表現論シンポジウム講演集, 2001
pp.137-153

Fundamental strata for classical groups

宮内通孝 (神戸大学自然科学研究科)

1 Introduction

F を非アルキメデス的局所体とする. $\mathrm{GL}_N(F)$ の既約許容表現の研究において, F^N の lattice chain から定義される開コンパクト部分群とその表現を用いた手法が有効であった. この方法の出発点となったのが Howe-Moy [3] と Bushnell [1] で与えられた fundamental stratum([3] では minimal K-type) の概念である. $\mathrm{GL}_N(F)$ の fundamental stratum は, lattice chain から得られる開コンパクト部分群とその既約表現の組として与えられる. これらの論文で $\mathrm{GL}_N(F)$ の既約許容表現が (部分群へ制限したときに) fundamental stratum を含むことが示された. 更に [1] では, 既約 supercuspidal 表現に含まれる fundamental stratum の特徴付けに成功している.

Morris [7] では剰余標数が 2 でない非アルキメデス的局所体上の古典群 G に対して, lattice chain から G の開コンパクト部分群のフィルトレーションを構成した. 刈山和俊氏はこのフィルトレーションを用いて, 古典群の fundamental stratum を定義し, G が古典 Chevalley 群の場合に既約 supercuspidal 表現に対応しない split fundamental strata を与えた. 本稿では hermitian ramified でない古典群 G に対して, G の既約許容表現が fundamental stratum を含むことを証明する. この結果が古典群の既約 supercuspidal 表現の分類と構成に役立つことを期待したい.

2 Preliminaries

2.1. この章では F を対合 σ_0 を持つ, 標数が 2 でない体とする. $\varepsilon = \pm 1$, V を非退化 (ε, σ_0)-半双線形形式 f を備えた有限次元 F-線形空間とする. すなわち, 任意の $v, w \in V$ と $\lambda \in F$ に対して $f : V \times V \to F$ は

$$f(\lambda v, w) = \sigma_0(\lambda) f(v, w) = \varepsilon \sigma_0(f(w, \lambda v))$$

を満足する.

このとき $X \in \mathrm{End}_F(V)$ に対して次の条件を満たす $\sigma(X) \in \mathrm{End}_F(V)$ が一意に定まる: 任意の $v, w \in V$ に対し

$$f(Xv, w) = f(v, \sigma(X)w).$$

写像 $\sigma : \mathrm{End}_F(V) \to \mathrm{End}_F(V)$ は $\mathrm{End}_F(V)$ の対合となる.

V 上の skew 線形写像の集合を

$$\mathrm{End}_F(V)^- = \{\, X \in \mathrm{End}_F(V) \,|\, X + \sigma(X) = 0 \,\}$$

で定義する.

2.2. e を自然数, $V = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}} V_i$ を非退化 (ε, σ_0)-半双線形形式 f を備えた有限次元 $\mathbf{Z}/e\mathbf{Z}$-次数付き F-線形空間とする. 形式 f には次の条件を仮定する: 整数 c で

$$i + j \not\equiv c \pmod{e} \quad \text{ならば} \quad f(V_i, V_j) = \{0\} \tag{2.2.1}$$

を満たすものが存在する.

$\mathrm{End}_F(V)_l$ を次数 l の斉次線形写像全体の集合とする:

$$\mathrm{End}_F(V)_l = \{X \in \mathrm{End}_F(V) \,|\, XV_i \subset V_{i+l},\ i \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}\ \}.$$

以下 $X \in \mathrm{End}_F(V)_l$ を巾零かつ skew であると仮定し, 自然数 d を $X^d V = \{0\}, X^{d-1}V \neq \{0\}$ を満足するようにとる. このとき次が成り立つ.

命題 2.2.1 ([7] 命題 3.3). 上の仮定のもとで, V の斉次元 $e_i \in V_{m(i)} (1 \leq i \leq s)$, $f_j \in V_{n(j)}, g_j \in V_{k(j)} (1 \leq j \leq t)$ と非負整数 d_i, δ_j で次の条件を満たすものが存在する.

(i) $X^{d_i} e_i = X^{\delta_j} f_j = X^{\delta_j} g_j = 0$ かつ $X^a e_i, X^b f_j, X^b g_j (0 \leq a < d_i, 0 \leq b < \delta_j, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t)$ は V の基底を成す.

(ii) 上の基底の元は以下の場合を除いて互いに直交する.

$$f(X^a e_i, X^{d_i - a - 1} e_i) = (-1)^a \alpha_i, \quad \alpha_i \in F^\times$$

または

$$f(X^b f_j, X^{\delta_j - b - 1} g_j) = \varepsilon f(X^{\delta_j - b - 1} g_j, X^b f_j) = (-1)^b.$$

2.3. 命題 2.2.1 の基底を用いて $H \in \mathrm{End}_F(V)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} H(X^a e_i) &= (1 - d_i + 2a) X^a e_i, \\ H(X^b f_j) &= (1 - \delta_j + 2b) X^b f_j, \\ H(X^b g_j) &= (1 - \delta_j + 2b) X^b g_j. \end{aligned}$$

$X^{d-1} \neq 0$ かつ $X^d = 0$ であったから $d = \max\{d_i, \delta_j\}_{i,j}$ である. 整数 λ に対し weight λ の weight 空間 $V(\lambda)$ を

$$V(\lambda) = \langle v \in V | Hv = \mu v,\ \mu \geq \lambda \rangle$$

で定義する. $V(\lambda)$ はそれに含まれる H の固有ベクトル, すなわち基底 $\{X^a e_i, X^b f_j, X^b g_j\}$ の元で張られる. 特に $V(\lambda)$ は V の斉次部分空間である.

$V_i(\lambda) = V(\lambda) \cap V_i$ とすれば $V_i(\lambda)$ もまた, それに属する基底 $\{X^a e_i, X^b f_j, X^b g_j\}$ の元で張られる. 定義から, 任意の λ に対し $XV_i(\lambda) \subset V_{i+l}(\lambda+2)$ である.

明らかに $\mu \leq \lambda$ ならば $V(\lambda) \subset V(\mu)$ で, 定義より $V = V(1-d)$ かつ $V(d) = \{0\}$ である. 任意の i に対し λ_i で $V_i = V_i(\lambda_i)$ を満足する最大の整数 $\lambda_i \leq d-1$ を表すことにすれば, 次の補題が成立する.

補題 2.3.1 ([7] 補題 3.4). $V_{i+ml}(\lambda_i + 2m)$ は $X^m V_i$ を含む V_{i+ml} の weight 空間の中で, 最小のものである. 特に $V_{i+ml}(\lambda_i + 2m) = 0$ と $X^m V_i = 0$ は同値である.

部分空間 $\{0\} \subsetneq W \subset V_i$ に対しその次数付き補空間 $W^\perp$ を次のように定義する.

$$W^\perp = \{v \in V_{c-i} \mid f(v, W) = \{0\}\}.$$

このとき次の補題は容易である.

補題 2.3.2. 斉次 weight 空間 $V_i(\lambda)$ が零空間でないとき, $V_i(\lambda)^\perp = V_{c-i}(1-\lambda)$ が成立する.

3 C-filtrations

3.1. F を剰余標数が 2 でない非アルキメデス的局所体, $\mathscr{O}$ をその付値環, $\mathscr{P}$ を $\mathscr{O}$ の極大イデアル, $\mathbf{F}_q$ を剰余体 $\mathscr{O}/\mathscr{P}$ とする.

以下, F は対合 σ_0 を持つと仮定する. F の σ_0 による固定体を $F_0 = F^{\sigma_0}$ で表し, $\mathscr{O}_0, \mathscr{P}_0$ をそれぞれ F_0 の付値環とその極大イデアルとする. このとき F の素元 ϖ は $\sigma_0(\varpi) = \pm\varpi$ を満たすようにとれる.

V を F 上の有限次元ベクトル空間とし, f を $V \times V$ 上の (ε, σ_0)-半双線形形式 $(\varepsilon = \pm 1)$ とする. G を (f, V) により定まる古典群

$$G = \{g \in GL(V) \mid f(gv, gw) = f(v, w),\ v, w \in V\}$$

とする. f から定まる $\mathrm{End}_F(V)$ 上の対合を σ で表す.

3.2. $\mathcal{L}$ を V の $\mathscr{O}$-lattice (すなわち閉コンパクト $\mathscr{O}$-部分加群) から成る集合とする. $\mathcal{L}$ が包含関係について全順序で, 更に $F^\times$ の元の積に関して閉じているとき, $\mathcal{L}$ は V の lattice chain であるという. $\mathcal{L}$ が lattice chain であるとき, 番号付け $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ で次の条件を満たすものが存在する.

(i) $L_i \supsetneq L_{i+1},\ i \in \mathbf{Z}$,

(ii) 自然数 e が存在して $\varpi L_i = L_{i+e},\ i \in \mathbf{Z}$.

(ii) の e は $\mathcal{L}$ により一意に定まる. これを lattice chain $\mathcal{L}$ の周期と呼び, $e = e(\mathcal{L})$ と書くことにする. 以下 lattice chain $\mathcal{L}$ に対して $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ と書けば, 上の条件を満たす番号付けを表すものとする.

V の lattice L に対して, その双対 lattice $L^{\#}$ を

$$L^{\#} \quad = \quad \{v \in V \mid f(v, L) \subset \mathscr{P}\}$$

で定める. $L^{\#}$ 自身も V の lattice であり, $(L^{\#})^{\#} = L$ を満たす.

$\mathcal{L}$ が V の lattice chain であるとき, $\mathcal{L}^{\#} = \{L^{\#} \mid L \in \mathcal{L}\}$ もまた lattice chain となり, これを $\mathcal{L}$ の双対 lattice chain と呼ぶ. $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\#}$ であるとき $\mathcal{L}$ は自己双対的であるという.

$\mathcal{L}$ を lattice chain, $\mathcal{M} = \mathcal{L}^{\#}$ をその双対 lattice chain とする.

定義 3.2.1 ([7] 補題 4.4). 組 $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ が C-chain であるとは, $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ が (自己双対的) lattice chain で, 更に, 番号付け $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$, $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ で

$$M_i \supset L_i \supsetneq M_{i+1} \supset L_{i+1}, \ i \in \mathbf{Z} \tag{3.2.1}$$

を満たすものが存在するときにいう.

3.3. C-chain $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ は [9] で定義された自己双対的 lattice sequence を用いて次のように特徴付けられる. まず V 上の lattice sequence とは, $\mathbf{Z}$ から V の $\mathscr{O}$-lattice 全体の集合への写像 Λ ($i \in \mathbf{Z}$ の像を Λ_i と書く) で

(i) $m \leq n$ に対し $\Lambda_m \supset \Lambda_n$,

(ii) 自然数 $e = e(\Lambda)$ が存在して $\Lambda_{n+e} = \varpi \Lambda_n, n \in \mathbf{Z}$

を満足するものをいう. 更に

(i') $m \leq n$ に対し $\Lambda_m \supsetneq \Lambda_n$

を満たすとき, Λ は strict であるといい, このとき Λ は lattice chain に他ならない.

V 上の lattice sequence Λ が自己双対的とは, $d \in \mathbf{Z}$ で

$$\Lambda_n^{\#} = \Lambda_{d-n}, \ n \in \mathbf{Z}$$

を満たすものが存在するときにいう.

C-chain $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ に対して $\Lambda : \mathbf{Z} \to \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ を

$$\Lambda_{2i} = M_i \supset \Lambda_{2i+1} = L_i, \ i \in \mathbf{Z}$$

で定義すれば, Λ は周期 $e(\Lambda) = 2e(\mathcal{L})$ の lattice sequence である. また $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ は C-chain であるから $L_0^{\#} = M_c$ を満たす c が一意に存在し, 任意の i について $L_i^{\#} = M_{c-i}$ かつ $M_i^{\#} = L_{c-i}$ が成立する. これより $\Lambda_i^{\#} = \Lambda_{2c+1-i}$, 従って Λ は自己双対的である.

逆に, 自己双対的 lattice sequence Λ が

C(i) $\Lambda_{2i+1} \supsetneq \Lambda_{2i+2}, \ i \in \mathbf{Z}$.

C(ii) $e(\Lambda)$ は偶数で d は奇数である.

を満足するとき, $\mathcal{L} = \{\Lambda_{2i+1} \mid i \in \mathbf{Z}\}$ とおけば, $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ は C-chain である.

上の記号のもとで C-chain と C(i), C(ii) を満たす自己双対的 lattice sequence を同一視し, $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$, $e(\Lambda) = 2e(\mathcal{L}) = 2e$, $d = 2c + 1$ と書く.

3.4. $\mathfrak{A}(\mathcal{L})$ を lattice chain $\mathcal{L}$ に対応する hereditary order, すなわち

$$\mathfrak{A}(\mathcal{L}) = \{\, X \in \mathrm{End}_F(V) \,|\, XL \subset L,\ L \in \mathcal{L} \,\}$$

とし, $\mathfrak{P}(\mathcal{L})$ をその Jacobson 根基とする. このとき

$$\mathfrak{P}(\mathcal{L})^n = \{\, X \in \mathrm{End}_F(V) \,|\, XL_i \subset L_{i+n},\ i \in \mathbf{Z} \,\},\ n \in \mathbf{Z}$$

が成り立つ. V 上の lattice sequence Λ と $n \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_n(\Lambda) = \{\ X \in \mathrm{End}_F(V)\ |\ X\Lambda(m) \subset \Lambda(m+n), m \in \mathbf{Z}\}$$

とする.

写像 tr_0 をトレースの合成

$$\mathrm{End}_F(V) \xrightarrow{\mathrm{tr}} F \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{F/F_0}} F_0$$

で定める. $\mathrm{End}_F(V)$ の $\mathscr{O}$-lattice Γ に対して

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= \{\, X \in \mathrm{End}_F(V) \,|\, \mathrm{tr}_0(X\Gamma) \subset \mathscr{P}_0 \} \\ &= \{\, X \in \mathrm{End}_F(V) \,|\, \mathrm{tr}(X\Gamma) \subset \mathscr{P} \} \end{aligned}$$

と定義する. このとき次が成り立つ.

命題 3.4.1 ([2] 命題 2.3, 2.10). (a) $\mathfrak{a}_0$ は lattice chain $\{\Lambda_i \mid i \in \mathbf{Z}\}$ に対応する hereditary order で $\mathfrak{a}_1$ はその Jacobson 根基である.

(b) $\varpi\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+e(\Lambda)}, n \in \mathbf{Z}$.

(c) $\mathfrak{a}_n \cdot \mathfrak{a}_m \subset \mathfrak{a}_{n+m},\ n, m \in \mathbf{Z}$.

(d) $\mathfrak{a}_n^* = \mathfrak{a}_{1-n},\ n \in \mathbf{Z}$.

更に Λ が自己双対的である場合, 任意の n に対して $\mathfrak{a}_n$ は対合 σ で不変となる.

C-chain $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$ から得られる $\mathrm{End}_F(V)$ のフィルトレーション $\{\mathfrak{a}_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ について考察する. まず定義から

$$\mathfrak{a}_{2j} = \mathfrak{P}(\mathcal{L})^j \cap \mathfrak{P}(\mathcal{M})^j,\ j \in \mathbf{Z}$$

が従う. これと先の命題の (d) から

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{2j+1} &= \mathfrak{a}_{-2j}^* = (\mathfrak{P}(\mathcal{L})^{-j} \cap \mathfrak{P}(\mathcal{M})^{-j})^* \\ &= (\mathfrak{P}(\mathcal{L})^{-j})^* + (\mathfrak{P}(\mathcal{M})^{-j})^* = \mathfrak{P}(\mathcal{L})^{j+1} + \mathfrak{P}(\mathcal{M})^{j+1} \end{aligned}$$

が任意の j について成立する.

3.5. $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$ を C-chain とする. 任意の n について $\mathfrak{a}_n$ は σ-不変であったから

$$\mathfrak{a}_n^- = \mathfrak{a}_n \cap \mathrm{End}_F(V)^- = \{\, x \in \mathfrak{a}_n \mid x + \sigma x = 0 \,\}$$

が定まる.

このとき $n \geq 0$ に対して $P_n := G \cap (1 + \mathfrak{a}_n)$ とすれば $P = P_0 = G \cap \mathfrak{A}(\mathcal{L} \cup \mathcal{M})$ となる. 記号 ^ は Pontrjagin dual を表すものとし, F_0 の自明でない加法的指標 Ω でその conductor が $\mathscr{P}_0$ であるものを固定する. このとき次が成立する.

命題 3.5.1 ([7] 定理 4.12, 命題 4.13). (a) 任意の $n, m > 0$ に対して P_n は P の正規部分群で, 交換子群 (P_n, P_m) は P_{n+m} に含まれる.

(b) $2n \geq m \geq n > 0$ のとき有限アーベル群の同型 $P_n/P_m \simeq \mathfrak{a}_n^-/\mathfrak{a}_m^-$ が写像 $x \mapsto x - 1$ から誘導される.

(c) $2n \geq m \geq n > 0$ のとき有限アーベル群の同型 $\mu : \mathfrak{a}_{1-m}^-/\mathfrak{a}_{1-n}^- \simeq (P_n/P_m)^\wedge$ が

$$\mu(b + \mathfrak{a}_{1-n})(p \cdot P_m) = \Omega(\mathrm{tr}_0(b(p-1)))$$

により得られる.

4 Statement of the existence of fundamental strata

4.1. 古典群の fundamental strata は次のように定義される.

定義 4.1.1 ([5]). 次のいずれかの組を stratum と呼ぶ.

(a) 組 $((\mathcal{L}, \mathcal{M}), n, \psi_b)$ で $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ が C-chain, n が自然数で, ψ_b が可換群 P_{2n}/P_{2n+1} の指標であるもの. ここで ψ_b は命題 3.5.1 の同型により剰余類 $b + \mathfrak{a}_{1-2n}^-$ に対応するものとする.

(b) 組 $((\mathcal{L}, \mathcal{M}), \psi)$ (または $((\mathcal{L}, \mathcal{M}), 0, \psi)$) で $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ が C-chain, ψ が有限群 $P_0/P_1 = \overline{P}$ の identity component $(P_0/P_1)^0 = \overline{P}^0$ の既約表現であるもの.

$n/e(\mathcal{L})$ または 0 を stratum の level と呼ぶ.

定義 4.1.2 ([5]). stratum が次の条件をみたすとき fundamental であるという.

(a) level が正の場合: 対応する剰余類 $b + \mathfrak{a}_{1-2n}$ は巾零元を含まない.

(b) level が零の場合: 既約表現 ψ は剰余体上の連結代数群の smooth 表現として cuspidal である.

4.2. G の既約許容表現 π が stratum $((\mathcal{L},\mathcal{M}),n,\psi_b)$ (または $((\mathcal{L},\mathcal{M}),0,\psi)$) を含むとは, π の P_{2n} への制限 $\pi|_{P_{2n}}$ が ψ_b を含むことをいう. π を G の既約許容表現, $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ を C-chain とするとき, π に含まれる stratum $((\mathcal{L},\mathcal{M}),n,\psi_b)$ (または $((\mathcal{L},\mathcal{M}),0,\psi)$) が存在するような n のうち最小のものを $f=f((\mathcal{L},\mathcal{M}),\pi)$ で表す.

任意の既約許容表現 π と C-chain $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ に対して上で定めた f は有限である. 実際 π は smooth であるから, 十分大きな $n\geq 1$ に対して P_{2n} で固定される零でないベクトルを持つ. このとき π は stratum $((\mathcal{L},\mathcal{M}),n,1)$ を含み $f\leq n$ が従う.

この後の章では次の主張を示す.

定理 4.2.1. 形式 f は hermitian ramified でない (すなわち拡大 F/F_0 が不分岐である) と仮定する. このとき G の既約許容表現 π が level 0 の stratum を含まないならば, π に含まれる stratum の中で level が最小であるものは fundamental である.

π が level 0 の stratum を含む場合には, L. Morris が次を示した.

定理 4.2.2 ([7] 定理 8.9). G の既約許容表現 π が level 0 の stratum を含むと仮定する. このとき π に含まれる lavel 0 の stratum $((\mathcal{L},\mathcal{M}),\psi)$ のうち, $\mathcal{L}\cup\mathcal{M}$ の周期が最大のものは fundamental である.

従って f が hermitian ramified でない場合には fundamental strata の存在性

定理 4.2.3. f は hermitian ramified でないと仮定する. このとき f で定義された古典群 G の既約許容表現は fundamental stratum を含む.

が成立する.

5 Skew cosets and nilpotent cosets

5.1. $\Lambda=(\mathcal{L},\mathcal{M})$ を C-chain とする. この節では $\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ の剰余類について考察する. $\mathfrak{a}_{2j}$, $\mathfrak{a}_{2j+1}$ は σ-不変であったから, σ より $\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ 上の対合 $\overline{\sigma}$ が定まる.

剰余類 $X=x+\mathfrak{a}_{2i+1}\in\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ が対合 $\overline{\sigma}$ に関して skew であるとき, X は skew であるという. $\overline{\sigma}$ の定義から, X が skew であるための必要十分条件は $x+\sigma(x)\in\mathfrak{a}_{2j+1}$ となることである.

$(\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1})^-$ を $\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ の skew な剰余類全体のなす集合とする. [7] 補題 6.1 から次の補題が成り立つ.

補題 5.1.1. 写像

$$\begin{array}{rcl}\mathfrak{a}_{2j}^-/\mathfrak{a}_{2j+1}^- & \to & (\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1})^- \\ x+\mathfrak{a}_{2j+1}^- & \mapsto & x+\mathfrak{a}_{2j+1}\end{array}$$

は同型である.

5.2. 命題 3.4.1 (d) により, $\mathbf{F}_q$ 上の $\mathbf{Z}$-次数付き多元環

$$\bar{\mathfrak{a}} = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$$

が構成される.

剰余類 $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1} \in \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ が $\bar{\mathfrak{a}}$ の元として巾零であるとき, X は巾零であるという. X が巾零であるための必要十分条件は, $x^n \in \mathfrak{a}_{2nj+1}$ となる $n \geq 1$ が存在することである. [1] 補題 2.1 より, この条件は次のように言い換えられる.

命題 5.2.1. 剰余類 $x + \mathfrak{a}_{2j+1}$ が巾零であるための必要十分条件は, $x + \mathfrak{a}_{2j+1}$ が巾零元を含むことである.

5.3. $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1}$ を $\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ の剰余類とする. V の $\mathscr{O}$-lattice L に対して XL を XL で生成される lattice とする. 従って

$$XL = xL + \mathfrak{a}_{2j+1}L$$

である. また $X^0L = L$ とし, $n \geq 2$ についても帰納的に $X^nL = X(X^{n-1}L)$ と定める.

このとき $\mathfrak{a}_{2j+1} = \mathfrak{P}(\mathcal{L})^{j+1} + \mathfrak{P}(\mathcal{M})^{j+1}$ であることから, 次の補題が成立することが確かめられる.

補題 5.3.1. $\Lambda_i \supset L \supsetneq \Lambda_{i+1}$ を満足する lattice L に対して, $\Lambda_{i+2j} \supset XL \supset \Lambda_{i+2j+1}$ が成立する.

この補題を帰納的に用いれば, 巾零剰余類についての次の主張を得る.

補題 5.3.2. 剰余類 $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1} \in \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ は巾零であると仮定する. このとき任意の i に対して, 次の条件を満たす $r = r(i) \geq 0$ が一意に存在する.

(i) $0 \leq s < r(i)$ に対し $\Lambda_{i+2sj} \supset X^s\Lambda_i \supsetneq \Lambda_{i+2sj+1}$,

(ii) $X^r\Lambda_i = \Lambda_{i+2rj+1}$,

(iii) $s > r$ に対し $\Lambda_{i+2sj+1} \supset X^s\Lambda_i$.

更に $x^n \in \mathfrak{a}_{2nj+1}$ を満たす任意の $n \geq 1$ に対して, $n \geq r(i)$ である.

注意 5.3.1. 任意の i について条件 C(i) より $\Lambda_{2i+1} \supsetneq \Lambda_{2i+2}$ であったから, $r(2i+1) > 0$ である.

6 Quotients of C-filtrations

6.1. この章では, 半双線形形式 f は hermitian ramified でないと仮定する. 従って拡大 F/F_0 は不分岐であり, F の素元 ϖ は $\sigma_0(\varpi) = \varpi$ を満足するようにとれる.

C-chain $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$ に対し, $\mathbf{Z}$-次数付き $\mathbf{F}_q$-ベクトル空間 $\widetilde{\Lambda}$ を次のように定義する:

$$\widetilde{\Lambda} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \widetilde{\Lambda}_i, \ \widetilde{\Lambda}_i = \Lambda_i / \Lambda_{i+1}.$$

Λ の周期は $e(\Lambda) = 2e$ であることから, ϖ の積から同型 $T \in \mathrm{End}_{\mathbf{F}_q}(\widetilde{\Lambda})_{2e}$ が誘導され, この同型により $\mathbf{Z}/2e\mathbf{Z}$-次数付きベクトル空間

$$\overline{\Lambda} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}/2e\mathbf{Z}} \overline{\Lambda}_i$$

が構成される.

6.2. $\overline{\Lambda}$ 上に非退化な半双線形形式を定めよう. はじめに $\widetilde{\Lambda}$ 上に形式 $\widetilde{f}$ を定義する.

$\mathbf{Z}/2e\mathbf{Z}$ の完全代表系として $\{\, i \mid c+1-e \leq i \leq c+e \}$ を選ぶ. ここで $e(\Lambda) = 2e$ かつ $\Lambda_i^{\#} = \Lambda_{2c+1-i}$ であったことを注意しておく.

$c+1-e \leq i \leq c+e-1$ に対して, 写像 f_i を

$$\begin{aligned} f_i : \quad & \varpi^m \Lambda_i \times \varpi^n \Lambda_{-i+2c} \to \mathscr{O}/\mathscr{P} \ ; \\ & (\varpi^m x, \varpi^n y) \mapsto f(x,y) \pmod{\mathscr{P}} \end{aligned}$$

で定義する. このとき $\Lambda_{-i+2c} = \Lambda_{i+1}^{\#}$ であることから $f(\Lambda_i, \Lambda_{-i+2c}) \subset \mathscr{O}$ である.

$i = c+e$ について, 写像 f_{c+e} を

$$\begin{aligned} f_{c+e} : \quad & \varpi^m \Lambda_{c+e} \times \varpi^n \Lambda_{c+e} \to \mathscr{O}/\mathscr{P} \ ; \\ & (\varpi^m x, \varpi^n y) \mapsto \varpi^{-1} f(x,y) \pmod{\mathscr{P}} \end{aligned}$$

と定義する. $\Lambda_{c+e} = \varpi \Lambda_{c+e+1}^{\#}$ であるから f_{c+e} も矛盾無く定まる.

σ_0 から誘導される $\mathbf{F}_q = \mathscr{O}/\mathscr{P}$ 上の対合を $\overline{\sigma_0}$ で表す.

補題 6.2.1. (a) 任意の i に対して f_i は両変数について加法的で, 第 1 変数は $\overline{\sigma_0}$ に関して半線形, 第 2 変数は $\mathscr{O}$-線形である.

(b) $c+1-e \leq i \leq c+e-1$ に対して $f_i(x,y) = \varepsilon \overline{\sigma_0}(f_{-i+2c}(y,x))$, また $i = c+e$ に対しては $f_{c+e}(x,y) = \varepsilon \overline{\sigma_0}(f_{c+e}(y,x))$ が成立する.

(c) $c+1-e \leq i \leq c+e-1$ に対して f_i は非退化な形式

$$\varpi^m \Lambda_i / \varpi^m \Lambda_{i+1} \times \varpi^n \Lambda_{-i+2c} / \varpi^n \Lambda_{1-i+2c} \to \mathscr{O}/\mathscr{P}$$

を誘導する. 同様に f_{c+e} は非退化な形式

$$\varpi^m \Lambda_{c+e} / \varpi^m \Lambda_{c+e+1} \times \varpi^n \Lambda_{c+e} / \varpi^n \Lambda_{c+e+1} \to \mathscr{O}/\mathscr{P}$$

を誘導する.

証明　$\sigma_0(\varpi)=\varpi$ であることから (a), (b) は自明である.

(c). $c+1-e\le i\le c+e-1$ の場合について示す. 残りの場合も全く同様である. $\varpi^m x\in\varpi^m\Lambda_i$ が $f_i(\varpi^m x,\varpi^n\Lambda_{-i+2c})=\{0\}$ を満たすと仮定すれば $f(x,\Lambda_{-i+2c})=f(x,\Lambda_{i+1}^{\#})\subset\mathscr{P}$ となり, 双対 lattice の定義から $x\in\Lambda_{i+1}$ を得る. 第 2 変数についても同様の議論が成立するから f_i は非退化である. □

この補題から f_i を用いて $\widetilde{\Lambda}$ 上の $(\varepsilon,\overline{\sigma_0})$-半双線形形式 $\widetilde{f}$ が自然に定義できる.

最初の形式 f は ϖ と可換であるから $\widetilde{f}$ は $\overline{\Lambda}$ 上の非退化 $(\varepsilon,\overline{\sigma_0})$-半双線形形式 $\overline{f}$ を誘導する. 更に $\overline{f}$ は次の条件を満足する:

$$i+j\not\equiv 2c \pmod{2e} \quad \text{ならば} \quad \overline{f}(\overline{\Lambda}_i,\overline{\Lambda}_j)\equiv 0. \tag{6.2.1}$$

この条件より $\overline{\Lambda}$ 上の巾零かつ skew な斉次準同型から, 第 2 章の結果を用いて $\overline{\Lambda}$ の斉次 weight 空間を構成することができる.

6.3. この節では $\overline{\Lambda}$ 上の巾零かつ skew な斉次準同型と, 巾零かつ skew な剰余類との対応をみる. 剰余類 $X=x+\mathfrak{a}_{2j+1}\in\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ に対して $\widetilde{\phi}_{2j}(X)\in\mathrm{End}_{\mathbf{F}_q}(\widetilde{\Lambda})_{2j}$ が

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_{2j}(X)\ :\ & \Lambda_i/\Lambda_{i+1}\to\Lambda_{i+2j}/\Lambda_{i+2j+1}\ ;\\ & v_i+\Lambda_{i+1}\mapsto xv_i+\Lambda_{i+2j+1}\end{aligned}$$

によって定まる.

X は ϖ と可換であるから, $\widetilde{\phi}_{2j}(X)$ は写像 $\overline{\phi}_{2j}(X)\in\mathrm{End}_{\mathbf{F}_q}(\overline{\Lambda})_{2j}$ を誘導する. [2] 命題 2.4 より写像

$$\overline{\phi}_{2j}:\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}\to\mathrm{End}_{\mathbf{F}_q}(\overline{\Lambda})_{2j}$$

は同型である. 更に次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}\times\mathfrak{a}_{2k}/\mathfrak{a}_{2k+1} & \longrightarrow & \mathfrak{a}_{2(j+k)}/\mathfrak{a}_{2(j+k)+1}\\ \overline{\phi}_{2j}\times\overline{\phi}_{2k}\big\downarrow & & \overline{\phi}_{2(j+k)}\big\downarrow\\ \mathrm{End}_{\mathbf{F}_q}(\overline{\Lambda})_{2j}\times\mathrm{End}_{\mathbf{F}_q}(\overline{\Lambda})_{2k} & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbf{F}_q}(\overline{\Lambda})_{2(j+k)}\end{array}$$

ただし右向きの矢印はそれぞれの積による写像である. これより次の主張を得る.

命題 6.3.1. 剰余類 $X=x+\mathfrak{a}_{2j+1}\in\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ が巾零であることと $\overline{\phi}_{2j}(X)\in\mathrm{End}_{\mathbf{F}_q}(\overline{\Lambda})_{2j}$ が巾零であることは同値である.

次に skew な剰余類との関連をみよう. 形式 $\overline{f}$ により定まる $\mathrm{End}_{\mathbf{F}_q}(\overline{\Lambda})$ 上の対合を $\overline{\sigma_{\overline{f}}}$ で表す. 形式 $\overline{f}$ は f から構成されたものであったから, 任意の $X=x+\mathfrak{a}_{2j+1}\in\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ に対して

$$\overline{\phi}_{2j}(\overline{\sigma}(X))=\overline{\sigma_{\overline{f}}}(\overline{\phi}_{2j}(X))$$

が成立することが確かめられる.

命題 6.3.2. $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1} \in \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ が skew であることは, $\overline{\phi}_{2j}(X)$ が $\overline{f}$ に関して skew であることと同値である.

7 C-filtrations associated to nilpotent cosets

7.1. この章では次の定理の証明を与える.

定理 7.1.1. f は hermitian ramified でないと仮定する. $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$ を C-chain とし, $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1}$ を $\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$ の巾零かつ skew な剰余類とする. このとき C-chain $\Lambda' = (\mathcal{L}', \mathcal{M}')$ と整数 j' で次の条件を満たすものが存在する.

(a) $X \subset \mathfrak{a}_{2j'}(\Lambda')$.

(b) $j'/e(\mathcal{L}') > j/e(\mathcal{L})$.

$e = e(\mathcal{L})$ とおく. 先の結果から X は $\overline{\Lambda} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}/2e\mathbf{Z}} \overline{\Lambda}_i$ 上に斉次, 巾零, skew に作用し, 第 2 章の結果を適用して $\overline{\Lambda}$ の斉次 weight 空間を構成できる.

7.2. $\mathcal{N} = \{X^a \Lambda_i \mid i \in \mathbf{Z}, a \geq 0\}$ とすれば補題 5.3.2 から

$$\mathcal{N} = \{\ X^a \Lambda_i \mid i \in \mathbf{Z}, 0 \leq a < r(i)\ \}$$

かつ $\Lambda_{i+2aj} \supset X^a \Lambda_i \supsetneq \Lambda_{i+2aj+1}$ を得る. 従って $\mathcal{N}$ は包含関係に関して全順序集合となり, 特に lattice chain である.

$\mathcal{N}$ の lattice N に対し, $0 \leq k < l \leq e(\mathcal{N})$ なる k, l と整数 n が存在して $X^k N = \varpi^n X^l N$ を満たす. 従って $N_0 \in \mathcal{N}$ と $0 < e' \leq e(\mathcal{N})$ で

$$X^k N_0 \not\equiv X^l N_0 \pmod{\varpi},\ 0 \leq k < l \leq e' - 1$$

かつ $X^{e'} N_0 = \varpi^n N_0$ を満たすものが存在する. このとき

$$\mathcal{N}' = \{\ \varpi^m X^a N_0 \mid m \in \mathbf{Z},\ 0 \leq a \leq e' - 1\} \tag{7.2.1}$$

は周期 e' の lattice chain で, X は $\mathcal{N}'$ 上に全単射で作用する.

7.3. $\mathcal{N}'$ から C-chain を構成しよう. 2.3. 節と同様に λ_i を $\overline{\Lambda}_i = \overline{\Lambda}_i(\lambda_i)$ を満たす最大の weight とする.

N を $\mathcal{N}'$ の lattice とする. $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ であったから, N はある $i \in \mathbf{Z}$ と $0 \leq a < r(i)$ に対して $N = X^a \Lambda_i$ と表せ, 従って $\Lambda_{i+2aj} \supset X^a \Lambda_i \supsetneq \Lambda_{i+2aj+1}$ を満たす. V の $\mathcal{O}$-lattice $l(N)$ を写像

$$\Lambda_{i+2aj} \to \Lambda_{i+2aj}/\Lambda_{i+2aj+1} = \widetilde{\Lambda}_{i+2aj} \simeq \overline{\Lambda}_{i+2aj} \neq 0$$

による $\overline{\Lambda}_{i+2aj}(\lambda_i + 2a)$ の逆像として定義する. 従って $\Lambda_{i+2aj} \supset l(N) \supset N \supsetneq \Lambda_{i+2aj+1}$ が成立する. 補題 2.3.1 より $l(N)$ は $N = X^a \Lambda_i$ の表示の仕方に依らずに決まる.

$\mathcal{L}' = \{\, l(N) \mid N \in \mathcal{N}_3 \}$ と定めれば, 各 $l(N)$ には $\overline{\Lambda}$ の斉次 weight 空間が対応する. 同じ次数をもつ weight 空間は包含関係に関し全順序であったから, $\mathcal{L}'$ も全順序集合となり, 明らかに写像 $l : \mathcal{N}' \to \mathcal{L}'$ は ϖ の積と可換であるから, $\mathcal{L}'$ は lattice chain となる.

命題 7.3.1. 写像 l ; $\mathcal{N}' \to \mathcal{L}'$ は全単射である. 特に $e(\mathcal{L}') = e(\mathcal{N}') = e'$.

証明　単射であることのみを示せば十分である. $N = X^a\Lambda_i \in \mathcal{N}'$ かつ $0 \leq a < r(i)$ とすれば $\Lambda_{i+2aj} \supset l(N) \supset N \supsetneq \Lambda_{i+2aj+1}$ である. このとき

$$\Lambda_{i+2(r(i)-1)j} \supset X^{r(i)-1-a}l(N) \supset X^{r(i)-1}\Lambda_i \supsetneq \Lambda_{i+2(r(i)-1)j+1}$$

であるから

$$\Lambda_{i+2r(i)j} \supset X^{r(i)-a}l(N) \supset X^{r(i)}\Lambda_i = \Lambda_{i+2(r(i)j+1}$$

を得る. $X^{r(i)-a}l(N)$ の $\overline{\Lambda}_{i+2r(i)j}$ での像は $\overline{X}^{r(i)-a} \cdot \overline{\Lambda}_{i+2aj}(\lambda_i + 2a)$ で, これは補題 2.3.1 より零であるから $X^{r(i)-a}l(N) = \Lambda_{i+2r(i)j+1}$ を得る. 従って $X^k l(N) \subset \Lambda_{i+2(a+k)j+1}$ を満たす最小の k が $r(i) - a$ である.

よって $N' = X^{a'}\Lambda_{i'} \in \mathcal{N}'$ $(0 \leq a' < r(i'))$ に対し $l(N) = l(N')$ であるとすれば, $i + 2aj = i' + 2a'j$ かつ $r(i) - a = r(i') - a'$, 従って $X^{r(i)-a}N = \Lambda_{i+2r(i)j+1} = \Lambda_{i'+2r(i')j+1} = X^{r(i)-a}N'$ が成立する. X は $\mathcal{N}'$ 上に全単射で作用するから $N = N'$ となる. □

7.4. $\mathcal{M}' = \mathcal{L}'^{\#}$ を $\mathcal{L}'$ の双対 lattice chain とする. $L \in \mathcal{L}'$ はある i に対して $\Lambda_i \supset L \supsetneq \Lambda_{i+1}$ で, $\overline{\Lambda}_i$ の斉次 weight 空間 $\overline{\Lambda}_i(\lambda)$ の逆像として定義される. このとき $\Lambda_{2c-i} \supsetneq L^{\#} \supset \Lambda_{2c+1-i}$ は $\overline{\Lambda}_{2c-i}$ の部分空間 $\overline{\Lambda}_i(\lambda)^{\perp}$ の逆像であることが確かめられる. ここで $^{\perp}$ は $\overline{\Lambda}$ 上の形式 $\overline{f}$ に関する斉次直交補空間を意味する. 補題 2.3.2 から $\overline{\Lambda}_i(\lambda)^{\perp} = \overline{\Lambda}_{2c-i}(1-\lambda)$, 従って $L \in \mathcal{L}'$ に対して, その双対 lattice $L^{\#}$ も斉次 weight 空間の逆像として与えられる.

任意の i に対して $\overline{\Lambda}_i$ の weight 空間は包含関係について全順序であったから, $\mathcal{L}' \cup \mathcal{M}'$ も包含関係に関して全順序で lattice chain となる.

7.5. 写像 $I : \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L}'$ を $l(N) \in \mathcal{L}'$ に対して

$$I(l(N)) = l(XN)$$

で定義する. 写像 $X : \mathcal{N}' \to \mathcal{N}'$, $l : \mathcal{N}' \to \mathcal{L}'$ はどちらも全単射であるから, I も全単射である. 次の補題は定義から明らかである.

補題 7.5.1. $N = X^a\Lambda_i \in \mathcal{N}'(0 \leq a < r(i))$ かつ $L = l(N) \in \mathcal{L}'$ とする. このとき $\Lambda_{i+2aj} \supset L \supsetneq \Lambda_{i+2aj+1}$ である. 更に $a < r(i) - 1$ ならば

$$\Lambda_{i+2(a+1)j} \supset IL \supsetneq \Lambda_{i+2(a+1)j+1}$$

が成立し, $a = r(i) - 1$ のときは

$$IL = XN = X^{a+1}N = \Lambda_{i+2(a+1)j+1}$$

となる.

補題 7.5.2. 任意の $L \in \mathcal{L}'$ に対し $IL \supset XL$.

証明　$L = l(N) \in \mathcal{L}'$ ($N = X^a\Lambda_i \in \mathcal{N}'$, $0 \leq a < r(i)$ とする. このとき $\Lambda_{i+2aj} \supset L \supset N \supsetneq \Lambda_{i+aj+1}$ で, L は weight 空間 $\overline{\Lambda}_{i+aj}(\lambda_i + 2a)$ の逆像として定義され, $\Lambda_{i+2(a+1)j} \supset XL \supset \Lambda_{i+2(a+1)j+1}$ が成立する.

(I) $a = r(i) - 1$ の場合: $XN = \Lambda_{i+2r(i)j+1}$ であるから $IL = l(XN) = XN$ を得る. また $XN = X^{r(i)}\Lambda_i = \Lambda_{i+2r(i)j+1}$ は $\overline{X}^{r(i)} \cdot \overline{\Lambda}_i = 0$ を意味する. 従って補題 2.3.1 より

$$0 = \overline{\Lambda}_{i+2r(i)j}(\lambda_i + 2r(i)j) \supset \overline{X} \cdot \overline{\Lambda}_{i+2(r(i)-1)j}(\lambda_i + 2(r(i) - 1))$$

であるから $XL = IL = \Lambda_{i+2r(i)j+1}$.

(II) $a < r(i) - 1$ の場合: このとき $\Lambda_{i+2(a+1)j} \supset IL \supset XN \supsetneq \Lambda_{i+2(a+1)j+1}$ となる. IL は斉次 weight 空間 $\overline{\Lambda}_{i+2(a+1)j}(\lambda_i + 2(a+1)) \supset \overline{X} \cdot \overline{\Lambda}_{i+2a}(\lambda_i + 2a)$ の逆像として定義された. ここで $\overline{X} \cdot \overline{\Lambda}_{i+2a}(\lambda_i + 2a)$ は XL の $\overline{\Lambda}_{i+2aj}$ での像であるから, $IL \supset XL$ が従う. □

補題 7.5.3. 任意の $L \in \mathcal{L}'$ に対して, IL は XL を含む $\mathcal{L}' \cup \mathcal{M}'$ の lattice で最小のものである.

証明　$L = l(N)$; $N \in \mathcal{N}'$ に対して, 補題 7.5.2 より $IL \supset XL \supset XN$ が従う. $\mathcal{L}' \cup \mathcal{M}'$ の lattice には $\overline{\Lambda}$ の斉次 weight 空間が対応している. 従って補題 2.3.1 から $IL = l(XN)$ は XN を含む $\mathcal{L}' \cup \mathcal{M}'$ の lattice のうち最小のものである. 主張はこれより明らか. □

7.6. 写像 I は $\mathcal{L}'$ の包含関係を保存する. すなわち次の主張が成立する.

補題 7.6.1. $L, L' \in \mathcal{L}'$ が $L \supset L'$ を満たすならば, $IL \supset IL'$ である.

証明　補題 7.5.2 と仮定から $IL \supset XL \supset XL'$ が従う. 補題 7.5.3 より IL' は XL' を含む $\mathcal{L}'$ の lattice で最小のものであるから, 主張が従う. □

$\mathcal{L}' = \{L'_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ とする. 写像 I は $\mathcal{L}'$ の包含関係を保つ全単射であるから, ある j' が存在して, 任意の i に対し $IL'_i = L'_{i+j'}$ が成立する. $\mathcal{L}'$ の周期性と $e' = e(\mathcal{L}')$ より, j' は次の式で与えられる.

$$I^{e'}L = \varpi^{j'}L, \ L \in \mathcal{L}'. \tag{7.6.1}$$

補題 7.5.3 より $X \subset \mathfrak{P}(\mathcal{L}')^{j'}$ が得られ, $\sigma(X) = -X$ かつ $\sigma(\mathfrak{P}(\mathcal{L})^{j'}) = \mathfrak{P}(\mathcal{M})^{j'}$ と合わせて

$$X \subset \mathfrak{P}(\mathcal{L}')^{j'} \cap \mathfrak{P}(\mathcal{M}')^{j'} \tag{7.6.2}$$

が従う. これより ($(\mathcal{L}', \mathcal{M}')$ が C-chain であれば) 条件 (a) が成立する.

7.7. 条件 (b) が成立することを示す. $\mathcal{L}' = l(\mathcal{N}')$ と 7.2.1 から

$$\mathcal{L}' = \{\ \varpi^m I^a l(N_0) \mid m \in \mathbf{Z}, 0 \leq a < e'\ \}$$

で, e' は $\mathcal{L}'$ の周期であったから e', j' は互いに素である.

$\mathcal{N}'$ は X の作用で閉じているから $N = X^a \Lambda_i \in \mathcal{N}'$ で $a = r(i) - 1$ を満たすものが存在する. このとき $\Lambda_{i+2aj} \supset l(N) \supset N \supsetneq \Lambda_{i+2aj+1}$ で, 補題 7.5.1 より $I(l(N)) = l(XN) = \Lambda_{i+2(a+1)j+1}$, 従って $\Lambda_{i+2(a+e')j+1} \supset I^{e'}(l(N))$ が成立する. よって, 包含関係 $\Lambda_{i+2(a+e')j+1} \supset I^{e'}(l(N)) = \varpi^{j'} l(N) \supsetneq \varpi^{j'} \Lambda_{i+2aj+1} = \Lambda_{i+2aj+2ej'+1}$ を得, これより

$$j'/e' > j/e$$

が確かめられる.

7.8. 後は $(\mathcal{L}', \mathcal{M}')$ が C-chain であることを示せば定理 7.1.1 の証明は完了する. 写像 $I^{\#} : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}'$; $M \mapsto I^{\#} M$ を

$$I^{\#} M = (I^{-1} M^{\#})^{\#}$$

で定義する. $L'_i \in \mathcal{L}'$ に対して $IL'_i = L'_{i+j'}$ であったから, $M'_i \in \mathcal{M}' = \{M'_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ についても $I^{\#} M'_i = M'_{i+j'}$ が成立する. 特に $I^{\#}$ は $\mathcal{M}'$ の包含関係を保ち, $I^{e'} = \varpi^{j'}$ より $(I^{\#})^{e'} = \varpi^{j'}$ となる.

補題 7.8.1. $L \in \mathcal{L}', M \in \mathcal{M}'$ が $M \supset L$ を満たすならば $I^{\#} M \supset IL$ である.

証明　写像 $I^{\#} : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}'$ は次数 j' の平行移動であった. これと $X \subset \mathfrak{P}(\mathcal{M})^{j'}$ より, $M \in \mathcal{M}'$ に対して $I^{\#} M \supset XM$ が成立する. 従って仮定から $I^{\#} M \supset XM \supset XL$ が得られ, 補題 7.5.3 より $I^{\#} M \supset IL$ となる. □

命題 7.8.2. $L \in \mathcal{L}', M \in \mathcal{M}'$ に対し, $L \supsetneq M$ が $\mathcal{L}' \cup \mathcal{M}'$ の隣り合う lattice (すなわち L と M の間には $\mathcal{L}' \cup \mathcal{M}'$ の他の lattice は存在しない) であると仮定する. このとき, 任意の $n \in \mathbf{Z}$ について $I^n L \supsetneq I^{\#^n} M$ も $\mathcal{L}' \cup \mathcal{M}'$ の隣り合う lattice である.

証明　$I^{e'} = \varpi^{j'}$ かつ $(I^{\#})^{e'} = \varpi^{j'}$ であったから $0 \leq n \leq e' - 1$ の場合について証明すれば十分である.

ある $0 \leq n \leq e' - 1$ に対して $(I^{\#})^n M \supset I^n L$ であると仮定しよう. このとき補題 7.8.1 より $(I^{\#})^{e'} M \supset I^{e'} L$ であるから仮定に反する. 従って, 任意の $0 \leq n \leq e' - 1$ に対して $I^n L \supsetneq (I^{\#})^n M$ が成立する.

$I^n L \supsetneq L' \supsetneq (I^{\#})^n M$ を満たす $\mathcal{L}'$ の lattice L' が存在すると仮定する. このとき補題 7.6.1 と先の議論により $I^{e'} L \supsetneq I^{e'-n} L' \supsetneq (I^{\#})^{e'} M$ が得られる. これはすなわち $\varpi^{j'} L \supsetneq I^{e'-n} L' \supsetneq \varpi^{j'} M$ であるから仮定に反している. 同様にして, $I^n L \supsetneq (I^{\#})^n M$ の間に $\mathcal{M}'$ の lattice が存在するときも矛盾が導かれ, 主張を得る. □

$(\mathcal{L}', \mathcal{M}')$ が C-chain であることを示そう．$\mathcal{L}' \cup \mathcal{M}'$ の隣り合う lattice $L \supsetneq M$ で $L \in \mathcal{L}'$ かつ $M \in \mathcal{M}'$ となるものを固定する．これらに対して番号付け $\mathcal{L}' = \{L'_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$, $\mathcal{M}' = \{M'_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ を

$$L'_0 = L \supsetneq M'_1 = M$$

を満たすようにとる．このとき e' と j' は互いに素であったから，任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して整数 s, t で $n = se' + tj'$ を満たすものが存在する．命題 7.8.2 より $L'_n = \varpi^s I^t L'_0 \supsetneq \varpi^s (I^{\#})^t M'_1 = M'_{n+1}$ は $\mathcal{L}' \cup \mathcal{M}'$ の隣り合う lattice であるから，任意の n について

$$L'_n \supsetneq M'_{n+1} \supset L'_{n+1} \supsetneq M'_{n+2}$$

が成立する．したがって $(\mathcal{L}', \mathcal{M}')$ は C-chain である．

8 Proof of existence of fundamental strata

8.1. 定理 4.2.1 を証明しよう．既約許容表現 π は level 0 の stratum を含まないと仮定する．このとき $((\mathcal{L}, \mathcal{M}), n, \psi_b)$ を π に含まれる level 最小の stratum とすると，仮定から $n \geq 1$ である．この stratum が fundamental でないと仮定して，矛盾を導こう．$e = e(\mathcal{L})$ とすれば仮定から剰余類 $b + \mathfrak{a}_{1-2n}$ は skew かつ巾零である．従って定理 7.1.1 から C-chain $\Lambda' = (\mathcal{L}', \mathcal{M}')$ と整数 j' で

$$b + \mathfrak{a}_{1-2n} \subset \mathfrak{a}'_{2j'} = \mathfrak{a}_{2j'}(\Lambda') \tag{8.1.1}$$

かつ

$$j'/e' > -n/e \tag{8.1.2}$$

を満たすものが存在する．ここで $e' = e(\mathcal{L}')$ である．

(8.1.1) より特に $\mathfrak{a}_{1-2n} \subset \mathfrak{a}'_{2j'}$ であり，双対性から $\mathfrak{a}_{2n} \supset \mathfrak{a}'_{1-2j'}$ を得る．ここで $n' = -j'$ と置けば，$\mathfrak{a}_{2n} \supset \mathfrak{a}'_{2n'+1}$ と $n \geq 1$ から $n' \geq 0$ を得る．実際 $n' < 0$ ならば $2n'+1 < 0$ であるから $1 \in \mathfrak{a}'_0 \subset \mathfrak{a}'_{2n'+1}$ となり $1 \notin \mathfrak{a}_{2n}$ に反する．従って，部分群の包含関係 $P_{2n} \supset P'_{2n'+1} = G \cap (1 + \mathfrak{a}'_{2n'+1})$ が成立する．

任意の $p \in P_{2n}$ に対して $\psi_b(p)$ は

$$\psi_b(p) = \Omega(\mathrm{tr}(b(p-1)))$$

で与えられ，(8.1.1) より $b \in \mathfrak{a}'_{2j'}$ であるから写像 $\Omega(\mathrm{tr}(b_)) : \mathfrak{a}_{2n} \longrightarrow F\ ;\ x \mapsto \Omega(\mathrm{tr}(bx))$ は $(\mathfrak{a}'_{2j'})^* = \mathfrak{a}'_{2n'+1}$ 上自明である．従って $\psi_b(P'_{2n'+1}) = \{1\}$ となり，π は $P'_{2n'+1}$ によって固定される零でないベクトルを持ち，特に level n'/e' の stratum を含む．

このとき (8.1.2) から

$$n'/e' = -j'/e' < n/e$$

となり level n/e の最小性に矛盾する．

9 Basic properties of fundamental strata

9.1. G の既約許容表現 π に含まれる 2 つの strata に関して考察する. この章の結果は f が hermitian ramified である場合についても成立する. まず, 定理 7.1.1 の逆が成立する.

命題 9.1.1 ([1] 注意 2.9). $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$ を C-chain, $x \in \mathfrak{a}_{2j}$ とする. C-chain $\Lambda' = (\mathcal{L}', \mathcal{M}')$ と $j' \in \mathbf{Z}$ で次の条件を満たすものが存在するとき, $x + \mathfrak{a}_{2j+1}$ は巾零元を含む.

(i) $x \in \mathfrak{a}'_{2j'} = \mathfrak{a}_{2j'}(\Lambda')$,

(ii) $j/e(\mathcal{L}) < j'/e(\mathcal{L}')$.

証明 $e = e(\mathcal{L}), e' = e(\mathcal{L}')$ とする. 仮定より $y = \varpi^{-j}x^e \in \mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{a}'_1$ を得る. $\mathfrak{a}_0$ は lattice chain $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ から定まる hereditary order で, $\mathfrak{a}'_1$ は $\mathfrak{a}'_0$ の Jacobson 根基であるから y の固有多項式 $f(t)$ は $\mathscr{O}$-係数で, modulo $\mathscr{P}$ で $t^N (N = \dim V)$ に合同である. 従って $y^N \in \varpi\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1$, $x^{eN} \in \varpi^{jN}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_{2eNj+1}$ となり命題 5.2.1 から主張が従う. □

9.2. [3] 定理 4.1 と同様に次の結果が成立する.

命題 9.2.1. π を G の既約許容表現とする. Λ, Λ' を C-chain, k, k' を自然数とする. P_k, $P_{k'}$ でそれぞれ Λ, Λ' から定まる G の部分群を表す. このとき, $\pi|_{P_k}$ が $b + \mathfrak{a}^-_{1-k} \in \mathfrak{a}^-_{-k}/\mathfrak{a}^-_{1-k}$ に対応する指標 $\psi_b \in (P_k/P_{k+1})^\wedge$ を含み, $\pi|_{P'_{k'}}$ が $b' + (\mathfrak{a}'_{1-k'})^- \in (\mathfrak{a}'_{-k})^-/(\mathfrak{a}'_{1-k'})^-$ に対応する指標 $\psi_{b'} \in (P'_{k'}/P'_{k'+1})^\wedge$ を含むならば, $g \in G$ が存在して

$$(b + \mathfrak{a}^-_{1-k}) \cap g(b' + (\mathfrak{a}'_{1-k'})^-)g^{-1} \neq \phi$$

を満たす.

従って次の結果を得る.

系 9.2.2. G の既約許容表現 π に含まれる 2 つの fundamental strata の level は等しい.

参考文献

[1] C. J. Bushnell, *Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of GL_N*, J. Reine Angew. Math. **375/376** (1987), 184–210.

[2] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, *Semisimple types in GL_n*, Compositio Math. **119** (1999), no. 1, 53–97.

[3] R. Howe and A. Moy, *Minimal K-types for GL_n over a p-adic field*, Astérisque **171-172** (1989), 257–273, Orbites unipotentes et représentations, II.

[4] K. Kariyama, *On filtrations of parahoric subgroups of split classical groups, preprint.*

[5] K. Kariyama and M. Miyauchi, *Split and non-split fundamental strata for split classical groups, preprint.*

[6] M. Miyauchi, *Fundamental strata for classical groups, preprint*, 2001.

[7] L. Morris, *Fundamental G-strata for classical groups*, Duke Math. J. **64** (1991), 501–553.

[8] ———, *Tamely ramified supercuspidal representations of classical groups. I. Filtrations*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **24** (1991), 705–738.

[9] S. Stevens, *Double coset decompositions and intertwining, preprint*, 1999.