

Bruhat order on the Fixed-point subgroup by a Coxeter graph automorphism.

難波 正幸

名古屋大学大学院多元数理科学研究科博士後期課程 1 年

〒 464-8602 名古屋市千種区不老町

e-mail : m00012h@math.nagoya-u.ac.jp

概要

(W, S) を Coxeter 系とし, σ を (W, S) の Coxeter 図形の自己同型とする. このとき, σ は W 上の “長さを変えない” 自己同型に拡張され, この自己同型により固定される元のなす部分群 W_σ が与えられる. 本報告では, W_σ も Coxeter 群であるという R. Steinberg の主張に別証明を与え, その別証明を用いることにより, W_σ 上の Bruhat order と W 上の Bruhat order の関係を明らかにする.

1 序論

(W, S) を Coxeter 系とし, W の単位元を e で表すものとする. また, ℓ は S に関する W 上の長さ関数¹とする.

$s, s' \in S$ に対して, $m(s, s')$ は積 ss' の位数とする. 全単射 $\sigma : S \rightarrow S$ が (W, S) の **Coxeter 図形の自己同型** (a Coxeter graph automorphism of (W, S)) であるとは, σ が次の条件:

$$m(\sigma(s), \sigma(s')) = m(s, s') \quad (\forall s, s' \in S) \quad (1.1)$$

¹ W の元 w に対して, w の長さ $\ell(w)$ を対応させる関数. ここで, w の長さ $\ell(w)$ とは, w の S の元による積表示 $w = s_1 \cdots s_r$ を与えたとき, w の全ての積表示の中で最小の r のことをいう. 特に, $\ell(e) = 0$ であり, $s \in S$ に対して, $\ell(s) = 1$ である.

を満足するときという.

Coxeter 系の普遍性により, (W, S) の Coxeter 図形の自己同型 σ は次のような W 上の自己同型に拡張される:

$s_1, s_2, \dots, s_r \in S, r = 0, 1, 2, \dots$ に対し,

$$\sigma(s_1 s_2 \cdots s_r) = \sigma(s_1) \sigma(s_2) \cdots \sigma(s_r) \quad (1.2)$$

特に, 任意の $w \in W$ に対して $\ell(\sigma(w)) = \ell(w)$ である.

今, $W_\sigma = \{w \in W \mid \sigma(w) = w\}$ とする. このとき, W_σ は W の部分群となる.

定理 1.1 (R. Steinberg [5])

(W, S) を Coxeter 系とし, σ を (W, S) の Coxeter 図形の自己同型とする. さらに,

$$S_\sigma = \{w_X \mid X \subset S \text{ は } \langle \sigma \rangle\text{-軌道で, } W_X = \langle X \rangle \text{ が有限群となるもの}\}$$

とおく. ここで, w_X は *parabolic* 部分群 W_X の最長元である. このとき, (W_σ, S_σ) は Coxeter 系をなす.

R. Steinberg は, この定理を (W, S) のルート系を用いることにより証明した. 本報告では, Coxeter 系の特徴の 1 つである “Exchange Condition” と呼ばれる性質を用いることにより, Steinberg とは異なった証明を与えることにする:

定理 1.2 (N. Bourbaki [1] 参照)

群 W と W の位数 2 の元からなる生成系 S に対し, 組 (W, S) が Coxeter 系となる必要十分条件は, (W, S) が *Exchange Condition* を満たすことである.

ここで, *Exchange Condition* とは, $\ell(sw) \leq \ell(w)$ となる任意の $w \in W$ と $s \in S$ に対して次のことが成立することをいう:

w の S の元による任意の積表示 $w = s_1 s_2 \cdots s_r$ に対して, $1 \leq i \leq r$ なる自然数 i が存在して,

$$sw = ss_1 s_2 \cdots s_r = s_1 \cdots \check{s}_i \cdots s_r$$

となる. ここで, 列 $s_1 s_2 \cdots s_r$ に対して, $s_1 \cdots \check{s}_i \cdots s_r$ は, 元の列から s_i を取り除いて得られる列である. □

Coxeter 系 (W, S) が与えられたとき, W 上の半順序 $\leq_B$ が次のように定義される:

W の部分集合 T を reflection 全体, すなわち

$$T = \{wsw^{-1} | w \in W, s \in S\}$$

とする.

これに対して, $w \leq_B w'$ ($w, w' \in W$) を, $t_1, \dots, t_k \in T$ が存在し,

$$\begin{aligned} w' &= t_k t_{k-1} \cdots t_1 w \\ \ell(t_i \cdots t_1 w) &\geq \ell(t_{i-1} \cdots t_1 w) \quad (1 \leq i \leq k) \end{aligned}$$

となるものとして定義する. この W 上の半順序 $\leq_B$ は W 上の **Bruhat order** と呼ばれる.

定理 1.1 により, (W, S) の Coxeter 図形の自己同型 σ に対して, (W_σ, S_σ) は Coxeter 系となる. したがって, W_σ 上の Bruhat order が定義される. ここで注意しなければならないのは, S_σ の元 w_X は必ずしも W の reflection, すなわち $w_X \in T$ とはならないことである. ゆえに, W_σ 上の Bruhat order の定義は W 上の Bruhat order の定義に全く依存していない.

次に述べる定理は両者の Bruhat order を関係付けたのもであり, 本報告において定理 1.1 と並ぶもう一つの主要な結果である:

定理 1.3 W_σ 上の Bruhat order は, W 上の Bruhat order の W_σ への制限である.

すなわち, $\leq_B$ を W 上の Bruhat order とし, $\leq_\sigma$ を W_σ 上の Bruhat order としたとき, $w, w' \in W_\sigma$ に対して,

$$w \leq_\sigma w' \iff w \leq_B w' \quad (1.3)$$

2 準備

この節では, 定理 1.1 と定理 1.3 を証明するために Coxeter 系のいくつかの性質と W_σ に対して少し述べることにする.

(W, S) を Coxeter 系とする. $X \subseteq S$ に対し, $W_X = \langle X \rangle$ を X で生成される W の parabolic 部分群とする. さらに,

$$\begin{aligned} W^X &:= \{w \in W \mid \ell(ws) > \ell(w) \ (\forall s \in X)\} \\ & (= \{w \in W \mid \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w') \ (\forall w' \in W_X)\}) \quad (2.1) \\ & (= \{w \in W \mid \ell(w) = \min\{\ell(w') \mid w' \in w \cdot W_X\}\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^XW &:= \{w \in W \mid \ell(sw) > \ell(w) \ (\forall s \in X)\} \\ & (= \{w \in W \mid \ell(w''w) = \ell(w'') + \ell(w) \ (\forall w'' \in W_X)\}) \quad (2.2) \\ & (= \{w \in W \mid \ell(w) = \min\{\ell(w'') \mid w'' \in W_X \cdot w\}\}) \end{aligned}$$

とおく. このとき, $w \in W$ に対して, $\tilde{w} \in W^X$ と $w' \in W_X$ が一意に存在して, $w = \tilde{w}w'$ かつ, $\ell(w) = \ell(\tilde{w}) + \ell(w')$ となる. また同様に, $\hat{w} \in {}^XW$ と $w'' \in W_X$ が一意に存在して, $w = w''\hat{w}$ かつ, $\ell(w) = \ell(w'') + \ell(\hat{w})$ となる. この $\tilde{w} \in W^X$ を w の W^X -part といい, $\hat{w} \in {}^XW$ を w の XW -part という.

補題 2.1 $w \in W$ に対して, 簡約表示² $w = s_q s_{q-1} \cdots s_1$ を 1 つ固定する.

$w', w'' \in W$ は, $1 \leq j \leq q$ なる任意の自然数 j で $\ell(s_j w') > \ell(w')$ かつ $\ell(s_j w' w'') < \ell(w' w'')$ となるものとする. このとき, 次のことが成立する.

- (1) $w'' = s_1'' \cdots s_r''$ は任意の積表示とする. このとき, $1 \leq j \leq \min(q, r)$ なる任意の自然数 j に対して, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{r-j} \leq r$ が存在して,

$$w' w'' = s_j \cdots s_1 w' s_{i_1}'' \cdots s_{i_{r-j}}''$$

となる.

- (2) $\ell(w'') \geq q = \ell(w)$

Proof. $w' = s_1' \cdots s_p'$ を w' の任意の簡約表示とし, これを 1 つ固定する. 仮定により $X = \{s_1, \dots, s_q\}$ とおくと, $w' \in {}^XW$ であることに注意する. よって, $1 \leq j \leq q$ なる任意の自然数 j に対して, $s_j \cdots s_1 w' = s_j \cdots s_1 s_1' \cdots s_p'$ は簡約表示となる.

- (1) $1 \leq j \leq \min(q, r)$ に関する帰納法を用いて証明する.

$j = 1$ のとき, このときは Exchange Condition により, 次の (a), (b) のいずれかが成立する.

² reduced expression のこと. すなわち, w の S の元による積表示で, これより短い表示が出来ないもの. 言い換えれば, $q = \ell(w)$ となる w の S の元による積表示.

$$(a) \ 1 \leq \exists k \leq p \text{ s.t. } w'w'' = s_1s'_1 \cdots \check{s}'_k \cdots s'_ps''_1 \cdots s''_r$$

$$(b) \ 1 \leq \exists k \leq r \text{ s.t. } w'w'' = s_1s'_1 \cdots s'_ps''_1 \cdots \check{s}''_k \cdots s''_r$$

もし, (a) が成立すれば, $s_1w' = s_1s'_1 \cdots s'_p$ が簡約表示であることに反する. したがって, (b) のみが成立する. ゆえに (1) が成立する.

次に (1) が $1 \leq j \leq \min(q, r) - 1$ なるある自然数 j に対して成立するものとし, $1 \leq i_1 < \cdots < i_{r-j} \leq r$ は

$$w'w'' = s_j \cdots s_1 w' s''_{i_1} \cdots s''_{i_{r-j}}$$

となるものとする. $j \leq \min(q, r) - 1$ であるから, 集合 $\{s''_{i_1}, \dots, s''_{i_{r-j}}\}$ は空集合でないことに注意する. 仮定により $\ell(s_{j+1}w'w'') < \ell(w'w'')$ であるから Exchange Condition により次の (a), (b), (c) のいずれかが成立する.

$$(a) \ 1 \leq \exists k \leq j \text{ s.t. } w'w'' = s_{j+1}s_j \cdots \check{s}_k \cdots s_1s'_1 \cdots s'_ps''_{i_1} \cdots s''_{i_{r-j}}$$

$$(b) \ 1 \leq \exists k \leq p \text{ s.t. } w'w'' = s_{j+1}s_j \cdots s_1s'_1 \cdots \check{s}'_k \cdots s'_ps''_{i_1} \cdots s''_{i_{r-j}}$$

$$(c) \ 1 \leq \exists k \leq r-j \text{ s.t. } w'w'' = s_{j+1}s_j \cdots s_1s'_1 \cdots s'_ps''_{i_1} \cdots \check{s}''_k \cdots s''_{i_{r-j}}$$

もし, (a) または (b) が成立すれば, $s_{j+1}s_j \cdots s_1w' = s_{j+1}s_j \cdots s_1s'_1 \cdots s'_p$ が簡約表示であることに反する. したがって, (c) のみが成立する. ゆえに $j+1$ のときも (1) が成立する.

(2) $\ell(w) > \ell(w'') = r$ とし, $w'' = s''_1 \cdots s''_r$ を簡約表示とする. $\tilde{w} = s_r \cdots s_1$ とおけば, $w = s_q \cdots s_1$ が簡約表示であるから, $\tilde{w} = s_r \cdots s_1$ も簡約表示であり, $s_{r+1}\tilde{w} = s_{r+1}s_r \cdots s_1$ も簡約表示である. したがって, $\ell(s_{r+1}\tilde{w}) = \ell(\tilde{w}) + 1$ となる.

今, (1) を $\tilde{w}$ と $w'w''$ に適用すれば,

$$w'w'' = s_r \cdots s_1 w' = \tilde{w}w' \quad (2.3)$$

を得る.

今, 上の注意から $X = \{s_1, \dots, s_q\}$ に対して $w' \in {}^X W$ であったから, $\ell(s_{r+1}\tilde{w}w') = \ell(s_{r+1}\tilde{w}) + \ell(w') = \ell(\tilde{w}) + \ell(w') + 1 = \ell(\tilde{w}w') + 1$ となる. ところが式 (2.3) により, このことは $\ell(s_{r+1}w'w'') > \ell(w'w'')$ となることを示している. これは $1 \leq j \leq q$ なる全ての自然数 j に対して, $\ell(s_jw'w'') < \ell(w'w'')$ となることに反する. $\square$

次の系は、この補題を $w' = e$ に対して適用することで得られる。

系 2.2 $w \in W$ に対して、簡約表示 $w = s_q \cdots s_1$ を 1 つ固定する。さらに、 $w'' \in W$ は $1 \leq j \leq q$ なる任意の自然数 j に対して、 $\ell(s_j w'') < \ell(w'')$ となるものとする。このとき次のことが成立する。

- (1) $w'' = s_1'' \cdots s_r''$ を任意の積表示とする。 $1 \leq j \leq \min(q, r)$ なる自然数 j に対し、 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{r-j} \leq r$ が存在し、

$$w'' = s_j \cdots s_1 s_{i_1}'' \cdots s_{i_{r-j}}''$$

となる。

- (2) $\ell(w'') \geq q = \ell(w)$

□

命題 2.3 $X \subseteq S$ とする。

- (1) W_X が有限群のとき、 $w \in W$ が、任意の $s \in X$ に対して $\ell(sw) < \ell(w)$ となるならば、 $\tilde{w} \in W$ が存在して、 $w = w_X \tilde{w}$ かつ $\ell(w) = \ell(w_X) + \ell(\tilde{w})$ となる。ここで、 $w_X \in W_X$ は W_X の最長元である。
- (2) W_X が無限群のとき、任意の $s \in X$ に対して、 $\ell(sw) < \ell(w)$ となるような $w \in W$ は存在しない。

Proof. (1) このとき、系 2.2 により $\ell(w) \geq \ell(w_X)$ となる。今、 $\hat{w}$ を w の ${}^X W$ -part とする。さらに、 $w' = w\hat{w}^{-1}$ とすれば、 $w = w'\hat{w}$ かつ $\ell(w) = \ell(w') + \ell(\hat{w})$ となる。したがって、(1) を証明するには、 $w' = w_X$ となること、すなわち、任意の $s \in X$ に対して、 $\ell(sw') < \ell(w')$ となることを示せばよい。

そこで、ある $s \in X$ が存在し、 $\ell(sw') > \ell(w')$ となると仮定しよう。 $w' = s_1 \cdots s_p$ 、 $\hat{w} = s_{p+1} \cdots s_{p+q}$ をそれぞれの簡約表示とする。このとき、 $\ell(w) = \ell(w') + \ell(\hat{w})$ により、 $w = s_1 \cdots s_{p+q}$ も簡約表示でなければならない。さて、 $\ell(sw) < \ell(w)$ であるから、Exchange Condition により、 $1 \leq i \leq p+q$ なるある自然数 i で

$$w = s s_1 \cdots \check{s}_i \cdots s_{p+q}$$

となるものが存在する。ところが、 $\ell(sw') > \ell(w')$ の仮定により、この i は $p+1 \leq i \leq p+q$ でなければならない。今、 $\tilde{w} = s_{p+1} \cdots \check{s}_i \cdots s_{p+q}$ と

おくと, $\tilde{w}$ も $\hat{w}$ も $W_X \cdot w$ の元となるが, $\ell(\tilde{w}) \leq \ell(\hat{w}) - 1$ である. これは式 (2.2) により $\hat{w} \in {}^X W$ であることに反する.

(2) $\hat{w}$ を w の ${}^X W$ -part と仮定し, $w' = w\hat{w}^{-1}$ とすると, (1) の証明と同様に, 任意の $s \in X$ に対して, $\ell(sw') < \ell(w')$ となることが示される. したがって, 系 2.2 (2) から, 任意の $w'' \in W_X$ に対して $\ell(w') \geq \ell(w'')$ となるが, W_X は無限群であるからこのような元 w' の存在はありえない. これは矛盾. $\square$

補題 2.4 $X \subseteq S$ は 1 つの $\langle \sigma \rangle$ -orbit をなすものとする. $w \in W_\sigma$ に対して,

$$\exists s \in X \text{ s.t. } \ell(sw) < \ell(w) \iff \ell(s'w) < \ell(w) \quad (\forall s' \in X)$$

であり,

$$\exists s \in X \text{ s.t. } \ell(sw) > \ell(w) \iff \ell(s'w) > \ell(w) \quad (\forall s' \in X)$$

である.

Proof. いずれの場合も “ $\Leftarrow$ ” については成立する. よって逆を示そう. そこで, ある $s \in X$ で $\ell(sw) < \ell(w)$ となるとする. X は 1 つの $\langle \sigma \rangle$ -orbit をなすから, 任意の $s' \in X$ に対して, 整数 k が存在して, $s' = \sigma^k(s)$ と書くことができる. さらに, σ は W 上の “長さを変えない” 自己同型であるから,

$$\ell(s'w) = \ell(\sigma^k(s)w) = \ell(\sigma^k(sw)) = \ell(sw) < \ell(w)$$

を得る.

後半の主張はこの議論の “ $<$ ” を “ $>$ ” に変えればよい. $\square$

命題 2.5 (W, S) を Coxeter 系とし, σ を (W, S) の Coxeter 図形の自己同型とする. このとき次のことが成立する.

- (1) $X \subseteq S$ は 1 つの $\langle \sigma \rangle$ -orbit であり, W_X が有限群となるものとする. このとき, $w_X \in W_\sigma$ である. ここで, w_X は W_X の最長元.
- (2) $w \in W_\sigma$ に対して, $w = s_1 \cdots s_r$ を任意の簡約表示とする. $1 \leq i \leq r$ なる自然数 i に対して, X_i を s_i の $\langle \sigma \rangle$ -orbit とすると, W_{X_i} は有限群となる.
- (3) S_σ を定理 1.1 により定義される W の部分集合とする. (このとき, S_σ は (1) により W_σ の部分集合となる.)

任意の $w \in W_\sigma$ に対して, $w_{X_1}, \dots, w_{X_r} \in S_\sigma$ が存在し, $w = w_{X_1} \cdots w_{X_r}$ かつ $\ell(w) = \ell(w_{X_1}) + \cdots + \ell(w_{X_r})$ となる.

Proof. (1) $w_X = s_1 \cdots s_r$ を簡約表示とする. このとき, [3] 定理 5.5 により $1 \leq i \leq r$ なる任意の自然数 i に対して, $s_i \in X$ となる. さらに, X は 1 つの $\langle \sigma \rangle$ -orbit であるから, $\sigma(s_i) \in X$. したがって, $\sigma(w_X) = \sigma(s_1) \cdots \sigma(s_r)$ は W_X の元であることが分かる. 特に σ は長さを変えない W 上の自己同型であるから, W_X における最長元の一意性により, このことは $\sigma(w_X) = w_X$ となることを意味する.

(2) $\ell(w)$ に関する帰納法により証明する. $\ell(w) = 0$ のとき, すなわち $w = e$ のとき示すべきことは何もない. $\ell(w) \geq 1$ のとき, $w = s_1 \cdots s_r$ を簡約表示とする. $\ell(s_1 w) < \ell(w)$ であるから, 補題 2.4 により任意の $s \in X_1$ に対して $\ell(sw) < \ell(w)$ である. したがって, 命題 2.3 により W_{X_1} は有限群で, W_{X_1} の最長元 w_{X_1} に対して, $w = w_{X_1} \hat{w}$ かつ $\ell(w) = \ell(w_{X_1}) + \ell(\hat{w})$ となる元 $\hat{w} \in W$ が存在する. 特に, (1) により w_{X_1} は W_σ の元であるから, $\hat{w} \in W_\sigma$ である. 今, $\hat{w} = s'_1 \cdots s'_q$ を簡約表示とし, $\hat{w}$ に帰納法の仮定を適用すると, $1 \leq i \leq q$ なる全ての自然数 i に対して s'_i の $\langle \sigma \rangle$ -orbit X'_i に関する parabolic 部分群 $W_{X'_i}$ は有限群となる. $w_{X_1} = s''_1 \cdots s''_p$ を簡約表示とすると, $\{s_1, \dots, s_r\} = \{s'_1, \dots, s'_q, s''_1, \dots, s''_p\}$ ³ であるから, 主張が従う.

(3) この証明も $\ell(w)$ に関する帰納法により示す. $\ell(w) = 0$ のとき, 示すべきことは何もない. $\ell(w) \geq 1$ のとき, $\ell(sw) < \ell(w)$ となる $s \in S$ が存在する. このとき, s の $\langle \sigma \rangle$ -orbit X に対し, 補題 2.4 により, 任意の $s' \in X$ で $\ell(s'w) < \ell(w)$ であり, (2) により X に関する parabolic 部分群 W_X は有限群であることがわかる. したがって, W_X には最長元 w_X が存在するが, (1) により $w_X \in S_\sigma$ であり, 命題 2.3 により w に対して $\hat{w} \in W$ が存在し, $w = w_X \hat{w}$ かつ $\ell(w) = \ell(w_X) + \ell(\hat{w})$ となる. 特に, W_σ は群をなすから $\hat{w} \in W_\sigma$ となる. 帰納法の仮定を $\hat{w}$ に適用することにより, $w_{X_2}, \dots, w_{X_r} \in S_\sigma$ が存在して, $\hat{w} = w_{X_2} \cdots w_{X_r}$ かつ $\ell(\hat{w}) = \ell(w_{X_2}) + \cdots + \ell(w_{X_r})$ となる. このとき, $w_{X_1} = w_X$ とすればよい. $\square$

系 2.6 (W, S) を Coxeter 系とし, σ を (W, S) の Coxeter 図形の自己同型とする. X を 1 つの $\langle \sigma \rangle$ -orbit とするとき,

$$W_\sigma \cap W_X = \{e, w_X\} \quad (W_X \text{ が有限群のとき}) \quad (2.4)$$

$$W_\sigma \cap W_X = \{e\} \quad (W_X \text{ が無限群のとき}) \quad (2.5)$$

ここで, w_X は W_X の最長元である.

³N. Bourbaki [1], 命題 7 参照

Proof. W_X が有限群のとき, 命題 2.5 (1) により, $W_\sigma \cap W_X \supseteq \{e, w_X\}$ となる. 逆に, $w \in W_\sigma \cap W_X$ が $w \neq e$ ならば, $s \in X$ が存在して, $\ell(sw) < \ell(w)$ となるが, 補題 2.4 により, どんな $s' \in X$ に対しても, $\ell(s'w) < \ell(w)$ となる. これは w が W_X の最長元 w_X であることを示している.

W_X が無限群のとき, $w \in W_\sigma \cap W_X$ で $w \neq e$ となるものが存在したと仮定すると, (1) と同様に, 補題 2.4 から任意の $s' \in X$ に対して, $\ell(s'w) < \ell(w)$ となる. これは, 命題 2.3 (2) に矛盾である. $\square$

3 定理 1.1 の証明

この節では組 (W_σ, S_σ) が Coxeter 系であるという定理 1.1 を示す. 前節で群 W_σ が S_σ により生成されることが示された. 特に S_σ の元は W のある有限 parabolic 部分群の最長元の集合であるから, 位数 2 の元の集合でもある. したがって, 定理 1.1 を証明するためには, 定理 1.2 により組 (W_σ, S_σ) が Exchange Condition を満足することを示せばよい. そのためには S_σ に関する W_σ 上の長さ関数 ℓ_σ の性質を見ておく必要がある.

以降, 断ることなく “ $w_X \in S_\sigma$ ” の記述は, “ X が 1 つの $\langle \sigma \rangle$ -orbit” であり, “ W_X が有限群” となることも意味に含めることにする.

命題 3.1 $w_X \in S_\sigma$ とする. $w' = w_{X_1} \cdots w_{X_p}$ ⁴ $\in W_\sigma$ に対して, $s \in X$ が存在して $\ell(sw') < \ell(w')$ となるならば, $w_X w' = w_{X_1} \cdots w_{X_k} \cdots w_{X_p}$ となる自然数 k が存在する.

特に, $\ell(w_X) \leq \ell(w_{X_k})$ であり, 命題 2.3 により $\ell(w_X w') = \ell(w') - \ell(w_X)$ である.

Proof. 証明を簡単にするために $w_{X_0} = e$ とする. これに対し, $w' = w_{X_0} w_{X_1} \cdots w_{X_p}$ と書くことにする.

$\ell(sw') < \ell(w')$ なる $s \in X$ に対して, $1 \leq k \leq p$ なる自然数 k を

$$\begin{aligned} \ell(sw_{X_0} w_{X_1} \cdots w_{X_i}) &> \ell(w_{X_0} w_{X_1} \cdots w_{X_i}) \quad (0 \leq \forall i \leq k-1) \\ \ell(sw_{X_0} w_{X_1} \cdots w_{X_k}) &< \ell(w_{X_0} w_{X_1} \cdots w_{X_k}) \end{aligned}$$

を満たすものを選ぶ. $\ell(sw_{X_0}) > \ell(w_{X_0})$ であり, $\ell(sw_{X_0} w_{X_1} \cdots w_{X_p}) < \ell(w_{X_0} w_{X_1} \cdots w_{X_p})$ であるから, このような k は必ず取ることができる.

⁴今, この S_σ の元による積表示が簡約表示かどうかは仮定しない.

この k に対して, $\tilde{w} = w_{X_0} w_{X_1} \cdots w_{X_{k-1}}$ とし, $w_{X_k} = s_1 \cdots s_r$ を簡約表示とする. このとき, $1 \leq i \leq r$ なる全ての自然数 i に対して, $s_i \in X_k$ であることに注意する. 補題 2.4 により, 任意の $s' \in X$ に対して, $\ell(s'\tilde{w}) > \ell(\tilde{w})$ かつ $\ell(s'\tilde{w}w_{X_k}) < \ell(\tilde{w}w_{X_k})$ となるから, 補題 2.1 により $\ell(w_X) \leq \ell(w_{X_k})$ であり, $1 \leq i_1 < \cdots < i_{r-q} \leq r$ が存在して,

$$\tilde{w}w_{X_k} = w_X w_{X_0} w_{X_1} \cdots w_{X_{k-1}} s_{i_1} \cdots s_{i_{r-q}}$$

となる. ここで, $q = \ell(w_X)$ である. ゆえに, この命題を証明するためには, $\hat{w} = s_{i_1} \cdots s_{i_{r-q}}$ が W の単位元 e であることを示せば十分である. これを示そう. まず, 明らかに $\hat{w} \in W_\sigma \cap W_{X_k}$ がわかる. したがって, 系 2.6 により, $\hat{w} = e$ または $\hat{w} = w_{X_k}$ となるが, $w_X \neq e$ であるから $\hat{w} = e$ でなければ矛盾である. $\square$

命題 3.2 ℓ を S に関する W 上の長さ関数とし, ℓ_σ を S_σ に関する W_σ 上の長さ関数とする. $w = w_{X_1} \cdots w_{X_r} \in W_\sigma$ に対して,

- (1) $\ell_\sigma(w) = r \iff \ell(w) = \ell(w_{X_1}) + \cdots + \ell(w_{X_r})$
- (2) $w_X \in S_\sigma$ に対して, $\ell_\sigma(w_X w) < \ell_\sigma(w)$ となる必要十分条件は, ある $s \in X$ が存在して, $\ell(sw) < \ell(w)$ となることである. このとき, $\ell(w_X w) = \ell(w) - \ell(w_X)$ である.
- (3) $w_X \in S_\sigma$ に対して, $\ell_\sigma(w_X w) > \ell_\sigma(w)$ となる必要十分条件は, ある $s \in X$ が存在して, $\ell(sw) > \ell(w)$ となることである. このとき, $\ell(w_X w) = \ell(w) + \ell(w_X)$ である.

Proof. (1) 命題 2.5 (3) により, 任意の $w \in W_\sigma$ に対して, $w_{X_1}, \dots, w_{X_r} \in S_\sigma$ で $w = w_{X_1} \cdots w_{X_r}$ かつ $\ell(w) = \ell(w_{X_1}) + \cdots + \ell(w_{X_r})$ となるものが存在することに注意する.

まず, 十分条件 “ $\Rightarrow$ ” を r に関する帰納法により証明する. $r = 0$ または $r = 1$ のときは示すべきことは何もない. $r \geq 2$ とし, $w = w_{X_1} \cdots w_{X_r}$ は S_σ の元による簡約表示とする. このとき明らかに $w_{X_1} w = w_{X_2} \cdots w_{X_r}$ も簡約表示である. したがって, 帰納法の仮定により, $\ell(w_{X_1} w) = \ell(w_{X_2}) + \cdots + \ell(w_{X_r})$ となる. よって十分条件を証明するためには, $\tilde{w} = w_{X_2} \cdots w_{X_r}$ としたとき, $\tilde{w} \in {}^{X_1}W$ となることを示せばよい. そこで, $s \in X_1$ が存在して, $\ell(s\tilde{w}) < \ell(\tilde{w})$ となったとしよう. このとき, 命題 3.1 により, $2 \leq k \leq r$ なる自然数 k が存在して, $w = w_{X_1} \tilde{w} = w_{X_1} w_{X_2} \cdots w_{X_k} \cdots w_{X_r}$

となるが、これは $w = w_{X_1} \cdots w_{X_r}$ が S_σ の元による簡約表示であることに反する。

同様に必要条件 “ $\Leftarrow$ ” も r に関する帰納法によって示す。 $r = 0$ または $r = 1$ のときは示すべきことは何もない。 $r \geq 2$ とし $w = w_{X_1} \cdots w_{X_r}$ は $\ell(w) = \ell(w_{X_1}) + \cdots + \ell(w_{X_r})$ なる S_σ の元による積表示とする。このとき、 w の S_σ の元による別の積表示 $w = w_{X'_1} \cdots w_{X'_q}$ が与えられたとき、 $r \leq q$ となることを示せばよい。 $\ell(w) = \ell(w_{X_1}) + \cdots + \ell(w_{X_r})$ であるから、明らかに $\ell(w_{X_1}w) = \ell(w_{X_2}) + \cdots + \ell(w_{X_r})$ となる。したがって帰納法の仮定により、 $w_{X_1}w = w_{X_2} \cdots w_{X_r}$ は S_σ の積表示における簡約表示であり、 $\ell_\sigma(w_{X_1}w) = r - 1$ となる。また、 $s \in X_1$ に対して、 $\ell(sw) \leq \ell(sw_{X_1}) + \ell(w_{X_2}) + \cdots + \ell(w_{X_r}) = \ell(w) - 1$ となるから、命題 3.1 により、 $1 \leq k \leq q$ なる自然数 k が存在して、 $w_{X_1}w = w_{X'_1} \cdots w_{X'_k} \cdots w_{X'_q}$ となる。ところが、 $\ell_\sigma(w_{X_1}w) = r - 1$ により $r - 1 \leq q - 1$ 。したがって、 $r \leq q$ が得られる。

(2) 命題 3.1 により、 $s \in X$ で $\ell(sw) < \ell(w)$ となるものが存在すれば、明らかに $\ell_\sigma(w_Xw) < \ell_\sigma(w)$ となる。ゆえに十分条件を示す。 $\ell_\sigma(w_Xw) < \ell_\sigma(w)$ としよう。このとき、 $s \in X$ で $\ell(sw) < \ell(w)$ となるものが存在しなければ、 $w \in {}^XW$ となることが分かる。したがって、 $\ell(w_Xw) = \ell(w_X) + \ell(w)$ となるが、このことは (1) により $\ell_\sigma(w_Xw) > \ell_\sigma(w)$ を引き起こす。これは $\ell_\sigma(w_Xw) < \ell_\sigma(w)$ に矛盾する。

(3) ある $s \in X$ に対して、 $\ell(sw) > \ell(w)$ となるならば、補題 2.4 により、任意の $s' \in X$ に対して、 $\ell(s'w) > \ell(w)$ となることが示される。したがって、 $w \in {}^XW$ であり、これは $\ell(w_Xw) = \ell(w_X) + \ell(w)$ を意味する。ゆえに (1) により、このことは $\ell_\sigma(w_Xw) > \ell_\sigma(w)$ を引き起こす。よって必要条件は示された。逆に、 $\ell_\sigma(w_Xw) > \ell_\sigma(w)$ と仮定したとき、もし、 $s \in X$ で $\ell(sw) < \ell(w)$ となるものが存在すれば、命題 3.1 により、 $\ell_\sigma(w_Xw) < \ell_\sigma(w)$ を引き起こす。これは $\ell_\sigma(w_Xw) > \ell_\sigma(w)$ に矛盾である。 $\square$

定理 1.1 の証明 $w_X \in S_\sigma$ と $w \in W_\sigma$ は $\ell_\sigma(w_Xw) < \ell_\sigma(w)$ となるものとする。今、 w に対し、 S_σ の元による (簡約とは限らない) 任意の積表示 $w = w_{X_1} \cdots w_{X_r}$ を取る。 $\ell_\sigma(w_Xw) < \ell_\sigma(w)$ であるから、命題 3.2 により $s \in X$ が存在して、 $\ell(sw) < \ell(w)$ となる。よって、命題 3.1 により $1 \leq k \leq r$ なる自然数 k が存在して、 $w_Xw = w_{X_1} \cdots w_{X_k} \cdots w_{X_r}$ となる。したがって、組 (W_σ, S_σ) は Exchange Condition を満足する。ゆえに、定理 1.2 により (W_σ, S_σ) は Coxeter 系をなす。 $\square$

4 定理 1.3 の証明

この節では、定理 1.3 を証明する。定理 1.3 の証明にあたり、次の定理を用いる。この定理は、V. Deodhar により示され、“Deodhar の Bruhat order の特徴づけ”と呼ばれている。

定理 4.1 (V. Deodhar, [2])

(W, S) を Coxeter 系とする。 W 上の 2 項関係 $\preceq$ が、 W 上の Bruhat order である必要十分条件は、2 項関係 $\preceq$ が次の 2 つの条件を満たすことである。

- (1) $w \in W$ に対し、 $w \preceq e \Leftrightarrow w = e$
- (2) $\ell(sw_1) < \ell(w_1)$ かつ $\ell(sw_2) < \ell(w_2)$ なる任意の $w_1, w_2 \in W$, $s \in S$ に対して、

$$\text{Property } Z(s; w_1, w_2) : w_1 \preceq w_2 \Leftrightarrow sw_1 \preceq w_2 \Leftrightarrow sw_1 \preceq sw_2 \quad \square$$

定理 1.3 の証明 W 上の Bruhat order $\leq_B$ の W_σ への制限が、定理 4.1 (1), (2) を満足することを示し、定理 1.3 を証明する。

まず、 $\leq_B$ が (1) を満たすことは明らか。よって、(2) を満足することを示す。そこで、 ℓ を W 上の S に関する長さ関数とし、 ℓ_σ を W_σ 上の S_σ に関する長さ関数とする。

今、 $w_X \in S_\sigma$ と $w_1, w_2 \in W_\sigma$ は $\ell_\sigma(w_X w_1) < \ell_\sigma(w_1)$ かつ $\ell_\sigma(w_X w_2) < \ell_\sigma(w_2)$ となるものとする。命題 3.2 により、このとき $\ell(w_X w_i) = \ell(w_i) - \ell(w_X)$ ($i = 1, 2$) であるから、簡約表示 $w_X = s_q \cdots s_1$ に対して、

$$\ell(s_j \cdots s_1 w_i) < \ell(s_{j-1} \cdots s_1 w_i) \quad (1 \leq \forall j \leq q, i = 1, 2) \quad (4.1)$$

であり、特に $s_1 \in X$ であるから、補題 2.4 により、

$$\ell(s_j w_2) < \ell(w_2) \quad (1 \leq \forall j \leq q) \quad (4.2)$$

となる。さて、 W 上の Bruhat order の W_σ への制限 $\leq_B$ が (2) を満足することを示すために、 $1 \leq j \leq q$ なる任意の自然数 j に対し、

$$w_1 \leq_B w_2 \Leftrightarrow s_j \cdots s_1 w_1 \leq_B w_2 \Leftrightarrow s_j \cdots s_1 w_1 \leq_B s_j \cdots s_1 w_2 \quad (4.3)$$

が成立することを j に関する帰納法により示すことにする。

$j = 1$ のとき, 式 (4.1) と Property $Z(s_1; w_1, w_2)$ により式 (4.3) は成立する.

$j \geq 2$ のとき, 帰納法の仮定として

$$w_1 \leq_B w_2 \Leftrightarrow s_{j-1} \cdots s_1 w_1 \leq_B w_2 \Leftrightarrow s_{j-1} \cdots s_1 w_1 \leq_B s_{j-1} \cdots s_1 w_2$$

が成立するとする. 式 (4.1), (4.2) と Property $Z(s_j; s_{j-1} \cdots s_1 w_1, w_2)$ により, $s_{j-1} \cdots s_1 w_1 \leq_B w_2$ と $s_j \cdots s_1 w_1 \leq_B w_2$ は同値であるから, $w_1 \leq_B w_2$ と $s_j \cdots s_1 w_1 \leq_B w_2$ も同値となる. また, 式 (4.1) と Property $Z(s_j; s_{j-1} \cdots s_1 w_1, s_{j-1} \cdots s_1 w_2)$ により, $s_{j-1} \cdots s_1 w_1 \leq_B s_{j-1} \cdots s_1 w_2$ と $s_j \cdots s_1 w_1 \leq_B s_j \cdots s_1 w_2$ は同値. したがって, $w_1 \leq_B w_2$ と $s_j \cdots s_1 w_1 \leq_B s_j \cdots s_1 w_2$ も同値となる. よって, 任意の $1 \leq j \leq q$ なる自然数 j に対して, 式 (4.3) が成立することがわかる.

最後に, (2) の主張は, 式 (4.3) の $j = q$ の場合である. したがって, W 上の Bruhat order の W_σ への制限 $\leq_B$ は定理 4.1 の (1), (2) を満足する. $\square$

参考文献

- [1] N. Bourbaki, “Groupes et algebres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6”, Hermann, Paris, (1968).
- [2] Vinay V. Deodhar, “Some Characterization of Bruhat Ordering on a Coxeter Group and Determination of the Relative Möbius Function”, Invent. math. 39 (1977), 187–198.
- [3] James E. Humphreys, “Reflection Groups and Coxeter Groups”, Cambridge University Press, (1990).
- [4] James E. Humphreys, “Introduction to Lie Algebras and Representation Theory”, Springer – Verlag, (1972).
- [5] R. Steinberg, “Endomorphisms of Linear Algebraic Groups”, Memoirs of American Mathematical Society No.80, (1968).