表現論シンポジウム講演集, 2002
pp.126-142

半単純対称空間上の不変固有超関数の接続公式について
— ルートの符号と Cayley 変換に基づく考察 —

青木　茂　(拓殖大学・工学部)　aoki@la.takushoku-u.ac.jp
加藤末広　(北里大学・一般教育)　kato@clas.kitasato-u.ac.jp

半単純対称空間 X 上の不変固有超関数の接続公式は，X が群多様体のときの Harish-Chandra，平井武先生，X の階数が 1 のときの Faraut をはじめ多くの人により研究されてきた．我々は以前から X の階数が 2 以上の場合の幾つかのケースに対し，接続公式を個別にであるが，詳しく調べてきた (参考文献の [AK86] ～ [AK99B])．最近ルートの分類と Cayley 変換との関係等についてある程度一般的に述べられるようになったので，今回の講演ではまずその報告を行ない，後半で，X が $GL(2p,\ \mathbf{R})/(GL(p,\ \mathbf{R}) \times GL(p,\ \mathbf{R}))$ の場合に話を絞って，接続公式への応用を試みる．

1　ルートの分類

G を連結簡約型リー群，σ を G の包合的自己同型，H を $G^\sigma = \{g \in G \,|\, \sigma(g) = g\}$ の開部分群で，$X = G/H$ が半単純対称空間になるとする．$\mathfrak{g}$ を G のリー環とし，σ による $\mathfrak{g}$ の固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ とする．半単純元達からなる $\mathfrak{q}$ の可換部分代数のうち極大なものを $\mathfrak{j}$ とおく．このような $\mathfrak{j}$ を X の (infinitesimal な)Cartan 部分空間と呼ぶことにする．X のすべての Cartan 部分空間の次元は同じであることが知られているが，その値を X の階数と呼ぶ．θ を条件 $\sigma\theta = \theta\sigma$ を満たす $\mathfrak{g}$ の Cartan involution とし，θ による $\mathfrak{g}$ の固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とする．

$\Sigma(\mathfrak{j})$ を $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{j})$ に対応するルートの全体，$\Sigma(\mathfrak{j})^+$ をその中の正のルートの全体とする．$\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ に対して，α の固有空間を $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j};\ \alpha)$，$\mathfrak{g}(\mathfrak{j};\ \alpha) = \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j};\ \alpha) \cap \mathfrak{g}$ とする．また，$\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{g}_1$ に対し，その複素化を $(\mathfrak{g}_1)_c$ とする．$\mathfrak{g}_c$ の Killing form を B とする．

この節で，$\Sigma(\mathfrak{j})$ のルートの分類についてまとめておく．

$\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ とする．そのとき，

α が *real root* $\Longleftrightarrow \alpha(\mathfrak{j}) \subset \mathbf{R}$

α が *imaginary root* $\Longleftrightarrow \alpha(\mathfrak{j}) \subset i\mathbf{R}$

α が *complex root* $\Longleftrightarrow \alpha$ が real root でも imaginary root でもない

$\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ に対して,

X_α を $\mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j},\ \alpha)$ の元とする. $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j},\ -\alpha)$ を条件 $B(X_\alpha,\ X_{-\alpha}) = 1$ を満たすようにとる. $H_\alpha = [X_\alpha,\ X_{-\alpha}]$ とおく. そのとき, 任意の $H \in \mathfrak{j}$ に対して, $B(H,\ H_\alpha) = \alpha(H)$ が成立する.

$|\alpha|$ を Killing form B に関する α の長さ $|\alpha|^2 = B(H_\alpha,\ -\theta H_\alpha)$ として,

$$X'_\alpha = \sqrt{2}|\alpha|^{-1}X_\alpha,\quad X'_{-\alpha} = \sqrt{2}|\alpha|^{-1}X_{-\alpha},\quad H'_\alpha = 2|\alpha|^{-2}H_\alpha,$$

と定義する. そのとき,

$$[X'_\alpha,\ X'_{-\alpha}] = H'_\alpha,\quad [H'_\alpha,\ X'_{\pm\alpha}] = \pm 2X'_{\pm\alpha}.$$

が成立.

$$(\mathfrak{l}_{X_\alpha,\ X_{-\alpha}})_{\mathrm{c}} = \mathbf{C}H_\alpha + \mathbf{C}X_\alpha + \mathbf{C}X_{-\alpha},\quad \mathfrak{l}_{X_\alpha,\ X_{-\alpha}} = (\mathfrak{l}_{X_\alpha,\ X_{-\alpha}})_{\mathrm{c}} \cap \mathfrak{g}.$$

とおく.

定義. $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ に対して, 上のようにして $\mathfrak{l}_{X_\alpha,\ X_{-\alpha}}$ を定義する.

(1) α が real root の場合 :

(a) α が *vectorial root*

$\Longleftrightarrow B(X_\alpha,\ X_{-\alpha}) = 1$ を満たす任意の $X_\alpha \in \mathfrak{g}(\mathfrak{j};\ \alpha)$ と $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}(\mathfrak{j}; -\alpha)$ に対し, $\mathfrak{l}_{X_\alpha,\ X_{-\alpha}} \cap (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) = \{0\}$.

(b) α が *singular real root*

$\Longleftrightarrow B(X_\alpha,\ X_{-\alpha}) = 1$ を満たす適当な $X_\alpha \in \mathfrak{g}(\mathfrak{j};\ \alpha)$ と $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}(\mathfrak{j};\ -\alpha)$ をとると, $\mathfrak{l}_{X_\alpha,\ X_{-\alpha}} \cap (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) \neq \{0\}$.

(2) α が imaginary root の場合 :

(a) α が *compact root*

$\Longleftrightarrow B(X_\alpha,\ X_{-\alpha}) = 1$ を満たす任意の $X_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j};\ \alpha)$ と $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j}; -\alpha)$ に対し, $\mathfrak{l}_{X_\alpha,\ X_{-\alpha}} \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) = \{0\}$.

(b) α が *singular imaginary root*

$\Longleftrightarrow B(X_\alpha,\ X_{-\alpha}) = 1$ を満たす適当な $X_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j};\ \alpha)$ と $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j};\ -\alpha)$ をとると, $\mathfrak{l}_{X_\alpha,\ X_{-\alpha}} \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) \neq \{0\}$.

◎ $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ **が** real root **のとき**

大島-関口 ([OS]) に従い,

$$\mathfrak{g}^{\pm}(\mathrm{j};\alpha) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathrm{j};\alpha) \mid \sigma\theta X = \pm X\},$$
$$m^{\pm}(\alpha) = \dim \mathfrak{g}^{\pm}(\mathrm{j};\ \alpha)$$
とおく.

> **補題** *1*. α が real root のとき,
> (1) α が vectorial root $\Longleftrightarrow \forall\, X \in \mathfrak{g}(\mathrm{j};\alpha)\quad \sigma\theta X = X$; 即ち, $\mathfrak{g}^{-}(\mathrm{j};\alpha) = \{0\}$.
> (2) α が singular real root $\Longleftrightarrow \exists\, X \in \mathfrak{g}(\mathrm{j};\alpha);\ X \neq 0,\ \sigma\theta X = -X$;
> 即ち, $\mathfrak{g}^{-}(\mathrm{j};\alpha) \neq \{0\}$.

従って,

$$\alpha : \text{vectorial root} \quad\Longrightarrow\quad m^{-}(\alpha) = 0$$
$$\alpha : \text{singular real root} \quad\Longrightarrow\quad m^{-}(\alpha) \neq 0.$$

◎ $\alpha \in \Sigma(\mathrm{j})$ **が** imaginary root **のとき**

定義. $\alpha \in \Sigma(\mathrm{j})$ を imaginary root とする.
$$m^{+}(\alpha) = \dim(\mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathrm{j};\ \alpha) \cap \mathfrak{p}),$$
$$m^{-}(\alpha) = \dim(\mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathrm{j};\ \alpha) \cap \mathfrak{k}),$$

符号$\pm$はθの符号と無関係で, むしろαが real root の場合の符号の定義に見合うように作られている (cf. 命題1).

> **補題** *2*. α が imaginary root のとき,
> (1) α が compact root $\Longleftrightarrow m^{+}(\alpha) = 0$.
> (2) α が singular imaginary root $\Longleftrightarrow m^{+}(\alpha) \neq 0$.

◎ $\alpha \in \Sigma(\mathrm{j})$ **が** complex root **のとき**

$\alpha = \alpha_1 + \sqrt{-1}\,\alpha_2 \quad (\alpha_i \in \mathrm{j}^*)$ が complex root であるとき,

$$\mathfrak{g}_{\alpha,\,\mathrm{c}} = \sum_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 = +,\ -} \mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathrm{j};\ \varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\sqrt{-1}\alpha_2)$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \mathfrak{g}_{\alpha,\,\mathrm{c}} \cap \mathfrak{g}$$

とおく. そのとき, $\mathfrak{g}_{\alpha,\,\mathrm{c}} = \mathfrak{g}_{\alpha} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_{\alpha}$. 従って, $\mathfrak{g}_{\alpha,\,\mathrm{c}} = (\mathfrak{g}_{\alpha})_{\mathrm{c}}$ となることが分かる.

補題 *3*. α が complex root のとき,

$$\begin{aligned}\dim(\mathfrak{g}_\alpha \cap (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})) &= \dim(\mathfrak{g}_\alpha \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})) \\ &= \dim(\mathfrak{g}_\alpha \cap (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})) = \dim(\mathfrak{g}_\alpha \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})).\end{aligned}$$

$\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{g}_{\alpha,\mathrm{c}} = \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}_\alpha$ に注意して，complex root についての符号 $m^+(\alpha)$，$m^-(\alpha)$ を次のように定義する.

定義. $\alpha = \alpha_1 + \sqrt{-1}\alpha_2 \in \Sigma(\mathfrak{j})$ が complex root のとき，$m^+(\alpha)$，$m^-(\alpha)$ を，

$$m^+(\alpha) = m^-(\alpha) = \frac{1}{4}\dim_{\mathbf{C}}\left(\sum_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2=+,\ -} \mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j};\ \varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\sqrt{-1}\alpha_2)\right)$$

により定義する.

$m^+(\alpha)$，$m^-(\alpha)$ は半整数に値をとることに注意する.

◎ まとめ

命題 *1*. (1) α が real root のとき,

$$m^+(\alpha) = \dim\{(\mathfrak{g}(\mathfrak{j},\ \alpha) + \mathfrak{g}(\mathfrak{j},\ -\alpha)) \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})\}$$

$$m^-(\alpha) = \dim\{(\mathfrak{g}(\mathfrak{j},\ \alpha) + \mathfrak{g}(\mathfrak{j},\ -\alpha) \cap (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})\}$$

(2) α が imaginary root のとき,

$$m^+(\alpha) = \dim\{(\mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j},\ \alpha) + \mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j},\ -\alpha)) \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})\}$$

$$m^-(\alpha) = \dim\{(\mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j},\ \alpha) + \mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j},\ -\alpha)) \cap (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})\}$$

(3) $\alpha = \alpha_1 + \sqrt{-1}\,\alpha_2$ が complex root のとき,

$$m^+(\alpha) = \dim\left\{\left(\sum_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2=+,\ -} \mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j};\ \varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\sqrt{-1}\,\alpha_2)\right) \cap (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})\right\}$$

$$m^-(\alpha) = \dim\left\{\left(\sum_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2=+,\ -} \mathfrak{g}_{\mathrm{c}}(\mathfrak{j};\ \varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\sqrt{-1}\,\alpha_2)\right) \cap (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})\right\}.$$

2 Cayley 変換

$\mathfrak{j}$: $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ の Cartan 部分空間,

α: $\mathfrak{j}$ の singular real root とする.

$X_\alpha \in \mathfrak{g}(\mathfrak{j};\ \alpha)$ を $B(X_\alpha,\ -\theta X_\alpha) = 1$, $\sigma\theta X_\alpha = -X_\alpha$ を満たすように選ぶ. (α は $\mathfrak{j}$ の singular real root なので補題 1 よりこのことは可能.) そして, $X_{-\alpha} = -\theta X_\alpha$ とおき, X'_α, $X'_{-\alpha}$, H'_α を 1 節のように定義する：

$$X'_\alpha = \sqrt{2}|\alpha|^{-1}X_\alpha,\quad X'_{-\alpha} = \sqrt{2}|\alpha|^{-1}X_{-\alpha},\quad H'_\alpha = 2|\alpha|^{-2}H_\alpha.$$

そのとき, $\theta H'_\alpha = -H'_\alpha$ が成立する.

σ_α を $\alpha = 0$ により定義された $\mathfrak{j}$ の超平面とする. $\mathfrak{j} = \sigma_\alpha + \mathbf{R}H'_\alpha$ に注意.

$${}^{\nu}\mathfrak{j} = \sigma_\alpha + \mathbf{R}(X'_\alpha - X'_{-\alpha}).$$

とおく. そのとき, ${}^{\nu}\mathfrak{j}$ は ($\mathfrak{g}$ の automorphism の下で) $\mathfrak{j}$ に共役でない $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ の Cartan 部分空間になる.

今 $\mathfrak{g}_c$ の内部自己同型 $\nu = \nu_\alpha$ を次のように定義する：

$$\nu = \exp(-\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{ad}(\mathrm{X}'_\alpha + \mathrm{X}'_{-\alpha})).$$

そのとき, $\nu|\sigma_\alpha = 1$ と $\nu H'_\alpha = \sqrt{-1}(X'_\alpha - X'_{-\alpha})$ が示せるので, $\nu(\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}) = ({}^{\nu}\mathfrak{j})_{\mathbb{C}}$ が成り立つ.

$\mathfrak{j}$ のルート β に対して, ${}^{\nu}\beta(Y) = \beta(\nu^{-1}(Y))$ $(Y \in {}^{\nu}\mathfrak{j})$ とおく. すぐ分かるように, ${}^{\nu}\beta$ は ${}^{\nu}\mathfrak{j}$ に関するルート. ${}^{\nu}\alpha$ は singular imaginary root になる. さらに,

$${}^{\nu}\alpha|_{\sigma_\alpha} = 0,\quad {}^{\nu}\alpha(X'_\alpha - X'_{-\alpha}) = -2\sqrt{-1},\quad H'_{{}^{\nu}\alpha} = \nu H'_\alpha = \sqrt{-1}(X'_\alpha - X'_{-\alpha}).$$

が成立. $\sigma_{\nu\alpha}$ を ${}^{\nu}\alpha = 0$ により定義された ${}^{\nu}j$ の超平面とするとき, $\sigma_\alpha = \sigma_{\nu\alpha} = \sigma_\alpha \cap \sigma_{\nu\alpha}$ が成立.

$$\sigma'_\alpha = \{Y \in \sigma_\alpha \mid \beta(Y) \neq 0 \ \text{ for } \forall\, \beta \in \Sigma(\mathfrak{j}) \text{ such that } \beta \notin \mathbf{R}\alpha\}.$$

とおくと, $\sigma_\alpha = \sigma_{\nu\alpha} = \sigma_\alpha \cap \sigma_{\nu\alpha}$ に属する半正則半単純元全体の集合は $\sigma'_\alpha = \sigma'_{\nu\alpha}$ に一致する.

Cayley 変換により, ルートの性質がどう変わるかの簡単な事実を述べておく.

補題 *4*. Singular real root $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ に対し，$\beta \in \Sigma(\mathfrak{j})$ が，$<\alpha,\ \beta>=0$，かつ $\alpha+\beta \notin \Sigma(\mathfrak{j})$ と $-\alpha+\beta \notin \Sigma(\mathfrak{j})$ を満たす
$\Longrightarrow$

$$\begin{array}{lll}
\beta: \text{ vectorial} & \Longrightarrow & {}^{\nu}\beta: \text{ vectorial} \\
\beta: \text{ singular real} & \Longrightarrow & {}^{\nu}\beta: \text{ singular real} \\
\beta: \text{ singular imaginary} & \Longrightarrow & {}^{\nu}\beta: \text{ singular imaginary} \\
\beta: \text{ compact} & \Longrightarrow & {}^{\nu}\beta: \text{ compact} \\
\beta: \text{ complex} & \Longrightarrow & {}^{\nu}\beta: \text{ complex}
\end{array}$$

ただし，$<\alpha,\ \beta>$ は Killing form から自然に定まる内積とする．

例 *1*. 階数3以上のBC型ルート系：

$$\Sigma(\mathfrak{j}) = \{\pm e_i,\ \pm 2e_i,\ \pm(e_i \pm e_j) \mid 1 \le i,\ j \le r,\ i \ne j\}$$

$\alpha = e_i$ ととると，$\beta = \pm 2e_j,\ \pm(e_j \pm e_k) \quad (i \ne j,\ k)$ に対し，$\alpha+\beta \notin \Sigma(\mathfrak{j})$ かつ $-\alpha+\beta \notin \Sigma(\mathfrak{j})$ なので補題4が適用できる．

3 $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ に対する符号 $m^{+}(\alpha)$，$m^{-}(\alpha)$ の調べ方

$\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ を singular real root，σ_α を $\alpha = 0$ により定義された $\mathfrak{j}$ の超平面とする．

命題 *2*. $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{j})$ を singular real root として，$\mathfrak{g}_1 = Z_{\mathfrak{g}}(\sigma_\alpha)$，$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}$ とおく．そのとき，

$$\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1 = \sigma_\alpha \oplus \mathfrak{g}^s/\mathfrak{h}^s.$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^s &= \mathfrak{m}_1^{\perp} \oplus \mathbf{R}H_\alpha \oplus \sum_{\beta=\pm\alpha,\ \pm 2\alpha} \mathfrak{g}(\mathfrak{j};\ \beta), \\
\mathfrak{h}^s &= \mathfrak{g}^s \cap \mathfrak{h}
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{j};\ \beta) = \mathfrak{g}^s(\mathbf{R}H_\alpha,\ \beta|_{\mathbf{R}H_\alpha}) \qquad (\beta = \pm\alpha,\ \pm 2\alpha).$$

ここで，$\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{j})$，$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} \cap Z(\mathfrak{g}_1)$，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_1^{\perp}$ とする．
$\mathfrak{g}^s/\mathfrak{h}^s$ は $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1$ の半単純部分である．

この命題により，$m^{\pm}(\alpha)$ と $m^{\pm}(2\alpha)$ の符号を見るには，$\mathfrak{g}^s/\mathfrak{h}^s$ でのルート $\pm\alpha|_{\mathbf{R}H_\alpha}$，

$\pm 2\alpha|_{\mathbf{R}H_\alpha}$ の符号を調べればよい．

$\mathfrak{g}^s/\mathfrak{h}^s$ が群多様体であるとする．この場合，singular real root α に対し，$\alpha=0$ から定まる部分対称空間を $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1=\sigma_\alpha\oplus\mathfrak{g}^s/\mathfrak{h}^s$．とすると，(半単純部分 $\mathfrak{g}^s/\mathfrak{h}^s$ はこの空間が階数1であることから，) 自動的に $\mathfrak{sl}(2,\ \mathbf{R})$ に同型になる．

$\mathfrak{g}^s/\mathfrak{h}^s$ が一般の半単純対称空間である場合も，$\alpha=0$ から定まる部分対称空間の半単純部分 $\mathfrak{g}^s/\mathfrak{h}^s$ の階数は勿論1であるが，階数1の半単純対称空間は無限個存在するので，どの半単純対称空間に同型であるかを判断するにはその基準となるものが必要になる．

この基準となるものが α についての符号の情報である．$(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ を階数1の半単純対称空間，$\mathfrak{j}$ を $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ の Cartan 部分空間として，α を $\Sigma(\mathfrak{j})$ の短い方の正ルートとする．そのとき，付録の表1から分かるように，階数1の半単純対称空間 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ と行列 $\begin{pmatrix} m^+(\alpha) & m^+(2\alpha) \\ m^-(\alpha) & m^-(2\alpha) \end{pmatrix}$ の間には互いに1対1の関係がある．このことと命題2から，singular real root α について，α に関する符号のデータから，$\alpha=0$ に対応する部分対称空間の半単純部分 $\mathfrak{g}^s/\mathfrak{h}^s$ の情報が正確に得られる．

◎ 階数1の半単純対称空間と符号との関係

$(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ を階数1の半単純対称空間，$\mathfrak{j}$ を $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ の Cartan 部分空間として，α を $\Sigma(\mathfrak{j})$ の短い方の正ルートとする．そのとき付録の表1が成立する (split Cartan 部分空間の符号の部分は大島-関口 ([OS]) の P.462 と P.466 ～ P.467 による．)

注意．階数1の群多様体 $\mathfrak{sl}(2,\ \mathbf{R})\cong(\mathfrak{sl}(2,\ \mathbf{R})\times\mathfrak{sl}(2,\ \mathbf{R}))/\triangle\mathfrak{sl}(2,\ \mathbf{R})$ は $(\mathfrak{so}(2,\ 2),\ \mathfrak{so}(2,\ 1))$ に同型なので，表1より対応する符号は，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であることが分かる．

表1の compact Cartan 空間の符号の部分は，

(1) $\mathfrak{j}$ が split Cartan 部分空間，compact Cartan 部分空間いずれの場合も，

$$\sum_{\beta\in\Sigma^+(\mathfrak{j})} m^+(\beta)+\dim(\mathfrak{j}\ \text{の split 部分})=\dim(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q})$$

$$\sum_{\beta\in\Sigma^+(\mathfrak{j})} m^-(\beta)+\dim(\mathfrak{j}\ \text{の toroidal 部分})=\dim(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}).$$

(2) ν_α 若しくは $\nu_{2\alpha}$ により，$\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j},\ \beta)$ $(\beta\in\Sigma(\mathfrak{j}))$ 等がどう移されるか？

など調べて得られる．II_1，II_2，II_3 の部分では，α についての Cayley 変換をとっても 2α についての Cayley 変換をとっても H-共役を除いてどちらでも勿論同じだが，compact Cartan 部分空間の符号の変化の様子をみるには後者の変換で考えた方が分かりやすい．

◎ $\mathfrak{gl}(\mathbf{2p},\ \mathbf{R})/(\mathfrak{gl}(\mathbf{p},\ \mathbf{R}) \times \mathfrak{gl}(\mathbf{p},\ \mathbf{R}))$ の場合の例

$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2p,\ \mathbf{R})$

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix} \mid Y_{11} \in \mathfrak{gl}(p,\ \mathbf{R}),\ Y_{22} \in \mathfrak{gl}(p,\ \mathbf{R}) \right\}$$

$\mathfrak{j}^{k,l}$　$(k + 2l \leq p)$ は次の形の行列からなる $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ の Cartan 部分空間:

$$Y = \left(\begin{array}{cccccc} & & & B & & \\ & 0 & & & A & \\ & & & & & C \\ -B & & & & & \\ & A & & & 0 & \\ & & C & & & \end{array}\right) \qquad (*)$$

ここで,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l \end{pmatrix}, \qquad A_i = \begin{pmatrix} h_{k+2i} & h_{k+2i-1} \\ -h_{k+2i-1} & h_{k+2i} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_k \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} h_{k+2l+1} & & & \\ & h_{k+2l+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_n \end{pmatrix}$$

ここで, $h_i \in \mathbf{R}$, 空白の部分はすべて 0. $\mathfrak{j}^{k,l}$ の toroidal part の次元は $k + l$.

Cartan 部分空間の H 共役類の完全代表系は, $\{\mathfrak{j}^{k,l}\}$ $(k + 2l \leq p)$ である.

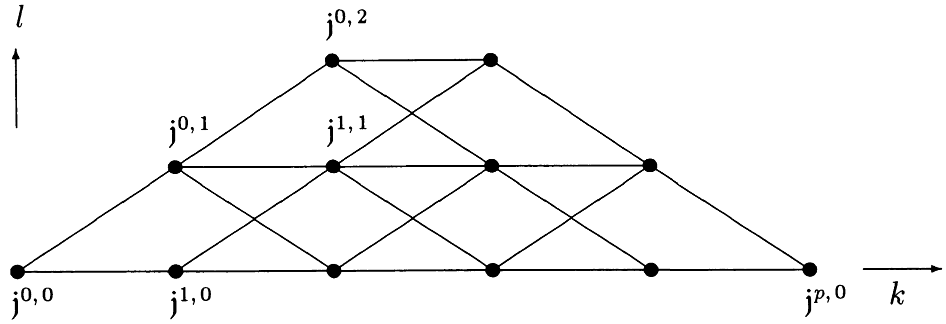
X の Cartan 部分空間 $\mathfrak{j}$ の H 共役類を $[\mathfrak{j}]$ とする. X の２つの Cartan 部分空間の共役類 $[\mathfrak{a}]$ と $[\mathfrak{b}]$ について, $\mathfrak{b} = {}^{\nu}\mathfrak{a}$ のとき, $[\mathfrak{a}] \to [\mathfrak{b}]$, 或いは単に $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ と書くことにする.

Cayley 変換は次のように与えられる.

(1) $[\mathfrak{j}^{k,l}] \to [\mathfrak{j}^{k+1,l}]$

(2) $[\mathfrak{j}^{k,l}] \to [\mathfrak{j}^{k,l+1}]$

(3) $[\mathfrak{j}^{k,l}] \to [\mathfrak{j}^{k+2,l-1}]$.



各 Cartan 部分空間 $\mathfrak{j}^{k,l}$ に対して,

$$\Sigma(\mathfrak{j}^{k,l}) = \{\pm 2e_i \quad \pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i, j \leq p,\ i \neq j\}.$$

ただし，各 Cartan 部分空間 $\mathfrak{j}^{k,l}$ について，$e_i \in (\mathfrak{j}^{k,l})^*_{\mathbb{C}}$ は次のように与えられる：(*) で与えられた $Y \in \mathfrak{j}^{k,l}$ について,

$$e_i(Y) = \sqrt{-1}\, h_i \quad (1 \leq i \leq k), \qquad e_i(Y) = h_i \quad (k+2l+1 \leq i \leq p),$$

$$e_{k+2i-1}(Y) = h_{k+2i} - \sqrt{-1}\, h_{k+2i-1} \quad (1 \leq i \leq l),$$

$$e_{k+2i}(Y) = h_{k+2i} + \sqrt{-1}\, h_{k+2i-1} \quad (1 \leq i \leq l).$$

このとき，$(\mathfrak{j}^{k,l})^*_{\mathbb{C}}$ に属する e_i は Cayley 変換 ν により $({}^{\nu}(\mathfrak{j}^{k,l}))^*_{\mathbb{C}}$ に属する e_i に移る。

$\Sigma(\mathfrak{j}^{k,l})$ の正ルート $\alpha = 2e_i$，$e_i \pm e_j$ の符号 $\begin{pmatrix} m^+(\alpha) & m^+(2\alpha) \\ m^-(\alpha) & m^-(2\alpha) \end{pmatrix}$ は次の通りである.

$2e_i$ $(1 \leq i \leq k)$	$2e_{k+i}$ $(1 \leq i \leq 2l)$	$2e_i$ $(k+2l+1 \leq i \leq p)$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
singular imag.	complex	singular real

$e_i \pm e_j$ $(1 \leq i < j \leq k)$	$e_{k+2i-1} - e_{k+2i}$ $(1 \leq i \leq l)$	$e_{k+2i-1} + e_{k+2i}$ $(1 \leq i \leq l)$	$e_i \pm e_j$ $(k+2l+1 \leq i < j \leq p)$	$e_i \pm e_j$ $i < j$となる その他の 組み合わせ
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
singular imag.	singular imag.	singular real	singular real	complex

従って，命題2と付録の表1より，

(1) の Cayley 変換 $\nu_{2e_{k+2l+i}}$ $(1 \leq i \leq p-k-2l)$ に対応する部分対称空間の半単純部分は，

$$(\mathfrak{gl}(2,\,\mathbf{R}),\ (\mathfrak{gl}(1,\,\mathbf{R}) \times \mathfrak{gl}(1,\,\mathbf{R})).$$

(2) の Cayley 変換 $\nu_{e_{k+2l+i} \pm e_{k+2l+j}}$ $(1 \leq i < j \leq p-k-2l)$ に対応する部分対称空間の半単純部分は，

$$(\mathfrak{so}(2,\,2),\ \mathfrak{so}(2,\,1)) \cong (\mathfrak{sl}(2,\,\mathbf{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\,\mathbf{R}),\ \triangle\mathfrak{sl}(2,\,\mathbf{R})) \cong \mathfrak{sl}(2,\,\mathbf{R}).$$

(3) の Cayley 変換 $\nu_{e_{k+2i-1}+e_{k+2i}}$ $(1 \leq i \leq l)$ に対応する部分対称空間の半単純部分は，

$$(\mathfrak{so}(1,\,3),\ \mathfrak{so}(1,\,2)) \cong (\mathfrak{sl}(2,\,\mathbf{C}),\ \mathfrak{sl}(2,\,\mathbf{R})).$$

○ 特に，$p=2$ のときの場合の符号を以下挙げておく．

($\mathfrak{gl}(4,\,\mathbf{R})/(\mathfrak{gl}(2,\,\mathbf{R}) \times \mathfrak{gl}(2,\,\mathbf{R}))$ での例)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(4,\,\mathbf{R})$$

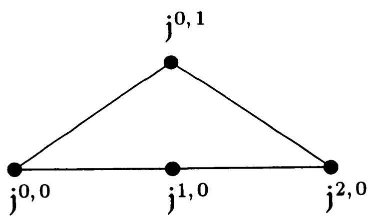
$$\mathfrak{h} = \{Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix} \mid Y_{11} \in \mathfrak{gl}(2,\,\mathbf{R}),\ Y_{22} \in \mathfrak{gl}(2,\,\mathbf{R})\}$$

Cartan 部分空間の H 共役類の完全代表系： $\mathfrak{j}^{0,0}$, $\mathfrak{j}^{1,0}$, $\mathfrak{j}^{2,0}$, $\mathfrak{j}^{0,1}$ は次のように与えられる.

$$\mathfrak{j}^{0,0}=\left\{X=\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} s & 0 \\ 0 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} s & 0 \\ 0 & t \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}\ ;\, s,\, t\in\mathbf{R}\right\},\quad \mathfrak{j}^{1,0}=\left\{X=\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} s & 0 \\ 0 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} -s & 0 \\ 0 & t \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}\ ;\, s,\, t\in\mathbf{R}\right\},$$

$$\mathfrak{j}^{2,0}=\left\{X=\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} s & 0 \\ 0 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} -s & 0 \\ 0 & -t \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}\ ;\, s,\, t\in\mathbf{R}\right\},\quad \mathfrak{j}^{0,1}=\left\{X=\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} t & s \\ -s & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} t & s \\ -s & t \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}\ ;\, s,\, t\in\mathbf{R}\right\}.$$

$\mathfrak{j}^{0,0}$ が split Cartan 部分空間, $\mathfrak{j}^{2,0}$ が compact Cartan 部分空間である.



ここで, $\mathfrak{j}^{k,l}$ の toroidal part の次元は $k+l$.

(1) $[\mathfrak{j}^{k,0}]\to[\mathfrak{j}^{k+1,0}]$ $(k=0,\,1)$

(2) $[\mathfrak{j}^{0,0}]\to[\mathfrak{j}^{0,1}]$,

(3) $[\mathfrak{j}^{0,1}]\to[\mathfrak{j}^{2,0}]$.

$\mathfrak{j}^{0\,0}$ のルートの重複度と符号

$2e_1$	$2e_2$	e_1-e_2	e_1+e_2
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
singular real	singular real	singular real	singular real

$\mathfrak{j}^{1,0}$ のルートの重複度と符号

$2e_1$	$2e_2$	e_1-e_2	e_1+e_2
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
singular imaginary	singular real	complex	complex

$\mathfrak{j}^{2,0}$ のルートの重複度と符号

$2e_1$	$2e_2$	$e_1 - e_2$	$e_1 + e_2$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
singular imaginary	singular imaginary	singular imaginary	singular imaginary

$\mathfrak{j}^{0,1}$ のルートの重複度と符号

$2e_1$	$2e_2$	$e_1 - e_2$	$e_1 + e_2$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
complex	complex	singular imaginary	singular real

従って，命題2と表1より，

(1) の Cayley 変換 ν_{2e_i} $(k < i \leq 2)$ に対応する部分対称空間の半単純部分は，

$$(\mathfrak{gl}(2, \mathbf{R}),\ (\mathfrak{gl}(1, \mathbf{R}) \times \mathfrak{gl}(1, \mathbf{R})).$$

(2) の Cayley 変換 $\nu_{e_1-e_2}$ に対応する部分対称空間の半単純部分は，

$$(\mathfrak{so}(2, 2),\ \mathfrak{so}(2, 1)) \cong (\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}),\ \triangle\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}).$$

(3) の Cayley 変換 $\nu_{e_1+e_2}$ に対応する部分対称空間の半単純部分は，

$$(\mathfrak{so}(1, 3),\ \mathfrak{so}(1, 2)) \cong (\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}),\ \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})).$$

4 不変固有超関数

$X = G/H$ を半単純対称空間，$\mathcal{O}$ を X の H 不変開集合とする．$\mathbf{D}(X)$ を X の不変微分作用素環，χ を $\mathbf{D}(X)$ の指標とする: $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{D}(X), \mathbf{C})$.

定義．超関数 $\Theta \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ が次の2つの条件を満たすとき，Θ は無限小指標 χ をもつ $\mathcal{O}$ 上の**不変固有超関数** *(IED)* であるという．

i) Θは H 不変

ii) $D.\Theta = \chi(D)\Theta \quad (\forall D \in \mathbf{D}(X))$

無限小指標 χ をもつ $\mathcal{O}$ 上の不変固有超関数 (IED) 全体の空間を $\mathcal{D}_{\chi, H}(\mathcal{O})$ と書くことにする．

注意 (1) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ とする．そのとき，任意の $\Theta \in \mathcal{D}_{X,H}(\mathcal{O}_2)$ の $\mathcal{O}_1$ への制限 $\Theta|_{\mathcal{O}_1}$ は $\mathcal{D}_{X,H}(\mathcal{O}_1)$ の元．

(2) X' を X の正則半単純元からなる集合とすると，X' は X の開稠密な H 不変な集合であるが，任意の X' 上の IED は実解析的な関数になる．

上の注意から，X 上の任意の IED に対して，その X' への制限 $\Pi = \Theta|_{X'}$ は X' 上の IED になり，従って，Π は $X' = \bigsqcup_{l \in L} H.J_l'$ 上実解析的な関数になる．ここに，$\{J_l\}_{l \in L}$ は (global) Cartan 部分空間の H-共役類の完全代表系とする．こうして $\Pi_l := \Theta|_{J_l'}$ とおくことにより，我々は実解析的関数の族 $\{\Pi_l\}_{l \in L}$ を得る．IED の正確な形を知るために，Π_l の間に成り立つ関係式（大域的接続公式）を調べたい．このために，我々は $\bigcup_{l \in L} J_l$ の各半正則半単純元 x_0 について，x_0 の近傍での IED に対する条件（局所的接続条件）をまず調べる必要がある．

5 $X = GL(2p, \mathbf{R}) / (GL(p, \mathbf{R}) \times GL(p, \mathbf{R}))$ に対する IED の接続公式

σ は $\sigma(g) = I_{p,p}\, g\, I_{p,p}$ により定まる $G = GL(2p, \mathbf{R})$ の包合的自己同型とする．（ここで，$I_{p,p} = \mathrm{diag}(1_p, -1_p)$．）$H = G^\sigma$ は $GL(p, \mathbf{R}) \times GL(p, \mathbf{R})$ に同型になる．この節で，$X = G/H = GL(2p, \mathbf{R}) / (GL(p, \mathbf{R}) \times GL(p, \mathbf{R}))$ 上の IED を研究する．

5.1 Cartan 部分空間と隣接関係，Weyl 群

◎ **Cartan 部分空間**．最初に G/H の (global な)Cartan 部分空間を以下のように定義しよう．

$\tilde{\sigma}$ を $\tilde{\sigma}(gH) = g\sigma(g^{-1})$ と定義される X の G への自然な埋め込み $X \hookrightarrow G$ とし，この埋め込みにより X を G の部分多様体 $\tilde{\sigma}(X)$ と同一視しておく．

3 節で定義した X の (infinitesimal な)Cartan 部分空間 $\mathfrak{j}^{k,l}$ に対して，$J^{k,l} = Z_{\tilde{\sigma}(X)}(\mathfrak{j}^{k,l})$ とおく．Y を 3 節の $(*)$ で与えられる $\mathfrak{j}^{k,l}$ の元とする．$\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \cdots, p-k-2l)$ に対し，$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{p-k-2l})$ とおき，$j_\varepsilon^{k,l} \in \tilde{\sigma}(X) = X$ を次のように

定義する.

$$\begin{aligned} j_\varepsilon^{k,l} &= j_\varepsilon^{k,l}(h_1, \cdots, h_k, h_{k+1}, h_{k+2}, \cdots, h_{k+2l-1}, h_{k+2l}, h_{k+2l+1}, \cdots, h_{2p}) \\ &:= (\exp Y) \times \mathrm{diag}(\overbrace{1, \cdots, 1}^{k+2l}, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-k-2l}, \overbrace{1, \cdots, 1}^{k+2l}, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-k-2l}). \end{aligned}$$

さらに, $J_\varepsilon^{k,l} = \{j_\varepsilon^{k,l} \in \tilde{\sigma}(X) \mid h_i \in \mathbf{R}\ (i = 1, \cdots, p)\}$, $J^{k,l} = \bigsqcup_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^{p-2l-k}} J_\varepsilon^{k,l}$ とおく. そのとき, $J^{k,l}$ は infinitesimal な Cartan 部分空間 $\mathfrak{j}^{k,l}$ に対応した global Cartan 部分空間で, 各 $J_\varepsilon^{k,l}$ は $J^{k,l}$ の連結成分になる. global Cartan 部分空間の H 共役類の完全代表系は, $\{J^{k,l}\}$ $(k+2l \leq p)$ であることに注意する.

◎ global Cartan 部分空間の間の隣接関係.

$(1)'$ $[J_\varepsilon^{k,l}] \to [J_{\varepsilon'}^{k+1,l}]$ ただし, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{p-2l-k})$ のとき, $\varepsilon' = (\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{p-2l-k})$

$(2)'$ $[J_\varepsilon^{k,l}] \to [J_{\varepsilon''}^{k,l+1}]$
ただし, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{p-2l-k})$ $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2)$ のとき, $\varepsilon'' = (\varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_{p-2l-k})$

$(3)'$ $[J_\varepsilon^{k,l}] \to [J_\varepsilon^{k+2,l-1}]$.

◎ Weyl 群.

$$W(J^{k,l}) \cong \left((\mathbf{Z}_2)^k \rtimes \mathfrak{S}_k\right) \times \left(((\mathbf{Z}_2)^2)^l \rtimes \mathfrak{S}_l\right) \times \left((\mathbf{Z}_2)^{p-k-2l} \rtimes \mathfrak{S}_{p-k-2l}\right)$$

5.2 局所接続公式の証明方針

3 種の隣接関係 $(1)'$, $(2)'$, $(3)'$ に応じて, 付随する対称空間の半単純部分のタイプが 3 つあり, それらが $p = 2$ のときとそれぞれ同型であることから, $p = 2$ のときと (ほぼ) 同様にして, 次の 3 つの型の局所接続公式が出てくる.

$(1)'$ 自然に隣の Cartan 部分空間につながる.

$(2)'$ 群のタイプ : 任意の $j \in J_\varepsilon^{k,l} \cap J_{\varepsilon''}^{k,l+1}$ (j は半正則半単純元) に対して次の接続公式が成り立つ :

$\omega\Theta|_{(J_\varepsilon^{k,l})'}$ は $J_\varepsilon^{k,l}$ における j のある近傍まで実解析的に延長され, かつ次式

が成立する：

$$\frac{d}{ds}\omega\Theta|_{(J_{\epsilon}^{k,l})'}(\dot{j}_{\mathbf{1}}^{k,l}(0,\cdots,0,0,\cdots,0,\overbrace{-s}^{k+2l+1},s,0,\cdots,0)\,j)|_{s=\pm 0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{d}{ds}\omega\Theta|_{(J_{\epsilon''}^{k,l+1})'}(\dot{j}_{\mathbf{1}}^{k,l+1}(0,\cdots,0,0,\cdots,0,\overbrace{s}^{k+2l+1},0,\cdots,0)\,j)|_{s=\pm 0}$$

ただし，$\mathbf{1}=(1,1,\cdots,\cdots,1)$，$\omega=\bigsqcup_{p\geq i>j\geq 1}(t_i-t_j)$．ここで，$t_i$ は h_i から次のように定まる複素数：

$1\leq i\leq k$ のとき，$t_i=\cos h_i\in\mathbf{R}$.

$k+2l+1\leq i\leq p$ のとき，$t_i=\cosh h_i\in\mathbf{R}$.

$1\leq i\leq l$ のとき，$\begin{cases} t_{k+2i-1}=\cosh(-h_{k+2i}+\sqrt{-1}\,h_{k+2i-1})\in\mathbf{C} \\ t_{k+2i}=\overline{t_{k+2i-1}}=\cosh(h_{k+2i}+\sqrt{-1}\,h_{k+2i-1})\in\mathbf{C}. \end{cases}$

$(3)'$　群の c-dual のタイプ（$(2)'$ とほぼ同様な接続公式をもつ．）

参考文献

[AK86] S. Aoki and S. Kato, *On connection formulas for invariant eigendistributions on* $U(4,2)/(U(2)\times U(2,2))$, RIMS kokyuroku, vol. 598 (1986), 1–77, (Japanese).

[AK91] S. Aoki and S. Kato, *On invariant eigendistributions on* $U(p,q)/(U(r)\times U(p-r,q))$, Proc. of the Japan Academy, vol. 67.A.6 (1991), 203–207.

[AK93] S. Aoki and S. Kato, *On connection formulas for invariant eigendistributions on* $U(n,n)/GL(n,\mathbf{C})$, RIMS kokyuroku, vol. 855 (1993), 78–100, (Japanese).

[AK97A] S. Aoki and S. Kato, *Connection formulas for invariant eigendistributions on* $U(2,2)/(U(1,1)\times U(1,1))$, Bulletin of Science and Engineering Takushoku University, vol. 6 (1) (1997), 57–62, (Japanese).

[AK97B] S. Aoki and S. Kato, *Explicit formulas for invariant eigendistributions on* $U(2,2)/(U(1,1)\times U(1,1))$, Bulletin of Science and Engineering Takushoku University, vol. 6 (2) (1997), 73–82, (Japanese).

[AK99A] S. Aoki and S. Kato, *The behavior of invariant integrals on semisimple symmetric spaces and its application*, RIMS kokyuroku, vol. 1082 (1999), 74–92.

[AK99B] S. Aoki and S. Kato, *Connection formulas for invariant eigendistributions on* $GL(4,\ \mathbf{R})/(GL(2,\ \mathbf{R}) \times GL(2,\ \mathbf{R}))$, Bulletin of Science and Engineering Takushoku University, vol. 7 (2) (1999) 15–20, (Japanese).

[F] J. Faraut, *Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques*, J. Math. Pures Appl., vol. 58 (1979), 369–444.

[Hi] T. Hirai, *Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, II*, Japan. J. Math. New Series, vol. 2 (1976), 27–89.

[Ho] B. Hoogenboom, *Spherical functions and differential operators on complex Grassmann manifolds*, Ark. Mat., 20 (1982), 69–85.

[Ko] M.T. Kosters, *Spherical distributions on rank one symmetric spaces*, Thesis, Univ. of Leiden, 1983.

[OS] T. Oshima and J. Sekiguchi, *The restricted root system of a semisimple symmetric pair*, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 4, Group Representations and Systems of Differential Equations, (1984), 433–497.

	$(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$	split Cartan 部分空間 $\begin{pmatrix} m^+(\alpha) & m^+(2\alpha) \\ m^-(\alpha) & m^-(2\alpha) \end{pmatrix}$	compact Cartan 部分空間 $\begin{pmatrix} m^+(\alpha) & m^+(2\alpha) \\ m^-(\alpha) & m^-(2\alpha) \end{pmatrix}$
I_1	$(\mathfrak{so}(p+1,\ q+1),\ \mathfrak{so}(p+1,\ q))$	$\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} p+1 & 0 \\ q-1 & 0 \end{pmatrix}$
I_2	$(\mathfrak{su}(p+1,\ q+1),\ \mathfrak{su}(p+1,\ q)+\sqrt{-1}\mathbf{R})$	$\begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 2q & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2(p+1) & 0 \\ 2(q-1) & 1 \end{pmatrix}$
I_3	$(\mathfrak{sp}(p+1,\ q+1),\ \mathfrak{sp}(p+1,\ q)+\mathfrak{sp}(1))$	$\begin{pmatrix} 4p & 3 \\ 4q & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4(p+1) & 0 \\ 4(q-1) & 3 \end{pmatrix}$
I_4^1	$(\mathfrak{f}_{4(-20)},\ \mathfrak{so}(9))$	$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	
I_4^2	$(\mathfrak{f}_{4(-20)},\ \mathfrak{so}(8,\ 1))$	$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
II_1	$(\mathfrak{sl}(m+2,\ \mathbf{R}),\ \mathfrak{sl}(m+1,\ \mathbf{R})+\mathbf{R})$	$\begin{pmatrix} m & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} m & 1 \\ m & 0 \end{pmatrix}$
II_2	$(\mathfrak{sp}(m+2,\ \mathbf{R}),\ \mathfrak{sp}(m+1,\ \mathbf{R})+\mathfrak{sp}(1,\ \mathbf{R}))$	$\begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2m & 2 \\ 2m & 1 \end{pmatrix}$
II_3	$(\mathfrak{f}_{4(4)},\ \mathfrak{so}(5,\ 4))$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

表 1