

楢田関数をポテンシャルにもつ量子可積分系について

竹村 剛一 (横浜市大総合理学)

ABSTRACT. 楢田関数をポテンシャルにもつ量子可積分系である量子 BC_N Inozemtsev 模型の固有値・固有関数などについてわかってきていること、とくに準可解性に関わることを解説する。

1. はじめに

量子 BC_N Inozemtsev 模型とは、1次元多体系の量子力学の模型であり、ハミルトニアンが

$$(1.1) \quad H_{BC_N} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2l(l+1) \sum_{1 \leq j < k \leq N} (\wp(x_j - x_k) + \wp(x_j + x_k)) \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1) \wp(x_j + \omega_i),$$

により与えられる模型である。ここで、 l, l_0, l_1, l_2, l_3 は結合定数に対応するパラメーターであり、 $\wp(x)$ は基本周期が $(1, \tau)$ であるような Weierstrass の $\wp$ 関数である。また、 $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 1/2$, $\omega_2 = \tau/2$, $\omega_3 = (1 + \tau)/2$ とおいている。

本稿では、この模型についてわかってきていること、とくにハミルトニアン H_{BC_N} の固有値・固有ベクトルにまつわることを紹介する。

まず、この模型に関わる背景を説明する。

1970年頃から、Calogero-Moser-Sutherland系と呼ばれる模型たちなどを扱った量子可積分系の研究がなされてきている。ここで、量子可積分系とは、量子力学の「可積分」な模型たちのことであり、ここでの「可積分」の意味は、粒子数と同等の数だけ可換な微分作用素があるということで、解析力学における Liouville の意味での「古典可積分性」の量子論への対応物と思えるものである。

Olshanetsky と Perelomov による論文 [9] では、ルート系に付随する模型について、楢田関数をポテンシャルとしてもつものやそのポテンシャルの退化、模型の性質などが総合的に扱われている。また、Inozemtsev は Olshanetsky と Perelomov の仕事の拡張となっている模型を提唱した [4]。これは、後に BC_N Inozemtsev 模型と呼ばれるようになった。量子可積分性を実際に保障する可換な微分作用素については、 BC_N Inozemtsev 模型においては、大島氏により明示的な式が示されている [10]。

他方、量子可積分な模型の分類についても研究がなされてきている。落合・大島・関口の三氏は、可換な微分作用素に少しの仮定をおくことにより、古典型のルート系に対応する対称性をもつ模型について、可積分な模型の分類を行った [8]。\$B_N\$ 型のルート系に対応する場合においては、\$N \geq 3\$ とすると \$BC_N\$ Inozemtsev 模型のみが残るということが示されている。ここで、\$B_N\$ 型ルート系の対称性 (不変性) もつとは、変数 \$x_1, \dots, x_N\$ において \$x_i\$ と \$x_j\$ (\$1 \leq i, j \leq N\$) の入れ替えに関する不変性と、\$x_i\$ (\$1 \leq i \leq N\$) を \$-x_i\$ に置き換える不変性を併せもつ、ということであり、\$BC_N\$ というのは、ある Calogero 系の模型のポテンシャルの項が、\$B_N\$ 型と \$C_N\$ 型を重ねた \$BC_N\$ 型のルート系を用いて表示されていた、というところに由来をもつ。

この観点から、\$BC_N\$ Inozemtsev 模型は可積分な模型の中で普遍的なものであると思うことができる。

ここまでは、可換な微分作用素そのものに関する話であったが、ここからは、\$BC_N\$ Inozemtsev 模型での固有値・固有関数に関わる話題を扱う。

\$BC_N\$ Inozemtsev 模型の話と対比させるために、とりあえず \$BC_N\$ 三角的 Calogero-Sutherland 模型について考察する。この模型は、以下のハミルトニアンにより与えられる模型である。

(1.2)

$$H_{BC_N}^{(T)} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2l(l+1) \sum_{1 \leq j < k \leq N} \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi(x_j - x_k)} + \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi(x_j + x_k)} \right) + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\pi^2 l_0(l_0+1)}{\sin^2 \pi x_j} + \frac{\pi^2 l_1(l_1+1)}{\cos^2 \pi x_j} \right),$$

ここで、\$l, l_0, l_1\$ は結合定数に対応するパラメーターである。以降、簡単のためこれらをすべて正にとっておく。このとき、

$$(1.3) \quad \Phi(x) = \prod_{i < j} (\sin \pi(x_i - x_j) \sin \pi(x_i + x_j))^{l+1} \prod_{i=1}^N (\sin \pi x_i)^{l_0+1} (\cos \pi x_i)^{l_1+1}$$

は基底状態となる。つまり、しかるべきヒルベルト空間での最低固有値に対応する固有関数となっている。そして、関数 \$\Phi(x)\$ でゲージ変換をすることにより、模型のヒルベルト空間での固有関数は \$BC_N\$ Jacobi 多項式と呼ばれる対称多項式によって記述されることも知られている。\$BC_N\$ Jacobi 多項式は、最高次の次数に対応する非負非増加な整数の組 \$(n_1, n_2, \dots, n_N)\$ 各々に対して定まっており、それに対応する固有値も \$(n_1, n_2, \dots, n_N)\$ を用いて簡潔に書けることが知られている。

このように BC_N 三角的 Calogero-Sutherland 模型の固有値・固有関数は比較的好く分かっていると思える。

ところで、 BC_N Inozemtsev 模型において、楕円関数の 1 つの周期 τ について $\tau \rightarrow \sqrt{-1}\infty$ とすることによりハミルトニアンは BC_N 三角的 Calogero-Sutherland 模型のものに移行することが知られている。

だが、 BC_N Inozemtsev 模型においては三角型の模型と同様な議論で解くことはなされていない。後で述べるが、 $N = 1$ の場合である BC_1 Inozemtsev 模型と Heun の方程式が対応していることから困難さが伺われる。

では、どのようにして BC_N Inozemtsev 模型の固有値・固有関数を調べればよいのだろうか？

1 つの方法として、極限として現れる BC_N 三角的 Calogero-Sutherland 模型からの摂動論により、 BC_N Inozemtsev 模型を調べるというものがある。一般には、摂動論においては、計算で得られる形式的巾級数が収束しないことがあるが、この模型の場合には、数学的に収束することが示される。これについては 2 章にて説明する。

他の方法として、準可解性から一部の固有値についての情報を得ようという試みがある。準可解性については、一般論としては Turbiner[17] により提唱されている。本稿の設定においては、模型に現れる結合定数がある条件をみたすときにある有限次元の空間がハミルトニアンの作用で保たれる、ということを指す。このとき、一部の固有値・固有ベクトルは有限次元空間上の行列の対角化により求まることとなり、その一部の固有値については明示的に求まると期待される。

さて、 $N = 1$ の場合を考えよう。この場合での顕著な事実として、Heun の方程式との関係について述べる。 BC_1 Inozemtsev 模型の式を楕円関数を用いた変数変換などにより書き換えると、リーマン球面において 4 点に確定特異点をもつ 2 階の常微分方程式になることが知られている。これを標準化したものが Heun の方程式と呼ばれている。(ガウスの超幾何微分方程式は 3 点の場合である。) また、Heun の方程式から出発しても、あるパラメータの BC_1 Inozemtsev 模型に対応することもわかる。標語的に言えば、 **BC_1 Inozemtsev 模型と Heun の方程式は 1 対 1 に対応している**のである。なお、Heun の方程式は 100 年以上前から知られているが、超幾何関数と比べると解明されている度合がかなり劣っていると思われる。この面からも、 BC_N (BC_1) Inozemtsev 模型の難しさがうかがわれる。

さて、 BC_1 Inozemtsev 模型を調べていく手法であるが、 N 粒子の場合でも述べたように、三角極限をとった場合の模型からの摂動によるアプローチ、準

可解性からのアプローチがある。また、今のところ $N = 1$ の場合にしか分かっていない手法もあるが、これについては最後の章にて少し触れる。

ここで、本稿の構成について述べておく。2章では、三角極限をとったときの模型からの摂動論にまつわる結果について述べる。3章では、 BC_1 Inozemtsev 模型での準可解性について、そして、固有値問題との関係について論じる。4章では、準可解性が一般の粒子数においてどういう形で現れるかということと、量子可積分性との関係について説明する。5章では、Inozemtsev 模型の差分版である Ruijsenaars 模型との関係について述べる。そして、6章において、 BC_N Inozemtsev 模型の研究の現状、他の模型との関係、 $N = 1$ のときのみ分かっている話などを筆者の知る範囲でコメントする。

2. 三角極限と摂動論

この章では、摂動の方法を用いて模型を考察する。まず、 BC_1 Inozemtsev 模型において、どのように摂動論を用いて考察していくかについて述べる。

BC_1 Inozemtsev 模型は、次のハミルトニアンにより定まる量子力学の模型である。

$$(2.1) \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i + 1)\wp(x + \omega_i).$$

これは(1.1)の $N = 1$ の時の式と同じものとなっている。以下、楕円関数の周期 τ は虚部が正である複素数とする。

$f(x)$ を固有値が E となっている (2乗可積分とは限らない) H の固有関数とする。つまり、

$$(2.2) \quad (H - E)f(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i + 1)\wp(x + \omega_i) - E \right) f(x) = 0$$

が成り立っているとする。 $p = \exp(\pi\sqrt{-1}\tau)$ とおく。すると、 $\tau \rightarrow \sqrt{-1}\infty$ という極限は $p \rightarrow 0$ という極限に対応する。以下では、感覚的には p が 0 に近いと思って議論する。

$\wp$ 関数の p での展開の式などにより、 BC_1 Inozemtsev 模型のハミルトニアン(2.1)は以下の表示をもつことがわかる。

$$(2.3) \quad H = H(p) = H_T + C_T + \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x)p^k.$$

ここで、 C_T は x や p に依存しない定数であり、 H_T は以下の式で与えられる BC_1 三角的 Calogero-Sutherland 模型のハミルトニアンである。

$$(2.4) \quad H_T = -\frac{d^2}{dx^2} + l_0(l_0 + 1)\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} + l_1(l_1 + 1)\frac{\pi^2}{\cos^2 \pi x}$$

そして、 $V_k(x)$ は x についての関数であり、それぞれが $\cos 2\pi l x$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の有限和で書かれている。

とくに、 $p = 0$ のときは、 BC_1 Inozemtsev 模型のハミルトニアンは BC_1 三角的 Calogero-Sutherland 模型のハミルトニアンと等価となる。

一般の p での $H(p)$ では固有値問題はわかりにくいだが、実は H_T においては固有値問題は比較的よくわかる。この H_T での結果を踏み台にして $H(p)$ の固有値問題を後で考えていくことにする。

さて、 H_T の二乗可積分な固有関数・固有値について述べる。 $l_0 > 0, l_1 > 0$ を仮定しておき、

$$(2.5) \quad \Phi(x) = (\sin \pi x)^{l_0+1} (\cos \pi x)^{l_1+1},$$

$$\psi_m(x) = \psi_m^{(l_0, l_1)}(x) = c_m G_m \left(l_0 + l_1 + 2, \frac{2l_0 + 3}{2}; \sin^2 \pi x \right) \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}),$$

とする。ここで、 $G_m(\alpha, \beta; w) = {}_2F_1(-m, \alpha + m; \beta; w)$ は次数 m の Jacobi 多項式であり、 c_m は正規化定数とする。すると、

$$(2.6) \quad H_T \Phi(x) \psi_m(x) = \pi^2 (2m + l_0 + l_1 + 2)^2 \Phi(x) \psi_m(x),$$

が成立していること、そして

$$(2.7) \quad \langle \Phi(x) \psi_m(x), \Phi(x) \psi_{m'}(x) \rangle = \delta_{m, m'}$$

が成立していることもわかる。また、ここでの固有関数たちは二乗可積分な関数からなるあるヒルベルト空間 (後に (2.9) によって定まる) での完全正規直交基底になっていることもわかっている。

以下において、 H_T の二乗可積分な固有関数・固有値を基に、 $H(p)$ の固有値・固有関数を摂動論のアルゴリズムにより求める方法を述べる。

$v_m = \Phi(x) \psi_m(x)$ とおく。すると、 v_m は $H(0) = H_T + C_T$ の固有ベクトルとなっている。 v_m の $H(0)$ についての固有値を $E_m (= \pi^2 (2m + l_0 + l_1 + 2)^2 + C_T)$ とおく。

$H(p)$ の固有値・(正規化された) 固有ベクトルを $E_j(p) = E_j + \sum_{k=1}^{\infty} E_j^{\{k\}} p^k$, $v_j(p) = v_j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j'} c_{j, j'}^{\{k\}} v_{j'} p^k$ という形で形式的に求めてみる。つまり、形式的べき級数として、

$$(2.8) \quad (H_T + C_T + \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) p^k) v_j(p) = E_j(p) v_j(p),$$

$$\langle v_j(p), v_j(p) \rangle = 1,$$

が満たされるように $E_j^{\{k\}}$ や $c_{j, j'}^{\{k\}}$ を求めてみる。

まず、 $V_k(x) v_{j'} = \sum_j d_{j, j'}^{\{k\}} v_j$ となる係数 $d_{j, j'}^{\{k\}}$ を求める。これは、超幾何多項式に関する Pieri formula を用いることにより計算できる。あとは、(2.8) の p^k

の各係数を見ることにより $E_j^{\{k\}}$ や $c_{j,j'}^{\{k\}}$ に関する漸化式が出て来る。これを順々に計算することにより、 $E_j(p)$ や $v_j(p)$ の各係数が一意的に求まる。

こうして、 $H(p)$ の固有値・固有ベクトルが形式的べき級数として求まるのだが、次にこれらの形式的べき級数の収束性が問題となる。一般に、このような摂動の計算はできるが、べき級数の収束半径が 0 となってしまう模型があることが知られているので、収束性は自明な問題ではない。(例えば、 $H = -(\frac{d}{dx})^2 + x^2 + \alpha x^4$ の $\alpha = 0$ のそばでの α についての固有値の展開式の収束半径は 0 となる。)

ところが、ここでの $H(p)$ についてのべき級数については、収束性がいえる。(固有ベクトルの収束性についてはどのような意味でか、ということをはっきりさせる必要はある。詳しくは [14] を参照のこと。) 収束性の証明の方法は 2 つある。1 つは Bethe 仮設法によるもので、もう 1 つは Kato-Rellich の理論によるものである。

以下では、収束性の結果など、Kato-Rellich の正則摂動の理論 [5] に深く関わる結果を記す。詳しくは [14] を参照のこと。

模型に付随するヒルベルト空間として、二乗可積分な関数からなる以下のような空間を用意しておく。なお、空間自体には p の依存性がないことに注意しておく。

$$(2.9) \quad \mathbf{H} = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \text{可測} \left| \begin{array}{l} \int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty, \\ \frac{f(x)}{\Phi(x)} = \frac{f(x+1)}{\Phi(x+1)}, \frac{f(x)}{\Phi(x)} = \frac{f(-x)}{\Phi(-x)} \text{ a.e. } x \end{array} \right. \right\}.$$

Theorem 2.1. [14] 実数 p は $-1 < p < 1$ を満たすとする。 $H(p)$ のヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ での固有値は、以下の条件を満たすような $\tilde{E}_i(p)$ によりラベル付けされる。

- (i) $\tilde{E}_i(p)$ は $-1 < p < 1$ において実解析的である。
- (ii) $\tilde{E}_i(0) = E_i$ となる。ここで、 E_i は前章において式 (2.8) の少し前で定義されていた三角的な模型の作用素 $H_T + C_T$ の固有値である。

また、固有値 $\tilde{E}_i(p)$ に対応する固有ベクトル $\tilde{v}_i(p, x)$ はヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ の元として $-1 < p < 1$ において p について実解析的であり、 $\{\tilde{v}_i(p, x)\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ はヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ の完全正規直交基底となる。

Corollary 2.2. [14] 前節の摂動論によるアルゴリズムにより得られる固有値 $E_i(p)$ は、 $|p|$ が十分小さければ収束し、 $\tilde{E}_i(p)$ と一致する。また、固有ベクトル $v_i(p)$ も $|p|$ が十分小さければ L^2 ノルムにより収束し、ヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ の元として $\tilde{v}_i(p, x)$ と一致する。

上の定理と系は Kato-Rellich の正則摂動の理論が適用できることがわかればそれほどの困難なく示される。

実は、 $\tilde{v}_i(p, x)$ が $p \rightarrow 0$ において三角的な模型の固有ベクトル v_i に x についてコンパクト一様収束していることと、摂動論のアルゴリズムにより得られる固有ベクトル $v_i(p)$ も $p \rightarrow 0$ において三角的な模型の固有ベクトル v_i に x についてコンパクト一様収束していることもわかるが、これらについては、Kato-Rellich の正則摂動の一般論とは別の議論が必要となる [14]。

また、固有値の定性的性質として、次のことが成り立つ。

Theorem 2.3. [14] $l_0 \geq 1/2, l_1 > 0$ または $l_0 > 0, l_1 \geq 1/2$ とする。このとき、 $-1 < p < 1$ において、固有値 $\tilde{E}_m(p)$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) は互いに重なることはない。とくに、 $-1 < p < 1$ において $i < j$ ならば $\tilde{E}_i(p) < \tilde{E}_j(p)$ が成立する。

これより、 BC_N Inozemtsev 模型のハミルトニアンについても同様の話が通用することを述べる。 BC_N Inozemtsev 模型のハミルトニアン H_{BC_N} (1.1) は、 BC_N 型三角的 Calogero-Sutherland 模型のハミルトニアン $H_{BC_N}^{(T)}$ (1.2) を用いて、

$$(2.10) \quad H_{BC_N} = H_{BC_N}(p) = H_{BC_N}^{(T)} + C + \sum_{k=1}^{\infty} V_k^{BC_N}(x)p^k.$$

と表示できる。ここで、 C は $x = (x_1, \dots, x_N)$ や p に依存しない定数であり、 $V_k^{BC_N}(x)$ は $x = (x_1, \dots, x_N)$ についての関数となっている。また、然るべきヒルベルト空間での $H_{BC_N}^{(T)}$ の完全直交系として、基底状態 $\Phi(x)$ (1.3) と BC_N Jacobi 多項式の積をとったものたちがとれる。これらに適当に番号付けを与えて v_m と書くことにすると、 BC_1 の場合とほぼ同様に、 $H_{BC_N}(p)$ は $H_{BC_N}^{(T)}$ から正則摂動になっていること、とくに $H_{BC_N}(p)$ の固有値として得られる p に関するべき級数が収束することもわかる。そして、Theorem 2.1 と Corollary 2.2 の類似も成立している。

だが、 BC_N 型 ($N \geq 2$) の場合は、高次の可換微分作用素に関する正則摂動性は今のところわかっていない。これについて、6 章にてコメントをする。

3. BC_1 INOZEMTSEV 模型の準可解性

この章では、 BC_1 Inozemtsev 模型の準可解性について述べる。具体的には、 BC_1 Inozemtsev 模型のハミルトニアン H (2.1) によって不変となる有限次元空間について述べる。準可解性は、もともとは Turbiner[17] により提唱され、最近では物理の人たちにより使われる頻度が増えてきている。本稿では、準可解性を、結合定数が特別な場合にある有限次元空間がハミルトニアンの作用で不変になっている、ということとしてとらえておく。

さて、ハミルトニアン H (2.1) には結合定数 l_0, l_1, l_2, l_3 が含まれているが、ここで、 $\tilde{\alpha}_0 \in \{-l_0/2, (l_0+1)/2\}$, $\tilde{\alpha}_1 \in \{-l_1/2, (l_1+1)/2\}$, $\tilde{\alpha}_2 \in \{-l_2/2, (l_2+1)/2\}$, $\tilde{\alpha}_3 \in \{-l_3/2, (l_3+1)/2\}$ とし、 $-(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3)$ は 0 以上の整数であると

仮定する。 $d = -(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3)$ とおく。次の命題は BC_1 Inozemtsev 模型の準可解性に関わるものである。

Proposition 3.1. 上の仮定のもとで、 V_d を

$$\left\{ \left(\frac{\sigma_1(x)}{\sigma(x)} \right)^{2\tilde{\alpha}_1} \left(\frac{\sigma_2(x)}{\sigma(x)} \right)^{2\tilde{\alpha}_2} \left(\frac{\sigma_3(x)}{\sigma(x)} \right)^{2\tilde{\alpha}_3} \wp(x)^n \right\}_{n=0,\dots,d}$$

で生成されるベクトル空間とする。 ($\sigma(x)$ は Weierstrass の σ 関数、 $\sigma_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) は Weierstrass の co - σ 関数である。) このとき、ベクトル空間 V_d はハミルトニアン H の作用で閉じている。

さきほどの特別な場合として、 $\tilde{\alpha}_0 = (l_0 + 1)/2$, $\tilde{\alpha}_1 = (l_1 + 1)/2$, $\tilde{\alpha}_2 \in \{-l_2/2, (l_2 + 1)/2\}$, $\tilde{\alpha}_3 \in \{-l_3/2, (l_3 + 1)/2\}$ で、 $d = -(l_0 + l_1)/2 + 1 - \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_3$ が 0 以上の整数である場合を考える。この場合は、ベクトル空間 V_d はヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ (2.9) の部分空間であることが示される。

Proposition 3.2. [14] $d = -(l_0 + l_1)/2 + 1 - \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_3$ を 0 以上の整数であると仮定する。 $\tilde{V}_d$ を

$$\left\{ \left(\frac{\sigma_1(x)}{\sigma(x)} \right)^{l_1+1} \left(\frac{\sigma_2(x)}{\sigma(x)} \right)^{2\tilde{\alpha}_2} \left(\frac{\sigma_3(x)}{\sigma(x)} \right)^{2\tilde{\alpha}_3} \wp(x)^n \right\}_{n=0,\dots,d}$$

で生成される $d+1$ 次元ベクトル空間とする。このとき、ベクトル空間 $\tilde{V}_d$ はハミルトニアン H の作用で閉じていて、ヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ の部分空間になっている。

これにより、結合定数が特別な場合には固有値のいくつかが有限次元ベクトル空間の行列の対角化により求まる、ということがわかった。また、ベクトル空間 $\tilde{V}_d$ における固有値の分布について以下が成立する。

Theorem 3.3. [14] $l_0 \geq 1/2, l_1 > 0$ または $l_0 > 0, l_1 \geq 1/2$ とする。ヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ の部分空間である $\tilde{V}_d$ のハミルトニアン H に関する固有値たちは、ヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ での固有値たちの中で下から $d+1$ 個のものと一致する。

さて、例として、 $l_0 = 1, l_1 = 2, l_2 = 0, l_3 = 8$ の場合を考えよう。このとき、ハミルトニアンは

$$(3.1) \quad H = H(p) = -\frac{d^2}{dx^2} + 2\wp(x) + 6\wp(x + 1/2) + 72\wp(x + \tau/2)$$

となっている。 ($p = \exp(\pi\sqrt{-1}\tau)$ とおいている。)

Theorem 2.1 と Corollary 2.2 により、ハミルトニアン $H(p)$ ($-1 < p < 1$) の、ヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ (2.9) における固有値は、 $p \in (-1, 1)$ において実解析的である $\tilde{E}_m(p)$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) により表され、 $\tilde{E}_m(0) = (2m+5)^2\pi^2 - \frac{80\pi^2}{3}$ を満たす。

している。さらに、 $-1 < p < 1$ で $m < m'$ ならば $\tilde{E}_m(p) < \tilde{E}_{m'}(p)$ が成立している。

ところで、以下のように二重周期関数の空間を定義する。

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad V_{2,3,1,-8} &= \left\langle \left(\frac{\sigma_1(x)}{\sigma(x)} \right)^3 \left(\frac{\sigma_2(x)}{\sigma(x)} \right) \left(\frac{\sigma_3(x)}{\sigma(x)} \right)^{-8} \wp(x)^n \right\rangle_{n=0,1}, \\
 V_{-1,-2,1,-8} &= \left\langle \left(\frac{\sigma_1(x)}{\sigma(x)} \right)^{-2} \left(\frac{\sigma_2(x)}{\sigma(x)} \right) \left(\frac{\sigma_3(x)}{\sigma(x)} \right)^{-8} \wp(x)^n \right\rangle_{n=0,\dots,5}, \\
 V_{2,-2,0,-8} &= \left\langle \left(\frac{\sigma_1(x)}{\sigma(x)} \right)^{-2} \left(\frac{\sigma_3(x)}{\sigma(x)} \right)^{-8} \wp(x)^n \right\rangle_{n=0,\dots,4}, \\
 V_{-1,3,0,-8} &= \left\langle \left(\frac{\sigma_1(x)}{\sigma(x)} \right)^3 \left(\frac{\sigma_3(x)}{\sigma(x)} \right)^{-8} \wp(x)^n \right\rangle_{n=0,\dots,3}.
 \end{aligned}$$

このとき、ハミルトニアン H は、空間たち $V_{2,3,1,-8}$, $V_{-1,-2,1,-8}$, $V_{2,-2,0,-8}$, $V_{-1,3,0,-8}$ に閉じて作用していることがわかる。

これらの空間はヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ の部分空間になっているとは限らない。実際、これらの空間の中で、ヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ の部分空間となっているものは $V_{2,3,1,-8}$ のみである。この空間は 2 次元であり、ハミルトニアン H の固有値は $11e_1 - 9e_2 \pm 2\sqrt{116e_1^2 + 83e_1e_2 + 26e_2^2}$ となっている。ここで、 $e_1 = \wp(1/2)$, $e_2 = \wp((1+\tau)/2)$ である。Theorem 3.3 により、ヒルベルト空間 $\mathbf{H}$ での固有値は、小さいほうから $\tilde{E}_0(p) = 11e_1 - 9e_2 - 2\sqrt{116e_1^2 + 83e_1e_2 + 26e_2^2}$, $\tilde{E}_1(p) = 11e_1 - 9e_2 + 2\sqrt{116e_1^2 + 83e_1e_2 + 26e_2^2}$ となることがわかる。つまり、小さいほうの固有値のふたつは代数的に求められた。このような、固有値の一部が具体的に求められるという様子が、準可解性という用語の基となっている。

4. BC_N INOZEMTSEV 模型の準可解性

この章では、 BC_N Inozemtsev 模型の準可解性について述べる。 H_{BC_N} (1.1) に対し、 a, b_i ($i = 0, 1, 2, 3$) を、 $a \in \{-l, l+1\}$, $b_i \in \{-\frac{l}{2}, \frac{l+1}{2}\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$) となっている数とする。 $z_j = \wp(x_j)$ ($1 \leq j \leq N$), $e_i = \wp(\omega_i)$ ($i = 1, 2, 3$) (ω_i は半周期たち) とおき、

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad \Psi(z) &= \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j - z_k)^a \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^3 (z_j - e_i)^{b_i}, \\
 \hat{H}_{BC_N} &= \Psi(z)^{-1} \circ H_{BC_N} \circ \Psi(z),
 \end{aligned}$$

とする。作用素 $\hat{H}_{BC_N}$ が以下の表示をもつことは直接計算することで確かめられる。

(4.2)

$$\begin{aligned} \hat{H}_{BC_N} = & - \left(\sum_{j=1}^N 4(z_j - e_1)(z_j - e_2)(z_j - e_3) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_j^2} \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(\sum_{k \neq j} \frac{2a}{z_j - z_k} + \frac{2b_1 + \frac{1}{2}}{z_j - e_1} + \frac{2b_2 + \frac{1}{2}}{z_j - e_2} + \frac{2b_3 + \frac{1}{2}}{z_j - e_3} \right) \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \right) \\ & - 4 \left((N-1)a - b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \frac{1}{2} \right) ((N-1)a + b_0 + b_1 + b_2 + b_3) \left(\sum_{j=1}^N z_j \right) \\ & + 4N((b_1 + b_2)^2 e_3 + (b_1 + b_3)^2 e_2 + (b_2 + b_3)^2 e_1) \\ & - 4N(N-1)a(e_1 b_1 + e_2 b_2 + e_3 b_3). \end{aligned}$$

このとき、準可解性に関わる次の命題が成り立つ。

Proposition 4.1. (i) P^{sym} を、変数 $z_1, z_2, \dots, z_N$ からなる対称多項式とする。

このとき、 $\hat{H}_{BC_N} \cdot P^{\text{sym}} \subset P^{\text{sym}}$ が成立する。

(ii) a, b_i ($i = 0, 1, 2, 3$) は、 $a \in \{-l, l+1\}$ と $b_i \in \{-\frac{l}{2}, \frac{l+1}{2}\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$) を満たしているとし、さらに $d = -((N-1)a + b_0 + b_1 + b_2 + b_3)$ が非負整数であるとする。 $\tilde{W}_d$ を、すべての i で $m_i \in \{0, 1, \dots, d\}$ をみたしているような単項式 $z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_N^{m_N}$ で生成されるベクトル空間とし、 $\tilde{W}_d^{\text{sym}} = \tilde{W}_d \cap P^{\text{sym}}$ とおく。このとき、 $\hat{H}_{BC_N} \cdot \tilde{W}_d^{\text{sym}} \subset \tilde{W}_d^{\text{sym}}$ が成立する。

なお、この命題は本質的には Finkel, Gomez-Ullate, Gonzalez-Lopez, Rodriguez, Zhdanov [2] によって、準可解性の模型を探索する方向から得られていた。

空間 $\tilde{W}_d^{\text{sym}}$ は、 $a \in \{-l, l+1\}$, $b_i \in \{-\frac{l}{2}, \frac{l+1}{2}\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$) と $d = -((N-1)a + b_0 + b_1 + b_2 + b_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ という仮定のもとで定義されていた。 a, b_0, b_1, b_2, b_3 に対するこの仮定のもと、(4.1) で定義された $\Psi(z)$ を用いて有限次元ベクトル空間 W_d^{sym} を以下のように定義する。

(4.3)

$$W_d^{\text{sym}} = \{\Psi(\wp(x_1), \dots, \wp(x_N))f(\wp(x_1), \dots, \wp(x_N)) | f(z_1, \dots, z_N) \in \tilde{W}_d^{\text{sym}}\},$$

すると、さきほどの命題より、 $H_{BC_N} \cdot W_d^{\text{sym}} \subset W_d^{\text{sym}}$ が示される。

ところで、大島氏により、ハミルトニアンと可換となる $2k$ 階の微分作用素 P_k ($k = 1, \dots, N$) で、 $[P_k, P_{k'}] = 0$ ($1 \leq k, k' \leq N$) となるものの明示的な表示が知られている [10]。これらの作用素 P_k の作用と空間 W_d^{sym} の関係で以下の定理が成立している。

Theorem 4.2. [16] $d = -((N-1)a + b_0 + b_1 + b_2 + b_3)$ を非負整数とする。このとき、 $H_{BC_N} \cdot W_d^{\text{sym}} \subset W_d^{\text{sym}}$ と $P_k \cdot W_d^{\text{sym}} \subset W_d^{\text{sym}}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) が成立する。

この定理により、準可解性に関連する有限次元空間 W_d^{sym} では、ハミルトニアンのみならず高次の可換微分作用素でも作用が閉じていることがわかる。標語的には、準可解性と量子可積分性が両立している、といえる。

5. RUIJSENAARS 模型との関係

ところで、ここまでで考察してきたのは微分作用素の可積分な模型であったが、差分作用素の可積分な模型との関係についても触れておく。

BC_N Inozemtsev 模型の差分版に対応するものとして、 BC_N Ruijsenaars 模型というものが知られている [1, 3, 6]。この模型での最低次の差分作用素は以下のように与えられている。

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad Y_1 = & \sum_{j=1}^N \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\theta_1(x_j - x_k - \mu)}{\theta_1(x_j - x_k)} \frac{\theta_1(x_j + x_k - \mu)}{\theta_1(x_j + x_k)} \right) \\
 & \cdot \left(\prod_{r=0}^3 \frac{\theta_{r+1}(x_j - \nu_r)}{\theta_{r+1}(x_j)} \frac{\theta_{r+1}(x_j + \kappa/2 - \bar{\nu}_r)}{\theta_{r+1}(x_j + \kappa/2)} \right) t_j(\kappa) \\
 & + \sum_{j=1}^N \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\theta_1(x_j + x_k + \mu)}{\theta_1(x_j + x_k)} \frac{\theta_1(x_j - x_k + \mu)}{\theta_1(x_j - x_k)} \right) \\
 & \cdot \left(\prod_{r=0}^3 \frac{\theta_{r+1}(x_j + \nu_r)}{\theta_{r+1}(x_j)} \frac{\theta_{r+1}(x_j - \kappa/2 + \bar{\nu}_r)}{\theta_{r+1}(x_j - \kappa/2)} \right) t_j(-\kappa) \\
 & + \sum_{p=0}^3 \left(\frac{\pi}{\theta'_1(0)} \right)^2 \frac{2}{\theta_1(\mu)\theta_1(\kappa + \mu)} \left(\prod_{r=0}^3 \theta_{r+1}(\kappa/2 + \nu_{\pi_p r}) \theta_{r+1}(\bar{\nu}_{\pi_p r}) \right) \\
 & \cdot \left(\prod_{j=1}^N \frac{\theta_{p+1}(x_j - \kappa/2 - \mu)}{\theta_{p+1}(x_j - \kappa/2)} \frac{\theta_{p+1}(x_j + \kappa/2 + \mu)}{\theta_{p+1}(x_j + \kappa/2)} \right).
 \end{aligned}$$

ここで、 $\theta_j(x)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) は Jacobi のテータ関数であり、 $t_i(\kappa)$ は変数 x_i を κ だけずらす作用素、つまり、 $t_i(\kappa)f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, x_i + \kappa, \dots, x_N)$ である。 π_r ($r = 0, 1, 2, 3$) はそれぞれ 4 次対称群の元で、 $\pi_0 = \text{id}$, $\pi_1 = (01)(23)$, $\pi_2 = (02)(13)$, $\pi_3 = (03)(12)$ として表されるものである。

この模型には、差分間隔のパラメーター κ 以外にも $(\mu, \nu_0, \bar{\nu}_0, \nu_1, \bar{\nu}_1, \nu_2, \bar{\nu}_2, \nu_3, \bar{\nu}_3)$ という 9 つのパラメーターが含まれている。 $(BC_N \text{ Inozemtsev 模型では結合定数に対応するパラメーターは 5 つである。})$ また、この模型には可換な作用素が十分にあるということ、つまり可積分性をもっていることが知られている。

そして、パラメーターがある関係式をみたすとき、あるテータ関数たちが生成する有限次元空間が模型の作用素で保たれていることが知られている [3, 6]。以下でこの有限次元空間の記述をする。

B_N 対称性をもつレベル k のテータ関数の空間は、以下のように定義される。

(5.2)

$$Th_k^{W(B_N)} = \left\{ f : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} \text{正則かつ } W(B_N)\text{-不変} \\ f(x+n) = f(x), \quad (\forall n \in \mathbb{Z}^N) \\ f(x+n\tau) = f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}k((x|n)+(n|n)\tau/2)} \end{array} \right. \right\},$$

ここで、 $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{C}^N$ に対して $(x|y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ としている。関数 $f(x_1, \dots, x_N)$ が $W(B_N)$ -不変であるということは、関係式 $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = f(x_1, \dots, x_N)$ が $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して成立し、かつ、 $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_N)$ が $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ で成立することである。このとき、実は $\dim Th_{2l}^{W(B_N)} = \frac{(l+N)!}{l!N!}$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) が成立している。また、以下の命題も成立する。

Proposition 5.1. $k = (2(N-1)\mu + \sum_{i=0}^3(\nu_i + \bar{\nu}_i)) / \kappa$ は 0 以上の偶数であるとする。このとき、ベクトル空間 $Th_k^{W(B_N)}$ は Y_1 の作用で保たれている。

さて、Ruijsenaars 模型と Inozemtsev 模型との関係を述べよう。まず、ハミルトニアンに対応する作用素についての極限移行について述べる。 $a = -\mu/\kappa$, $b_0 = -(\nu_1 + \bar{\nu}_1)/2\kappa$, $b_1 = -(\nu_2 + \bar{\nu}_2)/2\kappa$, $b_2 = -(\nu_3 + \bar{\nu}_3)/2\kappa$, $b_3 = -(\nu_0 + \bar{\nu}_0)/2\kappa$ とし、

(5.3)

$$\Theta(x) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\theta_1(x_j - x_k) \theta_1(x_j + x_k))^a \prod_{j=1}^N \theta_1(x_j)^{2b_0} \theta_2(x_j)^{2b_1} \theta_3(x_j)^{2b_2} \theta_0(x_j)^{2b_3}.$$

とする。ここで $a \in \{-l, l+1\}$, $b_0 \in \{-l_0/2, (l_0+1)/2\}$, $b_1 \in \{-l_1/2, (l_1+1)/2\}$, $b_2 \in \{-l_2/2, (l_2+1)/2\}$, $b_3 \in \{-l_3/2, (l_3+1)/2\}$ とする。このとき、 a, b_0, b_1, b_2, b_3 を固定して $\kappa \rightarrow 0$ という極限をとると、

$$(5.4) \quad (-\Theta(x) \circ Y_1 \circ \Theta(x)^{-1} + C_0) / \kappa^2 \rightarrow H_{BC_N},$$

が成立する。ここで H_{BC_N} は BC_N Inozemtsev 模型のハミルトニアン (1.1) であり、 C_0 はある定数である。こうして BC_N Ruijsenaars 模型の作用素 Y_1 から $\kappa \rightarrow 0$ という差分間隔を 0 にする極限で BC_N Inozemtsev 模型のハミルトニアンが復元されることが導かれた。

この背景のもと、[16] において、テータ関数たちが生成する有限次元空間 (5.2) が、 $\kappa \rightarrow 0$ という BC_N Inozemtsev 模型に対応する極限において、準可解性に関する空間 (4.3) と対応していることもわかった。つまり、それぞれの有限次元不変空間は以下の命題のようにきちんと対応している。

Proposition 5.2. [16] $a = -\mu/\kappa$, $b_0 = -(\nu_1 + \bar{\nu}_1)/2\kappa$, $b_1 = -(\nu_2 + \bar{\nu}_2)/2\kappa$, $b_2 = -(\nu_3 + \bar{\nu}_3)/2\kappa$, $b_3 = -(\nu_0 + \bar{\nu}_0)/2\kappa$ とする。 $Th_{2k}^{W(B_N)}$ (5.2) を BC_N Ruijsenaars 模型のテータ関数型の不変部分空間とし、 W_k^{sym} (4.3) を BC_N Inozemtsev 模型の準可解性に関連する空間としておく。 $\Theta(x)$ を (5.4) にて定義されている関数とする。 $k = -((N-1)a + b_0 + b_1 + b_2 + b_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と仮定する。

このとき、写像

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \phi: Th_{2k}^{W(B_N)} &\rightarrow W_k^{\text{sym}} \\ f(x_1, \dots, x_N) &\mapsto \Theta(x)f(x_1, \dots, x_N) \end{aligned}$$

はベクトル空間の同型写像となっている。

6. 他の模型との関係とこれからの課題

BC_N Inozemtsev 模型からいろいろな方法で極限をとっていくことによって、さまざまな量子可積分系が得られることが知られている。

例えば、三角極限をとるときに結合定数も同時にうまく変化させてやると、退化 BC_N Inozemtsev 模型がでてくる。(ここでの極限は、超幾何関数から合流型超幾何関数を導くものと似た極限である。) この模型は、ハミルトニアンが以下のように与えられるものである。

$$(6.1) \quad \begin{aligned} H^{(D)} = & - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2l(l+1) \sum_{1 \leq j < k \leq N} \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi(x_j - x_k)} + \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi(x_j + x_k)} \right) \\ & + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\pi^2 l_0(l_0+1)}{\sin^2 \pi x_j} + \frac{\pi^2 l_1(l_1+1)}{\cos^2 \pi x_j} + \tilde{c}_1 \cos 2\pi x_j + \tilde{c}_2 \cos 4\pi x_j \right), \end{aligned}$$

ここで、 $l, l_0, l_1, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ は結合定数に対応するパラメーターである。この模型は佐々木・高崎の両氏により、おもに準可解性の立場から調べられている [12]。 [16] において、退化 BC_N Inozemtsev 模型での準可解性に関連する有限次元不変空間は、実は BC_N Inozemtsev での準可解性で現れる有限次元空間から適切に極限をとることによって復元されることがわかった。そして、退化 BC_N Inozemtsev 模型での可換な高次微分作用素についても、準可解性で現れる有限次元空間に対して閉じて作用していることがわかった。

さて、摂動の手法と可換微分作用素との整合性についてコメントをしておく。 A_N Calogero-Moser-Sutherland 模型 (A_N Inozemtsev 模型) においては、可換な高次の作用素についても摂動の手法がうまくいき、摂動論と可換微分作用素をとともに取り込んだ理論構築ができることが示されているが [7]、 BC_N Inozemtsev 模型 ($N \geq 2$) の場合には、 BC_N Jacobi 多項式に関する技術的な困難さにより、摂動論と可換な高次の作用素の整合性は今のところ示されていない。つまり、現状では、 BC_N Inozemtsev 模型については、ハミルトニアン

H_{BC_N} (1.1) についての BC_N Calogero-Sutherland 模型からの摂動についての正則性はいえるが、可換な高次微分作用素については正則摂動性は証明されていない。

さて、 BC_1 Inozemtsev 模型を調べていく手法として、これまでに述べたように、三角極限をとった場合の模型からの摂動によるアプローチ、準可解性からのアプローチがあるが、他の手法も知られている。

その1つとして、Bethe 仮設法による方法がある。ここでの Bethe 仮設法は、ハミルトニアン (2 乗可積分とは限らない) 固有値、固有関数を求める問題を、有限個の変数からなる超越方程式系 (もしくは代数方程式系) の解を求める問題に帰着させる方法を指す。 BC_1 Inozemtsev 模型についても、結合定数がすべて正の整数のときに [13] において Bethe 仮設法を開発されている。

Bethe 仮設法での議論と関係して、 BC_1 Inozemtsev 模型のポテンシャルは、結合定数がすべて正の整数のときに代数幾何的有限帯ポテンシャルであることが導かれる [15]。ここで、代数幾何的有限帯ポテンシャルということは、ハミルトニアンと可換な奇数階の微分作用素が存在する、ということである。これに関し、独立ではあるが、ソリトン理論の方向から Verdier と Treibich により既に仕事となされていた [18]。また、 l_0, l_1, l_2, l_3 がすべて正の整数のときには、変数 x を $x+1$ にずらしたときのモノドロミーについて、超楕円積分により積分表示ができることも導かれる [15]。この式は固有値などの大域的性質を調べるのに大きな役割を果たすと期待できる。また、ここでの事実を Heun の方程式の話に焼きなおすと、4 点の確定特異点のうちちょうど 2 点を含むサイクルでの大域的なモノドロミーが超楕円積分を用いた積分表示をもつ、ということになり、難しいと言われてきた 4 点確定特異点の 2 階の微分方程式の解のモノドロミーを求めるという問題への 1 つのアプローチになるのではないかと筆者は期待している。

また、 BC_N Inozemtsev 模型 ($N \geq 2$) の有限帯ポテンシャルの展開するため、そして摂動の手法と可換微分作用素との整合性を別方向から攻略するために、 D 加群の概念や理論を適用するのが効果的ではないかと思われる。この点に関して将来進展があることを期待したい。

REFERENCES

- [1] van Diejen, J. F., Integrability of difference Calogero-Moser systems. *J. Math. Phys.* **35** (1994), 2983–3004.
- [2] Finkel F., Gomez-Ullate D., Gonzalez-Lopez A., Rodriguez M. A., and Zhdanov R., New spin Calogero-Sutherland models related to B_N -type Dunkl operators. *Nuclear Phys. B* **613** (2001), 472–496.
- [3] Hikami K. and Komori Y., Diagonalization of the elliptic Ruijsenaars model of type- BC . *J. Phys. Soc. Japan* **67** (1998), 4037–4044.

- [4] Inozemtsev, V. I., Lax representation with spectral parameter on a torus for integrable particle systems. *Lett. Math. Phys.* **17** (1989), 11-17.
- [5] Kato T., *Perturbation theory for linear operators*, corrected printing of the second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [6] Komori Y., Theta functions associated with affine root systems and the elliptic Ruijsenaars operators. In *Progr. Math.* vol.**191**, pp. 141-162, Birkhauser Boston, MA, 2000.
- [7] Komori Y and Takemura K., The perturbation of the quantum Calogero-Moser-Sutherland system and related results, *Comm. Math. Phys.* **227** (2002), 93-118.
- [8] Ochiai H., Oshima T., and Sekiguchi H., Commuting families of symmetric differential operators, *Proc. Japan. Acad.* **70** (1994), 62-66.
- [9] Olshanetsky M. A. and Perelomov A. M., Quantum integrable systems related to Lie algebras. *Phys. Rep.* **94** (1983), 313-404.
- [10] Oshima T., Completely integrable systems with a symmetry in coordinates. *Asian J. Math.* **2** (1998), 935-955.
- [11] Ronveaux A.(ed.), *Heun's differential equations*. Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [12] Sasaki R. and Takasaki K., Quantum Inozemtsev model, quasi-exact solvability and $\mathcal{N}$ -fold supersymmetry. *J. Phys. A* **34** (2001), 9533-9553.
- [13] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system I: the Bethe Ansatz method. Preprint, math.CA/0103077, 2001.
- [14] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system II: the perturbation and the algebraic solution. Preprint math.CA/0112179, 2001.
- [15] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system III: the finite gap property and the monodromy. Preprint math.CA/0201208, 2002.
- [16] Takemura K., Quasi-exact solvability of Inozemtsev models. *J. Phys. A* **35** (2002), 8867-8881.
- [17] Turbiner A. V., Quasi-exactly-solvable problems and $sl(2)$ algebra. *Comm. Math. Phys.* **118** (1988), 467-474.
- [18] Treibich A. and Verdier, J.-L., Revêtements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires. (French) *Duke Math. J.* **68** (1992), 217-236.

236-0016 横浜市金沢区瀬戸 22-2 横浜市立大学数理科学教室

E-mail address: takemura@yokohama-cu.ac.jp