \delta_{bb'} + q_s^{-1}\mathbf{A}_\infty \cap \mathbb{Z}[[q_s^{-1}]]$

(3) $\bar{b} = b$ for $b \in \mathcal{B}(-\infty)$

容易にチェックできるように (1), (2), (3) は, $\mathcal{B}(-\infty)$ を up to sign で特徴づける.

Lusztig の定義 = 偏屈層を用いる幾何学的なもの

柏原の定義

(0) 柏原作用素 $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ の定義

(1) $\mathfrak{L}(-\infty) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Span}_{\mathbf{A}_\infty}\{\tilde{e}_{i_1}\tilde{e}_{i_2}\ldots\tilde{e}_{i_N}u_{-\infty}\}$

(2) $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ は, $\mathfrak{L}(-\infty)/q_s^{-1}\mathfrak{L}(-\infty)$ に作用素を誘導する. これも $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ で表わす.

(3) $\mathfrak{L}(-\infty)/q_s^{-1}\mathfrak{L}(-\infty) \supset \mathcal{B}(-\infty) = \{\,\tilde{e}_{i_1}\tilde{e}_{i_2}\ldots\tilde{e}_{i_N}u_{-\infty}$ の像$\,\}$ (結晶基底)

(4) 自然な射影の制限

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\left(\mathfrak{L}(-\infty)\cap\overline{\mathfrak{L}(-\infty)}\cap{}_{\mathcal{A}}\mathbf{U}^+\right) \to \mathfrak{L}(-\infty)/q_s^{-1}\mathfrak{L}(-\infty)$$

が $\mathbb{Q}$-ベクトル空間の同型であることを帰納的に示し, (2) の基底 $\mathcal{B}(-\infty)$ の逆像として $\mathbf{U}^+$ の基底を定める. (これも $\mathcal{B}(-\infty)$ で表わす.)

$\mathfrak{g}$ が有限型の ADE 型のときの Lusztig の定義

(0) PBW 基底 $\{E_{\mathbf{c}}\}_{\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^{\#ルート}}$ を定義 (ワイル群の最長元 w_0 の reduced expression の取り方に依存)

(1) $\mathfrak{L}(-\infty) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Span}_{\mathbf{A}_\infty}\{E_{\mathbf{c}}\}$

(2) $\mathfrak{L}(-\infty)/q_s^{-1}\mathfrak{L}(-\infty) \supset \mathcal{B}(-\infty) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\, E_{\mathbf{c}}$ の像 $\}$

(3) (a) $\overline{E_{\mathbf{c}}} = E_{\mathbf{c}} + \sum_{\mathbf{c}\prec\mathbf{c}'} r_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} E_{\mathbf{c}'}$ $(r_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} \in \mathcal{A})$

(b) $\overline{b_{\mathbf{c}}} = b_{\mathbf{c}}$ となる基底 $\{b_{\mathbf{c}}\}$ で $b_{\mathbf{c}} = E_{\mathbf{c}} + \sum_{\mathbf{c}\prec\mathbf{c}'} a_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} E_{\mathbf{c}'}$ $(a_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} \in q_s^{-1}\mathbb{Z}[q_s^{-1}])$ となるものがただ一つ存在する.

($(a) \Rightarrow (b)$ は, Kazhdan-Lusztig 多項式の定義と同様で容易)

($\{b_{\mathbf{c}}\}$ は, reduced expression にはよらない. パラメトリゼーションは異なる. piecewise linear function で変換される)

- 「柏原の大域結晶基底 = Lusztig の標準基底 = Lusztig の ADE 型のときの基底」であることが知られている.
- ADE 型のとき, 柏原作用素 $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ を $\mathbf{c}$ の言葉で書くことができる. (上の piecewise linear function を使う.)

目標：アファイン・リー環のときに PBW 基底の構成の上のプログラムを実行せよ. (大域結晶/標準 基底の存在定理の別証明を与えよ.)

アファイン・リー環 $\mathfrak{g}$ のルート

- $\mathfrak{h}$: カルタン部分環 $= \bigoplus_i \mathbb{Q}\alpha_i \oplus \mathbb{Q}c \oplus \mathbb{Q}d$
- $\{\alpha_i\}_{i\in I}$: 単純ルート
- $\hat{W}$: (アファイン・) ワイル群
- $\delta = \sum_i a_i\alpha_i$: カルタン行列の核の生成元
- (,) : $\mathfrak{h}^*$ 上の対称双線型形式, $\langle c,\lambda\rangle = (\delta,\lambda)$
- Δ (ルートの全体) $= \Delta^{\mathrm{re}} \sqcup \mathbb{Z}\delta = \bigcup_i \hat{W}\alpha_i \sqcup \mathbb{Z}\delta$
- $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ for $\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}$
- Δ^+ : 正ルート

- $0 \in I$: 特別な頂点 ($a_0 = 1$) ($\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}(A_{2n}^{(2)})$ ならば $a_0^\vee = 1$)
- $I_0 = I \setminus \{0\}$
- $\mathcal{R}_0 = \{(m\delta, i) \in \mathbb{Z}\delta \times I_0 \mid m > 0, d_i|m\}$ ($d_i = \max(1, (\alpha_i,\alpha_i)/2)$)
  : 重複度込みで考えた正の虚ルートの集合, i.e.
  $\dim \mathfrak{g}_{m\delta} = \#\{i \in I_0 \mid d_i|m\}$.

untwisted type のとき

- I_0 : 対応する有限次元リー環 $\mathfrak{g}_0$ の単純ルートの集合
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$
- 虚ルート空間 $= z^m \otimes \mathfrak{h}_0$ ($m \in \mathbb{Z}$), ただし $\mathfrak{h}_0$ は有限次元リー環のカルタン部分環 ($d_i = 1$)

あとで作るルートベクトルは, $\Delta_+^{\mathrm{re}} = \Delta^+ \cap \Delta^{\mathrm{re}}$ と $\mathcal{R}_0$ でパラメトライズされる.

Lusztigの組み紐群作用

自己同型 $T_i\colon \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ を次で定義する.

$$T_i(e_i) = -f_i t_i,\ T_i(e_j) = \sum_{r+s=-a_{ij}} (-1)^r q_i^{-r} e_i^{(s)} e_j e_i^{(r)} \quad \text{for } i \neq j,$$
$$T_i(f_i) = -t_i^{-1} e_i,\ T_i(f_j) = \sum_{r+s=-a_{ij}} (-1)^r q_i^{r} f_i^{(r)} f_j f_i^{(s)} \quad \text{for } i \neq j,$$
$$T_i q^h = q^{s_i h}$$

T_i は組み紐群の定義関係式を満たす: $T_iT_jT_i\cdots = T_jT_iT_j\cdots$

また, $\mathbf{U}$ の可積分表現 V に働く作用素 $T_i\colon V \to V$ で次を満たすものが定義される: $T_i(um) = T_i(u)T_i(m), \quad u \in \mathbf{U}, m \in V$

実ルートベクトル

両側に無限な I の元の列 $\mathbf{h} = (\ldots, i_{-1}, i_0, i_1, \ldots)$ を適当に取る. 特に次が成り立つ.

- $\beta_k = \begin{cases} s_{i_0}s_{i_{-1}}\ldots s_{i_{k+1}}(\alpha_{i_k}) & \text{if } k \leq 0 \\ s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) & \text{if } k > 0 \end{cases}$ とおくと, $\{\beta_k\}$ ですべての実ルートが得られる. (有限型のときの最長元 w_0 に対応する)

実ルートベクトルの定義:

$$E_{\beta_k} \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} T_{i_0}^{-1}T_{i_{-1}}^{-1}\ldots T_{i_{k+1}}^{-1}(E_{i_k}) & \text{if } k \leq 0, \\ T_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_{k-1}}(E_{i_k}) & \text{if } k > 0. \end{cases}$$

虚ルートベクトル

$$\tilde{\psi}_{i,kd_i} \stackrel{\text{def.}}{=} E_{kd_i\delta-\alpha_i}E_{\alpha_i} - q_i^{-2}E_{\alpha_i}E_{kd_i\delta-\alpha_i}$$

さらに $\tilde{P}_{i,kd_i}$ を次の漸化式で定める.

$$\tilde{P}_{i,kd_i} = \begin{cases} \frac{1}{[2k]_n}\sum_{s=1}^{k} q_n^{2(s-k)}\tilde{\psi}_{n,s}\tilde{P}_{n,k-s} & \text{if } (\mathfrak{g}, i) = (\mathfrak{g}(A_{2n}^{(2)}), n), \\ \\ \frac{1}{[k]_i}\sum_{s=1}^{k} q_i^{s-k}\tilde{\psi}_{i,sd_i}\tilde{P}_{i,(k-s)d_i} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\tilde{P}_{i,kd_i}$ 達は互いに可換である.

PBW 型基底

$\#I_0$ 個の分割の組 $\mathbf{c}_0 = (\rho^{(i)})_{i\in I_0}$ に対して

$$S_{\mathbf{c}_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \prod_i \det(\tilde{P}_{i,({}^t\rho^{(i)}{}_k-k+m)d_i})_{1\le k,m\le N},$$

とおく. ($\tilde{P}$ を初等対称多項式としたときの Schur 多項式の積)

さらに高々有限個を除き 0 である二つの非負整数列

$\mathbf{c}_+ = (\mathbf{c}(0), \mathbf{c}(-1), \dots)$, $\mathbf{c}_- = (\mathbf{c}(1), \mathbf{c}(2), \mathbf{c}(3), \dots)$ を取り

$$L(\mathbf{c}) = \left(E_{\beta_0}^{(\mathbf{c}(0))}E_{\beta_{-1}}^{(\mathbf{c}(-1))}\cdots\right)S_{\mathbf{c}_0}\left(\cdots E_{\beta_2}^{(\mathbf{c}(2))}E_{\beta_1}^{(\mathbf{c}(1))}\right)$$

とおく. $\mathcal{C}$ をこのような $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_+, \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_-)$ の全体とする.

定理 **(Beck-N)** 各 $L(\mathbf{c})$ に対し, 大域結晶基底の元 $b(\mathbf{c})$ がただ一つ定まり, $b(\mathbf{c}) = L(\mathbf{c}) + \sum_{\mathbf{c} \prec \mathbf{c}'} a_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} L(\mathbf{c}')$ ($a_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} \in q_s^{-1}\mathbb{Z}[q_s^{-1}]$)

ただし $\mathbf{c} \prec \mathbf{c}' \iff$ 辞書式順序で $\mathbf{c}_+ \leq \mathbf{c}'_+$, $\mathbf{c}_- \leq \mathbf{c}'_-$ で, どちらかの不等式は等号でない

特に, $\{L(\mathbf{c})\}$ は次の性質を持つ.

(i) $\{L(\mathbf{c}) \mid \mathbf{c} \in \mathcal{C}\}$ は, $\mathbf{U}^+$ の $\mathbb{Q}(q_s)$-ベクトル空間としての基底

(ii) $\{L(\mathbf{c}) \mid \mathbf{c} \in \mathcal{C}\}$ は, ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{U}^+$ の $\mathbb{Z}[q_s, q_s^{-1}]$-加群としての基底

(iii) $(L(\mathbf{c}), L(\mathbf{c}')) = \delta_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} + q_s^{-1}\mathbf{A}_\infty$

(iv) $L(\mathbf{c}) \equiv b(\mathbf{c}) \mod q_s^{-1}\mathfrak{L}(-\infty)$

(v) $\overline{L(\mathbf{c})} = L(\mathbf{c}) + \sum_{\mathbf{c} \prec \mathbf{c}'} r_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} L(\mathbf{c}')$ ($r_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} \in \mathcal{A}$)

有限型のときと同様に (v) から次が従う.

(vi) 各 $L(\mathbf{c})$ に対し, 次の性質を持つ $S(\mathbf{c}) \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{U}^+$ がただ一つ定まる. $\overline{S(\mathbf{c})} = S(\mathbf{c}), S(\mathbf{c}) = L(\mathbf{c}) + \sum_{\mathbf{c} \prec \mathbf{c}'} c_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} L(\mathbf{c}')$ ($c_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} \in q_s^{-1}\mathbb{Z}[q_s^{-1}]$)

そして (vii) $S(\mathbf{c}) = b(\mathbf{c})$ が成り立つ.

- (i) は, Beck [4], Damiani [13] が示している.
- (ii) は, $\mathfrak{g}$ が対称 (i.e. ADE 型の非捻じれ型アファイン・リー環) のとき, もしくは $A_2^{(2)}$ 型のとき, (大域結晶基底を用いずに) Beck-Chari-Pressley [6] と赤坂 [1] が示している.
- (iii) は, [6] と [1] で基本的に示されている.
- (v) は, $r_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} \in \mathbb{Q}(q_s)$ で置き換えれば, 直接証明できる. ((ii) と合わせれば, $r_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} \in \mathcal{A}$) これだけでは (vi) は従わない (と思われる)
- ((vi) が言えていたとして) (vii) は, $S(\mathbf{c}) \bmod q_s^{-1}\mathfrak{L}(-\infty)$ が $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ で不変であることを示すのが, 自然な証明であるが, それは出来ていない.

実際の証明は次のように行う.

(a) (i), (iii) はすでに示されている.

(b) (iii) から (iv) を $L(\mathbf{c}) \equiv \pm b(\mathbf{c})$ と置き換えたものが従う. ($\{b\}$ の almost orthonormality から明らか)

(c) 柏原の extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ を用いて, $L(\mathbf{c}) = S_{\mathbf{c}_0}$ のときに, $\pm = +$ であること, および定理の主張が成り立つこと, すなわち $S_{\mathbf{c}_0} = b_{\mathbf{c}_0} + \sum_{\mathbf{c}_0 \prec \mathbf{c}'} a_{\mathbf{c}_0,\mathbf{c}'} L(\mathbf{c}')$ ($a_{\mathbf{c}_0,\mathbf{c}'} \in q_s^{-1}\mathbb{Z}[q_s^{-1}]$) を示す.

(d) Lusztig の結果 [24] を使って, 一般の $L(\mathbf{c})$ について定理の主張を示す.

本質的に新しいのは (c) の部分である.

ちなみに, Schur 関数は「対称多項式の自然な内積について正規直交基底」として現れる. この内積が $\mathbf{U}^+$ の内積と identify されて, 結晶基底の正規直交性と結びつく!

柏原の extremal ウェイト加群

定義 V を可積分な $\mathbf{U}$-加群とする. ウェイト λ のベクトル $v \in V$ が, **extremal ベクトル**であるとは,

$$\begin{cases} E_i T_w u = 0 & \text{if } \langle h_i, w\lambda \rangle \geq 0, \\ F_i T_w u = 0 & \text{if } \langle h_i, w\lambda \rangle \leq 0. \end{cases}$$

がすべての $w \in \hat{W}$ について成り立つときをいう.

regular crystal についても, ワイル群作用 S_w が定義されることから同様に **extremal ベクトル**が定義される.

定理　(柏原 [17]) (1) ウェイト λ を持つ extremal ベクトルで張られる $\mathbf{U}$-加群のうちで普遍的なもの $V(\lambda) \ni v_\lambda$ が存在.

(2) $V(\lambda)$ は大域的結晶基底を持つ. $v_\lambda \bmod \mathfrak{L}(\lambda)$ は結晶の意味でも extremal ベクトル

(3) $\langle \lambda, c \rangle \neq 0$ ならば, $V(\lambda)$ は既約最高ウェイト加群, もしくはその双対

(4) $\tilde{\mathbf{U}} \ni u \mapsto uv_\lambda \in V(\lambda)$ で, $\tilde{\mathbf{U}}$ の大域結晶基底は $\tilde{\mathcal{B}}$ は, $V(\lambda)$ の大域結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ と 0 の和に移される.

(5) $w \in \hat{W}$ に対し, $\mathbf{U}$-加群の同型 $V(\lambda) \cong V(w\lambda)$ で, 大域結晶基底を移すものがある.

レベル 0 の extremal ウェイト加群を調べることが問題となる.

レベル 0 基本表現とそのテンソル積への埋め込み

- $c = \sum_{i=0}^{n} a_i^\vee h_i$
- Λ_i : 通常の基本ウェイト $(i \in I)$
- $i \neq 0$ のとき $\varpi_i = \Lambda_i - a_i^\vee \Lambda_0$
- ただし $A_{2n}^{(2)}$ 型のときは, $a_0^\vee \neq 1$ であるために

$$\varpi_n = 2\Lambda_n - \Lambda_0 \in P^0, \quad \varpi_i = \Lambda_i - \Lambda_0 \in P^0, \ i = 1, \ldots, n-1.$$

- $\langle c, \varpi_i \rangle = 0$.
- untwisted のときは, $\mathfrak{g}_0$ の基本ウェイトとみなせる.

$V(\varpi_i)$ $(i \neq 0)$ を**レベル 0 基本表現**という.

- $\exists w \in \hat{W}$ s.t. $\varpi_i - d_i\delta = w\varpi_i$
- $u_{\varpi_i - d_i\delta}$: $T_w u_{\varpi_i}$ を適当に正規化して大域結晶基底の元としたもの

このとき $\exists z_i \colon V(\varpi_i) \to V(\varpi_i)$: $\mathbf{U}'$-加群の自己同型で, u_{ϖ_i} を $u_{\varpi_i - d_i\delta}$ に移すもの. (extremal ウェイト加群の普遍性)

ただし $\mathbf{U}'$ は, $\mathbf{U}$ から d を除いたもの. (d をのぞけば ϖ_i と $\varpi_i - d_i\delta$ は同じ値を取る!)

- $W(\varpi_i) = V(\varpi_i)/(z_i - 1)V(\varpi_i)$ は $\mathbf{U}'$-加群 (有限次元)
- $V(\varpi_i) \cong \mathbb{Q}(q_s)[z_i, z_i^{-1}] \otimes W(\varpi_i)$

$W(\varpi_i)$ の Drinfeld 多項式は $P_j(u) = \begin{cases} 1-u & j=i \text{ のとき} \\ 1 & \text{そうでないとき} \end{cases}$

テンソル積加群

- $\lambda = \sum \lambda_i \varpi_i$,
- $\widetilde{V}(\lambda) = \bigotimes_i V(\varpi_i)^{\otimes \lambda_i} \cong \bigotimes_i \mathbb{Q}(q_s)[z_{i,\nu}]_{\nu=1,\dots,\lambda_i} \otimes W(\varpi_i)^{\otimes \lambda_i}$,
- $\widetilde{u}_\lambda = \bigotimes_i u_{\varpi_i}^{\otimes \lambda_i}$

$\widetilde{u}_\lambda$ が extremal ウェイト加群であることから, $\mathbf{U}$ 加群の準同型 $\Phi \colon V(\lambda) \to \widetilde{V}(\lambda)$ が存在する.

Key Observation $=$ $\boxed{\Phi(S_{\mathbf{c}_0}^- u_\lambda) = s_{\mathbf{c}_0}(z)\widetilde{u}_\lambda \text{ が成り立つ.}}$

ただし, $S_{\mathbf{c}_0}^- = \overline{S_{\mathbf{c}_0}^\vee} \in \mathbf{U}^-$, $s_{\mathbf{c}_0}(z)$ は分割 $\rho^{(i)}$ に対応する Schur 関数の積 ($\mathbf{c}_0 = (\rho^{(i)})_{i \in I_0}$, ($\rho^{(i)}$ の行の数が λ_i よりも大きいときには, 右辺は 0 と仮定)

$\widetilde{\mathcal{B}}(\lambda) = \bigotimes_i \mathcal{B}(\varpi_i)^{\otimes \lambda_i}$

$\widetilde{\mathcal{B}}_0(\lambda)$: $\widetilde{u}_\lambda$ を含む連結成分

定理 (Beck+N.) (1) Φ は単射.

(2) $V(\lambda)$ の大域結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ の Φ による像は,

$$\{s_{\mathbf{c}_0}(z)b \mid b \in \widetilde{\mathcal{B}}_0(\lambda), \mathbf{c}_0 \text{ の行の数} \leq \lambda_i\}$$

$\tilde{\mathbf{U}}$ の両側セル

- A : 可換環 R 上の (結合的) 代数
- $\mathcal{B}$: A の R-加群としての基底
- $\mathcal{F}$: $\{K \subset \mathcal{B} \mid \mathrm{Span}(K)$ が両側イデアルである $\}$
- $b, b' \in \mathcal{B}$ に対し, $b' \preceq b$ であるとは, b を含むどんな $K \in \mathcal{F}$ についても $b' \in K$ が成り立つ.
- $b \sim b'$ とは, $b \preceq b'$ かつ $b' \preceq b$ と定める.
- $\sim$ の同値類を $\mathcal{B}$ の**両側セル**という

両側イデアルを左, 右イデアルと換えて, 左セル, 右セルの概念が定義される.

$\mathcal{B}$ を十分に一般に選べば, $\mathcal{F} = \{\mathcal{B}\}$ となってつまらないが, 由緒正しき基底 $\mathcal{B}$ を選べば, セルはその環の構造を反映すると期待される.

有名な例が, 岩堀-ヘッケ環の Kazhdan-Lusztig 基底によるセルである.

ここでは

- a_λ : ウェイト λ のウェイト空間への射影
- $\tilde{\mathbf{U}} = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathbf{U} a_\lambda$: Lusztig のモディファイされた量子展開環
- $\tilde{\mathcal{B}} = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathcal{B}(\mathbf{U} a_\lambda)$: その (大域) 結晶基底

を取る. ただし, 今までと異なり, ウエイト格子 P としては, δ を含めないものを取る. (カルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ として次数作用素 d の入っていないものを考えるということ. 先の $\mathbf{U}'$ に対応するもの)

- $\{\lambda \mid$ レベル 0 ウェイト $\}$ の空間にレベル 0 基本ウェイトを用いて支配的順序を入れる.
- $\tilde{\mathbf{U}}[{}^{\geq}\lambda] = \{x \in \tilde{\mathbf{U}} \mid \ x$ acts by 0 on $V(\mu)$ with $\mu \not\geq \lambda\}$ (両側イデアル)
- 例えば, $a_\lambda \in \tilde{\mathbf{U}}[{}^{\geq}\lambda]$: $V(\mu)$ のウエイトはすべて $\leq \mu$
- $\tilde{\mathbf{U}}[\lambda] = \tilde{\mathbf{U}}[{}^{\geq}\lambda] / \tilde{\mathbf{U}}[{}^{>}\lambda]$
- $\tilde{\mathcal{B}}[\lambda] = \{b \in \tilde{\mathcal{B}} \mid b \in \tilde{\mathbf{U}}[{}^{\geq}\lambda], b|_{V(\lambda)} \neq 0\}$

定理 (Beck+N.) (1) $\tilde{\mathcal{B}}[\lambda]$ は, $\tilde{\mathbf{U}}[\lambda]$ の大域結晶基底

(2) $\tilde{\mathcal{B}}[\lambda]$ は, $\tilde{\mathcal{B}}$ の両側セルであり, またすべての両側セルは, このようにして得られる.

$\tilde{\mathbf{U}}$ at $q=0$ (柏原の結晶基底とは異なる)

- $\mathfrak{L}(\tilde{\mathbf{U}}[\lambda])$: $\tilde{\mathcal{B}}[\lambda]$ の生成する $\tilde{\mathbf{U}}[\lambda]$ の $\mathbb{Z}[q_s]$-部分加群
- $b \in \tilde{\mathcal{B}}[\lambda]$ に対して $a(b)$ を $q_s^n b\mathfrak{L}(\tilde{\mathbf{U}}[\lambda]) \subset \mathfrak{L}(\tilde{\mathbf{U}}[\lambda])$ となる最小の n として定める. そのような n が存在しなければ $a(b)=\infty$ と定める.

このとき**性質 P1** が成り立つ.

(1) $a(b)<\infty$

(2) 任意の μ に対し a の $\tilde{\mathcal{B}}[\lambda] \cap \mathcal{B}(\mathbf{U}a_\mu)$ への制限は, 定数.

- $c_{bb'}^{b''}(q)$: 基底 $\tilde{\mathcal{B}}[\lambda]$ に関する, $\tilde{\mathbf{U}}[\lambda]$ の積の構造定数
- $\widehat{b} = q_s^{a(b)} b$ とおく

このとき $\tilde{\mathbf{U}}[\lambda]$ において

$$\widehat{bb'} = \sum_{b'' \in \tilde{\mathcal{B}}[\lambda]} q_s^{a(b)} c_{bb'}^{b''} \widehat{b''}$$

($a(b')=a(b'')$ と仮定してよいことを用いた.)

- 先の $a(b)$ の定め方により $q^{a(b)} c_{bb'}^{b''} \in \mathbb{Z}[q_s]$
- よって $\widehat{b}$ たちで生成される $\mathbb{Z}[q_s]$-部分加群 $\tilde{\mathbf{U}}[\lambda]^-$ は, 積に関して閉じている.
- そこで $\tilde{\mathbf{U}}[\lambda]_0 = \tilde{\mathbf{U}}[\lambda]^- / q_s \tilde{\mathbf{U}}[\lambda]^-$ とおく

($q_s=0$ における量子展開環)

- t_b : $\widehat{b}$ の行き先. $\tilde{\mathbf{U}}[\lambda]_0$ の $\mathbb{Z}$-基底
- 積の構造定数 $= q_s^{a(b)} c_{bb'}^{b''}$ の定数部分

このとき, **性質 P2** (一般化された単位元の存在) が示される.

ある有限集合 $\mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{B}}[\lambda]} \subset \tilde{\mathcal{B}}[\lambda]$ が存在して $t_d t_{d'} = \delta_{dd'} t_d$, 各 $b \in \tilde{\mathcal{B}}[\lambda]$ に対し $t_b = t_d t_b t_{d'}$ が成り立つ d, d' が存在する.

ちなみに $\mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{B}}[\lambda]} \subset \tilde{\mathcal{B}}[\lambda]$ は, 有限次元表現 $\bigotimes_i W(\varpi_i)^{\otimes \lambda_i}$ の結晶基底と自然に同一視される.

性質 P3

$\Phi \colon \tilde{\mathbf{U}}[\lambda] \to \tilde{\mathbf{U}}[\lambda]_0 \otimes \mathbb{Q}(q_s)$ を $\Phi(b) = \sum_{d \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{B}}[\lambda]}, b' \in \tilde{\mathcal{B}}[\lambda]} c_{bd}^{b'} t_{b'}$ で定めると環準同型

も示される.

- $G_\lambda = \prod_{i \in I_0} GL(\lambda_i)$ $(\lambda = \sum \lambda_i \varpi_i)$
- $\operatorname{Irr} G_\lambda$: その既約表現の集合, $c_{ss'}^{s''} = \dim \operatorname{Hom}(s'', s \otimes s')$
- $T_\lambda = \{(d_1, s, d_2) \mid d_i \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{B}}[\lambda]}, s \in \operatorname{Irr} G_\lambda\}$ とおく.
- J_λ : T_λ で生成される自由 $\mathbb{Z}$-加群に次で積を入れたもの

$$(d_1, s, d_2)(d_1', s', d_2') = \sum_{s''} c_{ss'}^{s''} \delta_{d_2, d_1'} (d_1, s'', d_2')$$

J_λ は, G_λ の表現環と行列環の積 (非常に簡単な環!!), T_λ はその自然な基底

定理 **(Beck+N.)** $(\tilde{\mathbf{U}}[\lambda]_0, \tilde{\mathcal{B}}[\lambda])$ は, 基底付き代数として, (J_λ, T_λ) と同型.

付け足し: $J_\lambda \otimes \mathbb{C}$ の既約表現は, $\#\mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{B}}[\lambda]}$ 次元で, { 既約表現の同型類 } $\leftrightarrow$ $\{\chi \colon R(G_\lambda) \to \mathbb{C}\}/$共役 $\leftrightarrow$ $\{s \in G_\lambda \mid \text{semisimple}\}$ $\leftrightarrow$ {Drinfeld 多項式 }

References

[1] T. Akasaka, *An integral PBW basis of the quantum affine algebra of type* $A_2^{(2)}$, preprint, math.QA/0105170.

[2] T. Akasaka and M. Kashiwara, *Finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Publ. RIMS **33** (1997), 839–867.

[3] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 555–568.

[4] ———, *Convex bases of PBW type for quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 193–199.

[5] ———, *Crystal structure of level zero extremal weight modules*, preprint, math.QA/0205095.

[6] J. Beck, V. Chari and A. Pressley, *An algebraic characterization of the affine canonical basis*, Duke Math. J. **99** (1999), 455–487.

[7] V. Chari and A. Pressley, A Guide to Quantum Groups, Cambridge University Press, 1994.

[8] ———, *Quantum affine algebras at roots of unity*, Representation Theory **1** (1997), 280-328.

[9] ———, *Twisted quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **196** (1998), 461–476.

[10] ———, *Weyl modules for classical and quantum affine algebras*, Represent. Theory **5** (2001), 191-223.

[11] V. Chari and N. Xi, *Monomial bases of quantized enveloping algebras*, Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), 69–81, Contemporary Math **248**, AMS.

[12] I. Damiani, *La R-matrice pour les algèbres quantiques de type affine non tordu*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **31** (1998), 493–523.

[13] ———, *The R-matrix for (twisted) affine algebras*, Proceedings of the International Conference on Representation Theory, (2000), 89–144.

[14] V.G. Drinfel'd, *A new realization of Yangians and quantized affine algebras*, Soviet math. Dokl. **32** (1988), 212–216.

[15] V.G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras (3rd Ed.), Cambridge University Press, 1990.

[16] M. Kashiwara, *On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), 465–516.

[17] ———, *Crystal bases of modified quantized enveloping algebra*, Duke Math. J. **73** (1994), 383–413.

[18] ———, *On level zero representations of quantized enveloping algebras*, Duke Math. J. **112** (2002), 117–175.

[19] G. Lusztig, *Cells in affine Weyl groups* IV, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **36** (1989), 297–328.

[20] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized*

enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.

[21] ———, *Canonical bases and tensor products*, Proc. of the Nat. Acad. Sci. USA **89** (1992), 8177–8179.

[22] ———, Introduction to Quantum Groups, Progress in Math. **110**, Birkhäuser, 1993.

[23] ———, *Quantum groups at* $v = \infty$, Functional Analysis on the eve of the 21st century, Vo. 1 (New Brunswick, NJ, 1993), 199–221, Progr. Math. 131, Birkhäuser, Boston.

[24] ———, *Braid group action and canonical bases*, Adv. Math. **122** (1996), 237–261.

[25] ———, *Remarks on quiver varieties*, Duke Math. J. **105** (2000), 239–265.

[26] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials (2nd ed.)*, Oxford Math. Monographs, Oxford Univ. Press, 1995.

[27] K. McGerty, *Cells in quantum affine* $\mathfrak{sl}_n$, preprint, math.QA/0209055.

[28] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 145-238.

[29] ———, t*-analogue of the* q*-characters of finite dimensional representations of quantum affine algebras*, in "Physics and Combinatorics", Proceedings of the Nagoya

2000 International Workshop, World Scientific, 2001, 195–218.

[30] ———, *Quiver varieties and tensor products*, Invent. Math., **146** (2001), 399–449.

[31] ———, *Extremal weight modules of quantum affine algebras*, preprint, math.QA/0204183.

[32] T. Nakashima, *Crystallized Peter-Weyl type decomposition for level* 0 *part of modified quantum algebra* $\tilde{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)_0$, J. Algebra **189** (1997), 150–186.

[33] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Standard modules of quantum affine algebras*, Duke Math. J. **111** (2002), 509–533.

[34] ———, *Canonical bases and quiver varieties*, preprint, math.RT/0107177.