

簡約代数群の同変コンパクト化上の同変ベクトル束の圏とその応用

加藤周*

平成14年10月25日

概要

この論説では論文 [17]¹, [18] の内容を解説し、さらに $G = PGL_2$ の場合に詳説する。

1 導入

この論説では De Concini-Procesi によって導入された複素対称空間の wonderful と呼ばれるコンパクト化を支配する簡約代数群の同変ベクトル束の圏を記述し、その記述を用いて特別なベクトル束の存在の主張、同変 K -群の記述、などを行う。その後 $G = PGL_2$ の場合に我々の記述を適用して極大トーラスを共有しない表現の分岐則 $SL_4 \downarrow SL_2 \times SL_2$ の一部の記述がどのように行われるかを見る。

上記の複素対称空間等の代数的なコンパクト化の応用は不変式論への応用のほかに有限次元表現の分岐則の記述²やユニタリ表現の n -余不変ベクトルの空間の記述などが考えられているが³、どちらにせよ直線束を考えるのでは完全な記述は望めないので、一般の対称空間や球多様体の場合には出来ていないとはいえ可能な場合に同変ベクトル束の記述を与えることはそれなりに意味があることのように思われる。

我々の記述は $G = PGL_2$ の場合でも筆者の知る限りでは新しい。特にこの場合に階数を固定すると既約同変ベクトル束が直線束によるテンソル積を除いて有限個になるという事 (系 6.4) ですら過去には知られていなかったようである。

我々の記述の利点は同変ベクトル束の圏という抽象的には明らかに存在するが具体的には良く分かっていなかった圏と具体的に手で計算できる別の圏との圏同値を示したことにより、自然に付随する問題の多くが表現論的な考察に落ちるかまたはほぼ自明になることである。このことについては特に $G = PGL_2$ の場合に §6 に独立に読めるように記述したので、興味を持たれた方は参照されたい。

尚この話では記号が大量に必要なので標準的な記号については本文ではなくこの直後の記号一覧表で確認する。

*東京大学大学院数理学研究科 D3、学振特別研究員

¹ §5 で書いたポイントは 6 月 19 日版 (arXiv の更新日付は 7 月 1 日) です。

² 別の小さな群の分岐則に置き換わってパラメータも減るので、一般の場合には計算が困難でも計算量を減らすという立場からは意味のある話だと思います。

³ と Kostant は言っているのだけれどもまだ出ていません。

記号一覧表 A (一般的な代数群に関する記号; [26] 参照)

- $\mathbf{R}_{\geq 0}$: 非負実数全体.
- k : 標数 0 の代数的閉体.
- G : k 上の連結簡約代数群.
- $\tilde{G}$: G の有限連結被覆で単連結な単純代数群とトーラスの直積となるもの.
- $\tilde{G}_0$: $\tilde{G}$ の直積因子の単純代数群部分.
- T : G の極大トーラス.
- B : G の Borel 部分群であって $T \subset B$ となるもの. B^{opp} : $B \cap B^{opp} = T$ を満たす G の Borel 部分群.
- $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \dots$: $G, B, \dots$ の Lie 代数.
- $\tilde{T}, \tilde{B}$: T, B の $\tilde{G}$ への引き戻し.
- $X^*(G)$: G のウェイト格子. $X_*(G)$: G の余ウェイト格子.
- $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$: G の $T \subset B$ に関する単純ルート. ($\subset X^*(T)$)
- $Q := \sum \mathbf{Z}\alpha_i \subset X^*(T)$: G_{sc} のルート格子.
- $U(\mathfrak{a})$: Lie 代数 $\mathfrak{a}$ の普遍包絡環.
- $V(\lambda)$: 最高ウェイト λ の単純有理 G_{sc} -表現.
- $e \in G \subset X$: X の点で単位元に対応するもの.

記号一覧表 B (コンパクト化の話に付随する記号; §1 を参照)

- X : G の $G \times G$ -同変部分コンパクト化であって smooth かつ $G/Z(G)$ の wonderful コンパクト化を支配するもの.
- Σ : X に対応する N の扇 (c.f. 定理 2.7. Σ を強調する時は X の代わりに $X(\Sigma)$ と書く).
- H_η : $\eta \in \Sigma(1)$ に対応する $G \times G$ -不変因子.
- P^η : $\eta \in \Sigma(1)$ を G の 1 変数助変数群とみなしてその $\tilde{G}$ への Adjoint 作用でパラメータを 0 に飛ばした時に $\tilde{G}$ 内に極限を持つような $\tilde{G}$ の元全体からなる $\tilde{G}$ の放物型部分群.
- $P^\eta = L^\eta U_+^\eta$: P^η の Levi 分解で $T \subset L^\eta$ となるもの.
- $U_-^\eta := U_+^{-\eta}$: U_+^η の $\tilde{T}$ に関する opposite unipotent 部分群.

2 簡約群の同変コンパクト化

2.1 トーリック多様体

この節では我々がどのようなタイプのコンパクト化上で話を展開するのかについて述べる。そのため我々が対象とする多様体の中で最も基本的なクラスであるトーリック多様体の記述についての定義を復習する⁴。そのためこの節の記述は基本的に小田 [24] の劣化コピーとなっている。

定義 2.1. T の T -同変で正規な代数多様体としての (部分) コンパクト化 (と T の組) をトーリック多様体と呼ぶ。

この分野の伝統としては T のウェイト格子 $X^*(T)$ を M 、 T の余ウェイト格子 $X_*(T)$ を N と書くことになっている。定義より自然な $\mathbf{Z}$ -線形非退化ペアリング

$$\langle, \rangle' : M \times N \rightarrow \mathbf{Z}$$

が存在する。

⁴この分野の入門書としては小田 [24] が挙げられる

定義 2.2 (余ウェイト格子 N の錘). $N_{\mathbf{R}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ と置く。余ウェイト格子 N の有理強凸多面錘 σ とは $N_{\mathbf{R}}$ の部分集合であって、有限個の N の元 $n_1, n_2, \dots, n_s$ が存在して

$$\sigma = \mathbf{R}_{\geq 0} n_1 + \cdots + \mathbf{R}_{\geq 0} n_s$$

と書け、さらに $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ となるものとする。

各 $N_{\mathbf{R}}$ の有理強凸多面錘 σ に対して $\sigma + (-\sigma)$ の線形空間としての次元を $\dim \sigma$ とおく。 $N_{\mathbf{R}}$ と同様に $M_{\mathbf{R}} := M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ とおく。 $N_{\mathbf{R}}$ の有理強凸多面錘 σ の双対錘を

$$\sigma^{\vee} := \{x \in M_{\mathbf{R}}; \langle x, y \rangle' \geq 0, \forall y \in \sigma\}$$

と定義すると、これは M の有理強凸多面錘となる。 σ の部分集合 τ が σ の面であるとはある $m_0 \in \sigma^{\vee}$ が存在して

$$\tau = \sigma \cap \{m_0\}^{\vee} := \{y \in \sigma; \langle m_0, y \rangle' = 0\}$$

となることと定義し、 $\tau < \sigma$ と表す。また、 $\{0\}$ も σ の面である。

定義 2.3 (N の扇). N の扇とは、 $N_{\mathbf{R}}$ の有理強凸多面錘の空でない集合 Σ であって、次の性質を持つものとする。

1. $\sigma \in \Sigma$ なら σ の任意の面は Σ に属する。
2. $\sigma, \tau \in \Sigma$ なら共通集合 $\sigma \cap \tau$ は σ の面かつ τ の面。

N の扇 Σ に対してその q -次元有理強凸多面錘からなる Σ の部分集合を $\Sigma(q)$ とおく。また、 Σ の各錘 σ に対し、 σ とその面からなる扇をも記号の乱用によって σ と記すことにする。

以上の設定の下で、トーリック多様体の分類は以下で与えられる。

定理 2.4 (トーリック多様体の基本定理 [24] 1.5). 代数群 T は固定されているものとする。任意の N の扇 Σ に対応してトーリック多様体 $T(\Sigma)$ が存在する。逆に任意のトーリック多様体 X に対してある N の扇 Σ が存在して T -作用を込めて $X \cong T(\Sigma)$ となる。

さて、 T' を代数的トーラスとし、 N' を T' の余ウェイト格子とする。

定義 2.5. N の扇 Σ と N' の扇 Σ' の間の射 $\phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ とは $\phi_0: N \rightarrow N'$ という自由 $\mathbf{Z}$ 加群の射であって任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して $\phi_0(\sigma) \subset (\tau \cap N)$ となる $\tau \in \Sigma'$ が存在することとする。

定理 2.6 (トーリック多様体の圏の記述 [24] 1.13). 二つのトーリック多様体に対してトーラス同士の射を延長する同変射は射は定理 2.4 の意味で対応する扇の射と 1 対 1 に対応する⁵。

2.2 簡約群のコンパクト化

簡約代数群 G の中心 $Z(G)$ は極大トーラス T に含まれる。 $G/Z(G)$ は随伴型代数群なので、De Concini-Procesi の意味での wonderful コンパクト化が存在する (それを X_0 とおく)。各単純ルート α_i は $X^*(T/Z(G)) \subset X^*(T) = M$ に含まれるので、誘導されたペアリング

$$\langle, \rangle: X_*(T/Z(G)) \times X^*(T/Z(G)) \rightarrow \mathbf{Z}$$

から $\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j}$ となる $X_*(T/Z(G))$ の元 $\omega_1, \dots, \omega_\ell$ が存在する。 $T' := T/Z(G)$ 、 $N' := X_*(T/Z(G))$ とおく。その時

$$\Sigma_0 := \{\mathbf{R}_{\geq 0} \omega_{i_1} + \mathbf{R}_{\geq 0} \omega_{i_2} + \cdots + \mathbf{R}_{\geq 0} \omega_{i_n} \subset N'_{\mathbf{R}}; \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset \{1, 2, \dots, \ell\}\}$$

は N' の扇となる。さて、全射 $T \rightarrow T'$ は自然に $\mathbf{Z}$ -加群としての全射 $\phi_0: N \rightarrow N'$ を誘導していた。ここで、

⁵つまりトーリック多様体とトーラス同変射のなす圏と扇の圏は圏同値

- N の扇 Σ で ϕ_0 が扇の射 $\Sigma \rightarrow \Sigma_0$ を誘導する

という状況を考える。この時、次の定理が成立する。

定理 2.7 ([10], [32], [20] 等の帰結). G の $G \times G$ -同変コンパクト化 X で、群の商 $G \rightarrow G/Z(G)$ の延長となる射 $X \rightarrow X_0$ が存在するものは上の ϕ_0 により $\Sigma \rightarrow \Sigma_0$ という扇の射が定まる N の格子と 1 対 1 対応する。

さて、 N には Weyl 群 W が作用する。上の定理で G の $G \times G$ -同変コンパクト化 X に対応する N の扇を Σ とおき、 $\hat{\Sigma} := \bigcup_{w \in W} w\Sigma$ とする。すると、 X 内での T の閉包は $\hat{\Sigma}$ に付随したトーリック多様体となる。このとき、次が成立する。

定理 2.8 ([24], [25], [27], [10] 等の帰結).

Σ の各扇の生成元は N の $\mathbf{Z}$ -基底の一部 $\Leftrightarrow T(\hat{\Sigma})$ が *smooth* $\Leftrightarrow T(\Sigma)$ が *smooth* $\Leftrightarrow X$ が *smooth*

さらに上の定理の状況の下では $X \setminus G$ の全ての $G \times G$ -軌道は $G \times G$ -不変因子の単純正規交差の格好で書ける。

3 圏 $\mathcal{C}_{coh}(\Sigma)$ と $\mathcal{C}(\Sigma)$

この節では我々の記述の主役である二つの圏を導入する。その為に先に必要な準備を行う。各 $\eta \in \Sigma(1)$ の $\mathfrak{g}$ への adjoint 作用は各ルート空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ を保つ。ここで $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ の次数を $\langle \eta, \alpha \rangle$, $X \in \mathfrak{t}$ の次数を 0 と定めるとこれは Poincare-Birkhoff-Witt の定理より任意の $\mathfrak{g}$ の放物型部分 Lie 代数 $\mathfrak{p}$ に対し $U(\mathfrak{p})$ に次数を定める (この次数の決め方は η の $U(\mathfrak{p})$ の元への adjoint 作用の固有値の定数倍となり、特に基底の順番には依存しない)。この作用による $U(\mathfrak{p})$ の m -次斉次部分を $U(\mathfrak{p})_m^\eta$ とおく。

Remark 3.1. 上の状況下において $U(\mathfrak{p})^\eta = U(\mathfrak{p}^\eta)_0^\eta$ が成立。また全ての正整数 m に対して $U(\mathfrak{u}_+^\eta)_{-m}^\eta = U(\mathfrak{u}_-^\eta)_m^\eta = \{0\}$ が成り立つ。

$$\tilde{Z}(G) := \ker [\tilde{G}_0 \rightarrow G] \text{ と置く。}$$

定義 3.2. V を $\tilde{G}_0 \times \tilde{Z}(G)$ -加群とする。 V の部分線形空間の整数でインデックスされた減少フィルター

$$F(\bullet) : \cdots \subset F(1) \subset F(0) \subset F(-1) \subset \cdots \subset F(-10) \subset \cdots \subset V$$

が $\eta \in \Sigma(1)$ に対して次の 2 条件を満たすとき、 η -standard フィルターと呼ぶ。

1. 各 $n \in \mathbf{Z}$ に対して $F(n)$ は制限 $\tilde{G} \downarrow P^\eta$ によって $P^\eta \times \tilde{Z}(G)$ -加群である。
2. ある $n \in \mathbf{Z}$ に対して $F(-n) = V$ かつ $F(n) = \{0\}$ 。

$\tilde{G}_0 \times \tilde{Z}(G)$ -加群 V の η -admissible フィルター $F(\bullet)$ とは η -standard フィルターであってかつ次の条件を満たすこと。

- 全ての $n, m \in \mathbf{Z}$ に対して $U(\mathfrak{u}_-^\eta)_n^\eta F(m) \subset F(n+m)$ 。

ここで包絡環の作用は群作用の微分から誘導される Lie 代数の作用より決める。

定義 3.3 (線形空間族の分配束). V を有限次元ベクトル空間とする。 V の線形部分空間の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が分配束を成すとはある V の 1 次元部分空間の族 $\{L_i\}_{i=1}^{\dim V}$ であって次の 2 条件を満たすこと。

1. $V = \sum_{i=1}^r L_i$ 。

2. 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対してある $I_\lambda \subset \{1, 2, \dots, \dim V\}$ が存在して $U_\lambda = \sum_{\lambda \in I_\lambda} L_i$.

これらの準備の下で我々の主たる対象である圏 $\mathcal{C}_{coh}(\Sigma)$ と $\mathcal{C}(\Sigma)$ を定義する。

定義 3.4. 圏 $\mathcal{C}(\Sigma)_{coh}, \mathcal{C}(\Sigma)$ (resp. $\mathcal{C}(\Sigma)_{coh}^l, \mathcal{C}(\Sigma)^l$) を次で定義する:

Object: $\tilde{G}_0 \times \tilde{Z}(G)$ -加群 V とその $\Sigma(1)$ によってインデックスされたフィルターの組 $\{F^\eta\}_{\eta \in \Sigma(1)}$ であって次の条件を満たすもの

1. 各 $\eta \in \Sigma(1)$ に対して $F^\eta(\bullet)$ は η -admissible フィルター (resp. η -standard フィルター).
2. 全ての $\sigma \in \Sigma$ に対して $\{F^\eta(n)\}_{\eta \in \sigma^1, n \in \mathbf{Z}}$ は分配束をなす。

Morphism: 各々の圏の 2 つの対象 $\kappa_1 := (V_1, \{F^\eta\}_{\eta \in \Sigma}), \kappa_2 := (V_2, \{G^\eta\}_{\eta \in \Sigma})$ の間の射の集合を $\text{Hom}_{\tilde{G}_0 \times \tilde{Z}(G)}(V_1, V_2)$ の部分集合として次のように定義する。

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_{coh}(\Sigma)^l}(\kappa_1, \kappa_2) &:= \{f: V_1 \rightarrow V_2; f(F^\eta(n)) \subset G^\eta(n), \forall n \in \mathbf{Z}, \forall \eta \in \Sigma(1)\} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}(\Sigma)^l}(\kappa_1, \kappa_2) &:= \{f: V_1 \rightarrow V_2; f(F^\eta(n)) = f(V_1) \cap G^\eta(n), \forall n \in \mathbf{Z}, \forall \eta \in \Sigma(1)\} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}(\Sigma)_{coh}}(\kappa_1, \kappa_2) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}(\Sigma)_{coh}^l}(\kappa_1, \kappa_2), \text{Hom}_{\mathcal{C}(\Sigma)}(\kappa_1, \kappa_2) = \text{Hom}_{\mathcal{C}(\Sigma)^l}(\kappa_1, \kappa_2) \end{aligned}$$

Remark 3.5. $\mathcal{C}(\Sigma)^l, \mathcal{C}(\Sigma)$ は Abel 圏になるが $\mathcal{C}(\Sigma)_{coh}^l, \mathcal{C}(\Sigma)_{coh}$ は一般に Abel 圏にはならない。

4 主定理

4.1 主定理の定式化

$EV(\Sigma)$ を $X(\Sigma)$ 上の $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -同変ベクトル束を対象とし、それらの間の同変な代数的ベクトル束としての射を射とする圏とする。同様に $EV(\Sigma)_{coh}$ を $EV(\Sigma)$ と同じ対象をもち、それらの間の同変な代数的接続層としての射を射とする圏とする⁶。

$\mathcal{E} \in EV(\Sigma)$ とする。 $V := \mathcal{E} \otimes k(e)$ とおき、また $V(\mathcal{E})$ でベクトル束 $\mathcal{E}$ の全体空間を表す。定義より $V \subset V(\mathcal{E})$ 。この時、各 $\eta \in \Sigma(1)$ と $n \in \mathbf{Z}$ に従って次のような V の部分空間を考える。

$$F^\eta(\mathcal{E}, n) = \{v \in V; \lim_{t \rightarrow 0} \eta(t)^{-n}(1 \times t)v \text{ が } V(\mathcal{E}) \text{ 内に存在。}\}$$

この時 $\mathcal{F} \in EV(\Sigma)$ として $f \in \text{Hom}_{EV(\Sigma)}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ とすると、 f は全体空間の射 $\hat{f}$ を定めるので

$$\hat{f}(F^\eta(n, \mathcal{E})) \subset F^\eta(n, \mathcal{F})$$

が全ての整数 n に対して成立する。結局上の構成により関手 $\Xi: EV(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}^l(\Sigma)$ が定まる事が分かる。

定理 4.1 (主定理). 上記の状況において Ξ は圏同値

$$\Xi: EV(\Sigma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\Sigma)$$

を導く。

Remark 4.2. Ξ の構成の受け皿は $\mathcal{C}(\Sigma)^l$ であつたにも関わらず圏同値の相方はその部分圏 $\mathcal{C}(\Sigma)$ であることに注意。

⁶残念なことに我々の扱う代数多様体は一般に射影的ではないので GAGA 等といわれても何のことか分かりません

4.2 主定理の帰結

上の定理から直接従う系としては、次のようなものがあることが分かっている。

系 4.3. G を *adjoint* 単純代数群とする。その時その *wonderful* コンパクト化 X_0 上の $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -同変ベクトル束 $\mathcal{E}$ は $\mathcal{E} \otimes k(e)$ が $\tilde{G}$ の自明表現の直和ならば直線束の直和に分裂する。

系 4.4. G を *adjoint* 単純代数群とする。その時その *wonderful* コンパクト化 X_0 上の $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -同変ベクトル束はそのベクトル束としてのランクが $\tilde{G}$ の非自明な最も次元の小さい表現よりも小さければ自動的に直線束の直和に分裂する。

$\tilde{T}$ -作用の $X(\Sigma)$ への作用 a を $\tilde{T} \times G \ni (t, g) \mapsto t.g.t \in G$ の延長によって定義する。

そのとき $X(\Sigma)$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、その単位元上のファイバーの a -作用による $\eta \in \Sigma(1)$ による $t \rightarrow 0$ への漸近挙動が極限を持つ為の十分条件は $v \in V$ の $\tilde{T}$ -ウェイトを λ とすると $v \in F^\eta(-[\frac{1}{2}\langle \eta, \lambda \rangle])$ となることである。この記述と圏の記述を見比べると次の結果を得る。

系 4.5 (Kostant の問題 ; 簡単バージョン). 各 G の表現 V に対して $V \boxtimes k(as \tilde{G} \times \tilde{Z}(G)\text{-加群})$ を単位元でのファイバーとして持ち $\tilde{T}$ の任意の正ウェイトの和の格好の 1 助変数部分群の a -作用において $t \rightarrow 0$ とした時の極限が全体空間の中に存在するベクトル束のうち包含関係に関して極大なものが唯一存在する。さらにこの極大なベクトル束においては唯一の閉軌道へ a -作用で V を飛ばしたとき境界上のファイバーで非零に収束する元が存在する。

また、Grothendieck 群も計算可能である。

系 4.6. 次の $\mathbf{Z}[\text{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}} X(\Sigma)]$ -加群としての同型が成立する。

$$K^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X(\Sigma)) \cong X^*(\tilde{T} \times \tilde{T})^{\oplus |\Sigma(r)|}.$$

また、自然な射 $K^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X(\Sigma)) \rightarrow K(X(\Sigma))$ は全射となる。

Remark 4.7. 上の同型はこのままの形だと可算次元自由 $\mathbf{Z}[\text{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}} X(\Sigma)]$ -加群なんだから何でも同じではないか問題が生じる。本当は対応する生成元を書き下したという話。環構造の方はトーリック多様体の場合 (c.f. [22]) よりさらに複雑で、さまざまな分岐則を含むため筆者には書けません。尚、全射性は [29] より精密。

5 主定理の証明の方針

ここでは主定理 (Theorem 1. [17] 2002/7/01 ver.) がどのように示されているかを簡単に説明する。その前に一つだけ用語を導入する。

Steinberg の定理 [28] から $X(\Sigma)$ 上の直線束には $\tilde{G}_0 \times \tilde{G}_0$ -作用が一意的にはいる。しかしベクトル束の場合はそうではない。例えば任意の $\tilde{G}_0$ の既約非自明表現 V に対し、 $V \times X(\Sigma)$ には異なる $\tilde{G}_0 \times \tilde{G}_0$ -作用が少なくとも 3 通り入る。具体的には V には $\tilde{G}_0 \times \tilde{G}_0$ が自明に作用するもの、 V には最初の $\tilde{G}_0$ のみが作用するもの、 V には 2 番目の $\tilde{G}_0$ のみが作用するものという 3 つである。この時 2 番目のベクトル束を $V \otimes \mathcal{O}_X$ で、3 番目のベクトル束を $\mathcal{O}_X \otimes V$ で表す。

Step 1 : 関手の再構成 ([17] 3.3-3.15)

関手 Ξ の構成は分かりやすいが証明には向かない格好をしているので、別の方法によって再構成する。具体的には $V \otimes \mathcal{O}_X$ の格好のベクトル束と $\mathcal{E} \in EV(\Sigma)_{coh}$ の「交叉」を考える (ことが出来ることを示すのもその一部)。このようにして関手 $\Xi : EV(\Sigma)_{coh} \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma)_{coh}^I$ が定義できる。

Step 2 : 法線方向へのベクトル束の展開 ([17] 3.16-3.20)

基本的に $X(\Sigma)$ の境界因子は正規交叉であり、各軌道上でのベクトル束は1点でのファイバーで決まってしまうことから法方向への無限小近傍を考え、そこ上のデータで $EV(\Sigma)_{coh}$ を表す関手を構成する。そして特に $V \otimes \mathcal{O}_X$ と $\mathcal{O}_X \otimes V$ の格好のベクトル束がどのようなになっているかを調べる。

Step 3 : Admissibility 条件のチェック ([17] 3.21-3.25)

上の準備のもとで「ベクトル束の取り方によってはファイバーとなる部分」というのが定義でき、それらの条件がテンソル積で安定な事より淡中双対性の議論から右 $\tilde{G}_0$ -作用と左 $\tilde{G}_0$ -作用を結び付ける事が出来ることを示し、そのことを用いて Ξ の像が実際には $\mathcal{C}(\Sigma)_{coh}$ に含まれていなければいけないことを示す。ここが一番難しい部分。

Step 4 : 逆関手の構成 ([17] 3.26-3.31)

今度は逆に $\mathcal{C}(\Sigma)_{coh}$ の対象が与えられたときにそこから同変なベクトル束が構成できることを境界上で Step 2. の中間の構成を利用して示す。理論的にはここが一番難しくても良さそうなものだが Step 3. までのデータを逆にたどる事が出来ることを示すのが目的なので technical だが conceptual な難しさはない。

6 Example: $G = PGL_2$ case

この状況下では非自明な $X(= PGL_2$ の $SL_2 \times SL_2$ -同変コンパクト化) は 2×2 行列のなすベクトル空間の射影化として得られる3次元複素射影空間 $\mathbb{P}^3$ でしかありえないことが分かっているので、コンパクト化を指定するデータ Σ を全て省略する。 $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ と三角分解をとる。このとき、2つの圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}_{coh}$ を以下で定義する。

Object ($Ob\mathcal{C} = Ob\mathcal{C}_{coh}$ を以下で定義する)

$SL_2 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ の表現 V と、その整数でインデックスされた減少フィルター $F(\bullet)$ の組 $(V, F(\bullet))$ で次の3条件を満たすもの:

1. $N \gg 0$ であって $0 = F(N) \subset F(N-1) \subset \dots \subset F(-N) = V$ となるものが存在。
2. 全ての $n \in \mathbf{Z}$ に対して $F(n)$ は $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ 加群。
3. 全ての $n \in \mathbf{Z}$ に対して $\mathfrak{n}_- F(n) \subset F(n-1)$ 。

ここで V への $\mathfrak{sl}_2$ 作用は SL_2 作用の微分により入れる。

Morphism ($\mathcal{C}, \mathcal{C}_{coh}$ について以下で各々定義する)

$(V, F(\bullet)), (W, G(\bullet)) \in Ob\mathcal{C} = Ob\mathcal{C}_{coh}$ に対して

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}((V, F(\bullet)), (W, G(\bullet)))$

$:= \{f : V \rightarrow W; SL_2 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\text{-射} \mid \text{全ての } n \text{ に対して } f(F(n)) \subset G(n)\}$

$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{coh}}((V, F(\bullet)), (W, G(\bullet)))$

$:= \{f : V \rightarrow W; SL_2 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\text{-射} \mid \text{全ての } n \text{ に対して } f(F(n)) = G(n) \cap f(V)\}$

EV_{coh} で X 上の $SL_2 \times SL_2$ -同変ベクトル束を対象とする同変な接続層としての射を射とする圏を表す。同様に EV によって対象は EV_{coh} と同じでそのベクトル束としての同変射を射とする圏を表す。

定理 6.1 (PGL_2 の場合の主定理). $\mathbb{P}(M_2)$ 上の $SL_2 \times SL_2$ -同変ベクトル束と、その同変な正則ベクトル束としての射の成す圏 EV と $\mathcal{C}$ の間に圏同値 $\Xi: EV \rightarrow \mathcal{C}$ が存在する。

定理 6.2 (PGL_2 の場合の主定理'). $\mathbb{P}(M_2)$ 上の $SL_2 \times SL_2$ -同変ベクトル束と、その同変な連接層としての射の成す圏 EV_{coh} と $\mathcal{C}_{coh}$ の間に圏同値 $\Xi': EV_{coh} \rightarrow \mathcal{C}_{coh}$ が存在する。

ω を SL_2 の基本ウェイト、 $V \in \text{Rep } SL_2$ のウェイト $n\omega$ -部分を V_n とおく。また、次の環準同型を考える。

$$H^*(\mathbb{P}(M_2), \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[(c_+ + c_-)] / \langle (c_+ + c_-)^4 \rangle \subset \mathbb{Q}[a, b, c_+, c_-] / \langle a^2, b^2, c_+c_-, 2a - 2b + c_+ - c_- \rangle$$

定理 6.3 (PGL_2 の場合の全 Chern 類公式). $\mathcal{E} \in EV_1$ に対し $\Xi(\mathcal{E}) = (V, F(\bullet))$ とおくと、次が成立する。

$$c(\mathcal{E}) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \prod_{m \in \mathbb{Z}} [(1 + na - mc_+)(1 - na - mc_-)]^{\dim \text{gr}^m(F(\bullet) \cap V_n)}.$$

さて、圏 $\mathcal{C}$ の構成の中で出てきた条件はかなりきつい条件である。例えば次が成立する。

系 6.4. $\mathcal{E} \in EV$ とする。 $\mathcal{E} \otimes k(e)$ が既約 $SL_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -加群の時、 $\mathcal{E}$ の同変同型類は直線束のテンソル積を除いて丁度 $2^{\text{rank } \mathcal{E} - 1}$ 個ある。

特に、 $\mathcal{E} \otimes k(e) \cong \mathfrak{sl}_2 \boxtimes k$ の時には、 $\mathcal{E}$ は $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathcal{O}_X, TX, T^*X, \mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{sl}_2$ のいずれか一つと直線束のテンソル積により同型となる。

さて、 M_2 を 4 次元のベクトル空間だと考えたときには自然な $GL(M_2) \cong GL_4$ 作用が存在する。この作用は $\mathbb{P}^3$ へと落ち、また $SL_2 \times SL_2 \subset SL_4$ という埋め込みが M_2 への作用を通じて定まる。この時、 $\mathbb{P}(M_2) \cong SL_4/P$ となる放物型部分群に対応しない唯一の SL_4 の基本ウェイトを ω_1 、Dynkin 図形の真ん中のルートに対応する SL_4 の基本ウェイトを ω_2 、残りの基本ウェイトを ω_3 とおく。

そして SL_4 の最高ウェイト λ の既約有理表現を $V_\lambda^{SL_4}$ とすると球多様体の直線束の理論 (c.f. Brion [4]) は

$$\text{Res}_{SL_2 \times SL_2}^{SL_4} V_{n\omega_1}^{SL_4} \cong \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} V((n-2i)\omega) \boxtimes V((n-2i)\omega)$$

を直ちに主張した。

SL_4 の旗多様体を $\mathcal{F}$ とすると、 $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{P}^3$ という射が存在する。Borel-Weil 理論により $V_\lambda^{SL_4}$ に対応する $\mathcal{F}$ 上直線束を $\mathcal{L}_\lambda$ とおく⁷。この時、上記の場合以外は $p_*\mathcal{L}_\lambda$ が 0 ないし階数 2 以上のベクトル束になってしまうため、Brion [4] の結果は使えない。

しかし、 D を $\mathbb{P}^3 \setminus PGL_2$ に対応する因子、 H をその $\mathbb{P}^3$ の超平面因子とすると $p_*\mathcal{L}_{\omega_3} \cong TP^3(-H)$ が成立することが容易に分かる。さて、この時 $V(2n\omega)$ の減少フィルター $F_n(\bullet)$ を $F_n(m) = V(2n\omega)$ (if $m \leq 0$), $n_+^m V(2n\omega)$ (if $n > m > 0$), 0 (if $m > n$) と定義し、組 $(V(2n\omega), F_n(\bullet))$ をも単に F_n とおく。この時、2つの同変ベクトル束の同変ベクトル束としての組成列が等しい事を $\sim$ と書けば

$$p_*\mathcal{L}_{m\omega_1+n\omega_3} \sim \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Xi^{-1}(F_{n-2i}) \otimes \mathcal{O}_X((m-n+2i)H)$$

が成立する。ここで $H^0(\mathbb{P}^3, \Xi^{-1}(F_n) \otimes \mathcal{O}_X(mH))$ は

$$D_n^+ := \{(n_1\omega, n_2\omega) \in \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\omega; n_1 + 2n_2 \geq 2n\}$$

⁷ 普通の人とはパラメタの付け方が逆です

と

$$B_n := \{(2n\omega, 0), (2n\omega, 2\omega), \dots, (2n\omega, 2n\omega), ((2n-2)\omega, 2n\omega), \dots, (0, 2n\omega)\}$$

を用いて

$$\bigoplus_{(\lambda, \mu) \in D_n^+ \cap (B_n + m(\omega, \omega) - \mathbf{Z}_{\geq 0}(2\omega, 2\omega))} V(\lambda) \boxtimes V(\mu)$$

によって与えられる。 $J_{n,m} := D_n^+ \cap (B_n + m(\omega, \omega) - \mathbf{Z}_{\geq 0}(2\omega, 2\omega))$ とおくとこのことは次の主張を導く⁸。

定理 6.5. $\text{Res}_{SL_2 \times SL_2}^{SL_4} V_{n\omega_1 + m\omega_3}^{SL_4} \cong \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \bigoplus_{(\lambda, \mu) \in J_{m-2i, n-m+2i}} V(\lambda) \boxtimes V(\mu)$

Remark 6.6. 特に表現の重複度は ω_3 の係数 m (実は ω_2 と ω_3 の係数の和でよい) のみに依存して $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 以下であり、この ω_1 非依存性は $\mathbb{P}^3$ が球多様体であることから来る。

Acknowledgements: 指導教官の松本久義先生ならびに上述の研究を助けて頂いた方々、特に Michel Brion, Bertram Kostant, Friedrich Knop, Sharawan Kumar, 大島利雄, 関口次郎, Tonny Albert Springer, Alexis Tchoudjem と宇沢達の各氏に感謝します。

参考文献

- [1] A. Bialynicki-Birula, Some theorems on actions of algebraic groups, *Ann. of Math.* **98** (1973), 480–497.
- [2] F. Bien and M. Brion, Automorphisms and local rigidity of regular varieties. *Comp. Math.* **104**, no. 1, 1–26 (1996).
- [3] E. Bifet, On complete symmetric varieties. *Adv. Math.* **80**, no. 2, (1990) 225–249.
- [4] M. Brion, Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques. *Duke Math. J.* **58**, no. 2, 397–424 (1989).
- [5] M. Brion, Une extension du théorème de Borel-Weil. *Math. Ann.* **286**, (1990) 655–660.
- [6] M. Brion, Représentations des groupes réductifs dans des espaces de cohomologie. *Math. Ann.* **300**, 589–604. Corrigendum **301** (1995) 821–822 (1994).
- [7] M. Brion, Group Completions via Hilbert Schemes, arXiv:math.AG/0010215.
- [8] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation Theory and Complex Geometry*, Birkhäuser, Boston 1997.
- [9] C. De Concini and, C. Procesi, Complete symmetric varieties. In: *Invariant theory* (Montecatini, 1982), 1–44, *Lecture Notes in Math.*, **996**, Springer, Berlin, 1983.
- [10] C. De Concini and, C. Procesi, Complete symmetric varieties. II. Intersection theory, In: *Algebraic groups and related topics* (Kyoto/Nagoya, 1983), 481–513, *Adv. Stud. Pure Math.*, **6**, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [11] C. De Concini and, C. Procesi, Cohomology of compactifications of algebraic groups, *Duke Math. J.*, **53** (1986), no.3, 585–594.
- [12] C. De Concini and T.A. Springer, Betti numbers of complete symmetric varieties, *Geometry Today* (Rome, 1984), 87–107, *Progr. Math.* **60**, Birkhäuser Boston, Mass., 1985.
- [13] C. De Concini and T.A. Springer, Compactification of symmetric varieties, *Transformation Groups* **4** (1999), 273–300.
- [14] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, Kuang-yen Shih, Hodge cycles, motives, and Shimura varieties. *Lecture Notes in Mathematics*, **900**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.
- [15] G. Horrocks, Vector bundles on the punctured spectrum of a ring, *Proc. London Math. Soc.* **14** (1964) 689–713.
- [16] S. Kato, A Borel-Weil-Bott Type Theorem for group completions, to appear in *J. Algebra*
- [17] S. Kato, Equivariant vector bundles on group completions, math.AG/0202028, preprint.
- [18] S. Kato, in preparation.
- [19] A. A. Klyachko, Equivariant vector bundles on toral varieties, *Math. USSR Izvestiya* **35**, No. 2, (1990) 337–375.

⁸ 本当は一般の分岐則を書こうと思ったのですが、途中の計算が結構怪しく見えてきたので止めておきます

- [20] F. Knop, The Luna-Vust Theory of Spherical Embeddings, in: *Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups*, 225-250, Manoj Prakashan 1991. (can be retrieved from <http://www.math.rutgers.edu/~knop>)
- [21] F. Knop, A Harish-Chandra Homomorphism for Reductive Group Actions. *Ann. of Math.*, Ser. II **140** (1994) 253-288
- [22] R. Morelli, The K -theory of a toric variety. *Adv. Math.* **100**, No.2, 154-182 (1993).
- [23] D. Mumford, J. Fogarty and, F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory* (3rd Enlarged Edition), *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* **34**, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1994.
- [24] 小田忠雄, 凸体と代数幾何学, 紀伊國屋数学叢書 24, 紀伊國屋書店 1985.
- [25] 佐藤忍, 東京大学修士論文, 1982.
- [26] T.A. Springer, *Linear Algebraic Groups* 3rd Ed., *Prog. Math.* **9**, Birkhäuser Boston, 1998.
- [27] E. Strickland, A vanishing theorem for group compactifications. *Math. Ann.* **277** (1987), 165-171.
- [28] R. Steinberg, Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques, in "*Collq. Théorie des Groupes Algébriques*", 113-127, Gauthier-Villars, Paris, 1962.
- [29] Y. Takeda, On the K -groups of spherical varieties. *Osaka J. Math.* **35**, No.1, 73-81 (1998).
- [30] A. Tchoudjem, Cohomologie des fibrés en droites sur la compactification magnifique d'un group semi-simple adjoint, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **334** (2002), no.6, 441-444.
- [31] A. Tchoudjem, *thesis*, Université de Grenoble I, Institut Fourier (2002)
- [32] T. Uzawa, On equivariant completions of algebraic symmetric spaces. *Algebraic and topological theories* (Kinosaki, 1984), 569-577, Kinokuniya, Tokyo 1986.