

Intersection numbers of twisted cycles and the correlation functions of the conformal field theory II

三町勝久 (東工大・理)
吉田正章 (九大・数理)

物理的に意味のある相関関数 $G(z, \bar{z})$ を考えようとしたとき, 共形場理論では

$$G(z, \bar{z}) = \sum X_{ij} I_i(z) \overline{I_j(z)}, \quad (1)$$

という分解が成立するので, $G(z, \bar{z})$ を調べるためには, まず, $I_i(z)$ を調べ, 次に (1) の 2 次形式を組み上げるという基本方針がとられる. ここで, $I_i(z)$ は, Virasoro 代数 (共形場の対称性) の表現を用いて導かれる複素解析的微分方程式の解であり, 一般には多価正則関数である. ところが, 物理的に意味のある関数は一価関数であるという物理学からの自然な要請を考えれば, 相関関数 $G(z, \bar{z})$ はもちろん一価関数でなければならない. この事情が, 係数 X_{ij} の取りうる値に強い制限を与える. そして, このことから, 係数 X_{ij} が原理的に決定出来, 実際に, 幾つかの場合には, 具体的に計算しきれるだろうというのが, 共形場理論における, 相関関数決定への基本戦略であった.

そして, Dotsenko-Fateev[DF1] は幾つかの場合に計算を実行し, 上の戦略が有効であることを示してみせた.

ところが, 計算を行ってみるとわかるのだが, 先程の制限により係数が決定できるかどうかということは, 厳密に考えると (というより, ちょっとまじめに考える程度でも) かなり怪しいものである. 計算を実行した Dotsenko-Fateev も, 正直に, 「この場合は, とりあえず, 矛盾無く係数が求まったようであるが, 状況を考えて, どうして矛盾無く求まったのか良くわからない. そして, それを明らかにする, 一般的な定理があるに違いない」という趣旨のことを述べている.

このような基本的な問題に対する解答のキーワードがねじれ係数 (背負った係数とも言う) のホモロジーに対する交差数であるというのが, 夏の研究会 (「新世紀への表現論と調和解析」代表・橋本隆司, 2001 年 7 月 24-27 日, 京大数理研) で話をさせてもらったことである.

1 交差数

ここで, 交差数の定義などを確認しておく [KY1][Y1].

いま, l_j を $t = (t_1, \dots, t_r)$ に関する一次関数とし, H_j を $l_j = 0$ で与えられる超平面とすると, $u(t) = \prod_{j=0}^m l_j^{\alpha_j}$ (ただし $\sum_{j=0}^m \alpha_j = 0$) は $T = \mathbb{P}^r(\mathbb{C}) - \cup_j H_j$ における多価正則関数である. そして, ω を $du(t)/u(t)$ なる正則 1-form, ∇_ω と $\nabla_{-\omega}$ とをそ

それぞれ共変微分 $\nabla_\omega = d + \omega \wedge$ と $\nabla_{-\omega} = d - \omega \wedge$ とする。このとき、 $\mathcal{L}_\omega$ と $\mathcal{L}_{-\omega}$ とを T 上の局所定数層で、 $u(t)$ および $u(t)^{-1}$ で定義される正則函数からなるものとする。そして、 $H_p(T, \mathcal{L}_\omega)$ と $H_p^{lf}(T, \mathcal{L}_{-\omega})$ とを $\mathcal{L}_\omega$ 係数の p -次ねじれホモロジー群、 $\mathcal{L}_{-\omega}$ 係数の p -次局所有限ねじれホモロジー群とする。

さて、指数 α_j に関する適当な genericity を仮定すれば、Poincaré の双対性は非退化なペアリング

$$I : H_r(T, \mathcal{L}_\omega) \times H_r^{lf}(T, \mathcal{L}_{-\omega}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

ただし、

$$[\sum a_j \rho_j \otimes v_j] \cdot [\sum b_k \sigma_k \otimes v_k'^{-1}] = \sum_{j,k} \sum_{p \in \rho_j \cap \sigma_k} I_p(\rho_j, \sigma_k) v_j(p) v_k'^{-1}(p)$$

で定義されるものである。ここで、 ρ_j, σ_k は r -単体、 v_j は $u(t)$ の ρ_j におけるある分枝、 $v_k'^{-1}$ は $u(t)^{-1}$ の σ_k におけるある分枝、そして、 $I_p(\rho_j, \sigma_k)$ を通常の位相的な交差数とする。この I をねじれ係数ホモロジーの交差数という。ここで、 $H_p(T, \mathcal{L}_\omega)$ を定義する境界作用素 ∂_ω は $\partial_\omega : \rho \otimes u_\rho(t) \rightarrow \partial \rho \otimes u_\rho(t)|_{\partial \rho}$ により与えられる。ただし、 ∂ は通常の境界作用素であり、 $u_\rho(t)|_{\partial \rho}$ は $u_\rho(t)$ の $\partial \rho$ への制限とする。

いっぽう、自然な同型

$$H_p(T, \mathcal{L}_\omega) \longrightarrow H_p^{lf}(T, \mathcal{L}_\omega)$$

の逆写像として与えられる

$$\text{reg}_\omega : H_p^{lf}(T, \mathcal{L}_\omega) \longrightarrow H_p(T, \mathcal{L}_\omega)$$

をサイクルの正則化 (regularization) と呼ぶことにする。

このような了解のもとで、もっともやさしいが重要な例を、おさらいしておく。

2 2 次の場合

まず、指数を $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ として $T = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, z, \infty\}$ における多価正則函数 $u(t) = t^a(t-1)^b(t-z)^c$ を固定する。そして、 $u(t)$ によって決まる局所定数層を $\mathcal{L}_\omega$ とするなどは、前述の通りとする。このとき、局所有限ホモロジー $H_1^{lf}(T, \mathcal{L}_\omega)$ のランクは 2 であり、例えば、

$$C_1 = (1, \infty), \quad C_2 = (0, z)$$

という位相的な path に $u(t)$ の適当な分枝を載せたものは基底を与える。図 1 でもそうであるが、以下、便宜上 $0 < z < 1$ とする。

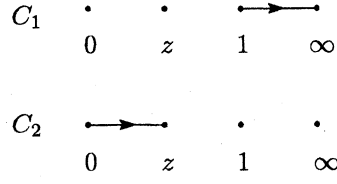


図 1

さて, $C_1, C_2 \in H_1^{lf}(M, \mathcal{L}_\omega)$ の正則化 $\text{reg}C_1, \text{reg}C_2 \in H_1(M, \mathcal{L}_\omega)$ は次で与えられる ([KY1][Y1] などでの流儀とは微妙に異なっていることに注意する). まず, $c_\alpha = \exp 2\pi\sqrt{-1}\alpha$ という略記号を用いて, $\text{reg}C_2$ は

$$\text{reg}C_2 = \frac{1}{c_a - 1} S_0^L + \overrightarrow{[\epsilon, z - \epsilon]} - \frac{1}{c_c - 1} S_z^R$$

である. 図 2 を見てもらいたい.

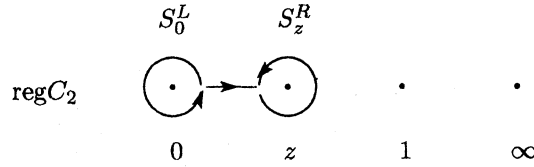


図 2

位相的な path に関しては, 中心 $t = 0$, 半径 $\epsilon > 0$ なる円周で $t = \epsilon$ を始点としてぐるりと左回りに一周して $t = \epsilon$ に戻るもの S_0^L , 閉区間 $[\epsilon, z - \epsilon]$ で右向きを正とするもの, そして, 中心 $t = z$, 半径 $\epsilon > 0$ なる円周で $t = z - \epsilon$ を始点としてぐるりと左回りに一周して $t = z - \epsilon$ に戻る S_z^R なる 3 つのパーツからなるものを用意する. そして, この位相的な path の上に $u(t)$ の分枝を載せるのであるが, $\overrightarrow{[\epsilon, z - \epsilon]}$ では, もともとの $C_2 = (0, z)$ に載っていた分枝をそのまま用い, S_0^L 上では, S_0^L の始点としての $t = \epsilon$ における $u(t)$ の分枝の値と, $\overrightarrow{[\epsilon, z - \epsilon]}$ の始点 $t = \epsilon$ における $u(t)$ の分枝の値が等しいように, $u(t)$ の分枝を載せる (上記の path に沿って自然に解析接続したものと言ってもよい). S_z^R 上に載せる $u(t)$ の分枝も同様で, S_z^R の始点における値と, $\overrightarrow{[\epsilon, z - \epsilon]}$ の終点における値が一致するように載せる.

このような係数付きのチェインがサイクルになっているのは, 境界作用素の定義からみて容易である.

また, $\text{reg}C_1$ についても全く同様に考えて,

$$\text{reg}C_1 = \frac{1}{c_b - 1} S_1^L + \overrightarrow{[1 + \epsilon, R]} - \frac{1}{c_{-a-b-c} - 1} S_0^L$$

とする. ただし, S_0^L は原点中心, 半径 $R > 1$, 始点・終点が $t = R$ なる方向付き円周であるが, これが無限遠点の近傍を囲む円周となっていることに注意しよう.

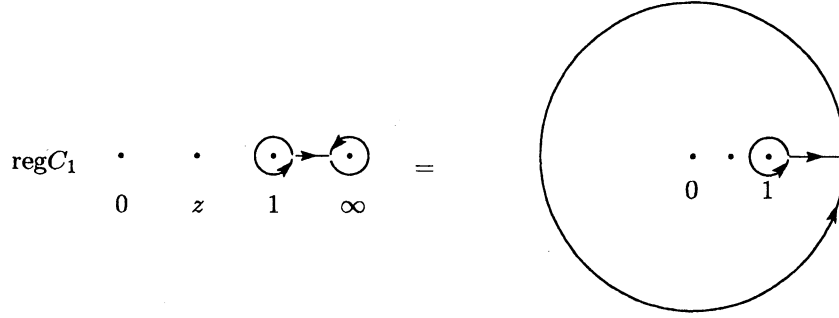


図 3

次に、位相的な path が $C_i \in H_1^{lf}(T, \mathcal{L}_\omega)$ と同じではあるが、 $u(t)^{-1}$ の分枝を載せたものを $C_i^\vee$ とすれば、この $C_1^\vee, C_2^\vee$ は $H_1^{lf}(T, \mathcal{L}_{-\omega})$ の基底である。

これらの準備のもとで交点数の計算をしてみると、結局は

$$\begin{aligned} Int &= \begin{pmatrix} \text{reg} C_1 \cdot C_1^\vee & \text{reg} C_1 \cdot C_2^\vee \\ \text{reg} C_2 \cdot C_1^\vee & \text{reg} C_2 \cdot C_2^\vee \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \begin{pmatrix} \frac{s(a+c)}{s(b)s(a+b+c)} & 0 \\ 0 & \frac{s(a+c)}{s(a)s(c)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。ただし、 $s(A) = \sin(\pi A)$ とした。

ところで、一般にサイクル C_i における積分で与えられる函数 $I_i(z)$ に対して、

$$F(z, \bar{z}) = (\bar{I}_1(z), \bar{I}_2(z)) H \begin{pmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \end{pmatrix}, \quad H = Int^{-1}$$

はモノドロミー不変な函数である (ここで、 $a, b, c \in \mathbb{R}$ より $\mathcal{L}_{-\omega} \simeq \bar{\mathcal{L}}_\omega$ であること、つまり、 $\mathcal{L}_{-\omega}$ の場合に出てくるモノドロミー行列 $M^\vee$ と $\bar{\mathcal{L}}_\omega$ の場合に出てくるモノドロミー行列 $\bar{M}$ とが等しいことに注意)。したがって、我々の場合は、

$$H = Int^{-1} = \frac{2}{\sqrt{-1}} \begin{pmatrix} \frac{s(b)s(a+b+c)}{s(a+c)} & 0 \\ 0 & \frac{s(a)s(c)}{s(a+c)} \end{pmatrix}$$

を用いれば、

$$I_1(z) = \int_1^\infty t^a (t-1)^b (t-z)^c dt,$$

$$I_2(z) = \int_0^z t^a (1-t)^b (z-t)^c dt$$

として

$$F(z, \bar{z}) = \frac{2s(a+c)}{\sqrt{-1}} \{s(b)s(a+b+c)|I_1(z)|^2 + s(a)s(c)|I_2(z)|^2\}.$$

がモノドロミー不変な函数であることがわかる.

この式は Dotsenko-Fateev[DF1] の (4.18) に他ならない.

以上は, 夏の研究会でも述べたことである.

3 3 次の場合

さて, 多重積分の場合に話を進めたい. 例として, 次のものを考える.

局所定数層 $\mathcal{L}_\omega$ を決める多価函数として, $u(t) = (t_1 - t_2)^g \prod_{i=1,2} t_i^a (t_i - 1)^b (t_i - z)^c$ を固定する. ただし,

$$a, b, c, g, 2a + g, 2b + g, 2c + g, a + b + c + g, 2a + 2b + 2c + g, 2a + 2b + 2c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

という仮定をおく.

函数 $I(z)$ を $C \in H_2^{lf}(T, \mathcal{L}_\omega)$ 上の積分

$$I(z) = \int_C \int_C (t_1 - t_2)^g \prod_{i=1,2} t_i^a (t_i - 1)^b (t_i - z)^c dt_1 dt_2,$$

で与えられるものとする, これは次のような 3 階の複素解析的微分方程式を満たす:

$$\begin{aligned} & z^2(z-1)^2 I''' + (K_1 z + K_2(z-1))z(z-1)I'' + (L_1 z^2 + L_2(z-1)^2 + L_3 z(z-1))I' \\ & + (M_1 z + M_2(z-1))I = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

ただし,

$$\begin{aligned} K_1 &= -g - 3b - 3c, & K_2 &= -g - 3a - 3c, \\ L_1 &= (b+c)(2b+2c+g+1), & L_2 &= (a+c)(2a+2c+g+1), \\ L_3 &= (b+c)(2a+2c+g+1) + (a+c)(2b+2c+g+1) \\ & + (c-1)(a+b+c) + (3c+g)(a+b+c+g+1), \\ M_1 &= -c(2b+2c+g+1)(2a+2b+2c+g+2), \\ M_2 &= -c(2a+2c+g+1)(2a+2b+2c+g+2). \end{aligned}$$

ここでも便宜上 $0 < z < 1$ としたとき、図4のような位相的なサイクル $C_i = C_i^{(1)} + C_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, 3$) を考える。そして、その上に $u(t)$ の適当な分枝を載せ、分枝の載っているものも同じ記号 C_i および $C_i^{(j)}$ で表すことにするが、それぞれの $C_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) に載っている $u(t)$ の分枝が $u(t)$ の各因子の argument がゼロになるよう固定する。この分枝の選び方は [KY1], [Y1] など採用されているものとは全く違うので注意が必要である。一重積分の場合には殆ど差が出てこないが、多重積分になると本質的に異なり、[KY1], [Y1] の流儀は以下の議論に適合しない（主役のサイクルは捉まらない）。

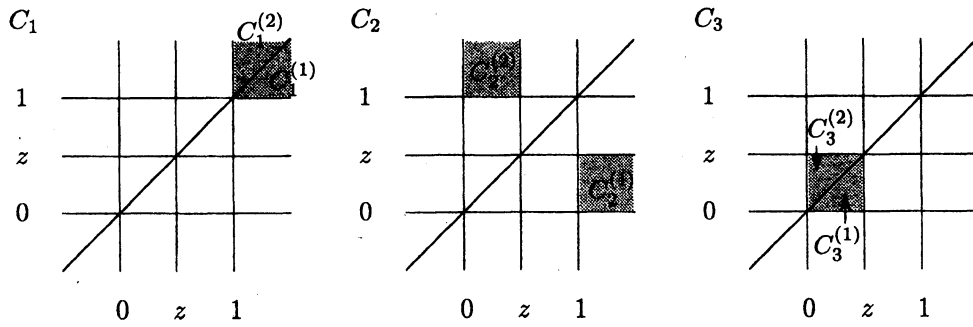


図 4

ここで詳しく分枝の選び方を積分レベルで確認しておく、たとえば、 $C_1^{(1)} \in H_2^{lf}(T, \mathcal{L}_\omega)$ における積分 $I_1^{(1)}(z)$ では、 t_i が実で $t_i > 0, t_i - 1 > 0, t_i - z > 0$ なるとき、 $\arg t_i = \arg(t_i - 1) = \arg(t_i - z) = 0$ 、 $t_2 - t_1 > 0$ なるとき $\arg(t_2 - t_1) = 0$ という分岐を用いて

$$I_1^{(1)}(z) = \int_1^\infty dt_2 \int_1^{t_2} dt_1 (t_2 - t_1)^g \prod_{i=1,2} t_i^a (t_i - 1)^b (t_i - z)^c$$

である。

そして、この場合の交差数を計算するには、一次元の場合とは異なって、特異点を解消する必要がでてくるなど、大変になるが、とにかくも次の結果を得る。

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{s(a+c)s(a+c+\frac{g}{2})}{s(b+\frac{g}{2})s(b)s(a+b+c+g)s(a+b+c+\frac{g}{2})2c(\frac{g}{2})} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{s(a+c+g)s(a+c)}{s(a)s(b)s(c)s(a+b+c+g)} \\ 0 \\ \frac{s(a+c+\frac{g}{2})s(a+c+g)}{s(a+\frac{g}{2})s(c+\frac{g}{2})s(a)s(c)2c(\frac{g}{2})} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 F(z, \bar{z}) &= (\overline{I_1(z)}, \overline{I_2(z)}, \overline{I_3(z)}) H \begin{pmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \\ I_3(z) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{2}{s(a+c)s(a+c+\frac{g}{2})s(a+c+g)} \\
 &\times \left[s(a+b+c+g)s(a+b+c+\frac{g}{2})s(a+c+g)s(b)s(b+\frac{g}{2})2c(\frac{g}{2}) \times |I_1(z)|^2 \right. \\
 &+ s(a+b+c+g)s(a+c+\frac{g}{2})s(a)s(b)s(c) \times |I_2(z)|^2 \\
 &\left. + s(a+\frac{g}{2})s(a)s(c+\frac{g}{2})s(c)s(a+c)2c(\frac{g}{2}) \times |I_3(z)|^2 \right] \quad (3)
 \end{aligned}$$

この (3) が実際に、モノドロミー不変であることは、 H が交差数により計算されることの他に、そもそも C_1, C_2, C_3 で張られる空間 $(H_2^{lf}(T, \mathcal{L}_\omega)$ の部分空間) が z への基本群 $\pi_1(C \setminus \{0, 1\})$ の作用で閉じていることを確かめねばならない。これが 2 次の場合と異なるやっかいな点のひとつである。しかし、この部分は、幸いなことに、昨年 の表現論シンポジウムで話したこと (のおまけの部分) を用いることによって、きっちり保証されることがわかる。

参考文献

- [BPZ] A.A.Belavin, A.M.Polyakov, and A.B.Zamolodchikov : Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, Nucl. Phys. **B241** (1984), 333-380.
- [De] P.Deligne : *Équations Différentielles à Points Singuliers Réguliers*, Lecture Notes in Math. **163**, Springer-Verlag, 1970.
- [DF1] VI.S.Dotsenko and V.A.Fateev : Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models, Nuclear Physics, **B240**[FS12] (1984), 312-348.
- [DF2] VI.S.Dotsenko and V.A.Fateev : Four-point correlation functions and operator algebra in 2D conformal invariant theories with central charge $C \leq 1$, *ibid.*, **B251**[FS13] (1985), 691-734.
- [HY] M.Hanamura and M.Yoshida : Hodge structure on twisted cohomologies and twisted Riemann inequalities I, Nagoya Math. Jour. **154** (1999), 123-139.
- [KY1] M.Kita and M.Yoshida : Intersection theory for twisted cycles, Math. Nachr. **166** (1994), 287-304.
- [KY2] M.Kita and M.Yoshida : Intersection theory for twisted cycles II, Math. Nachr. **168** (1994), 171-190.
- [M] K.Mimachi : Reducibility and irreducibility of the Gauss-Manin system associated with a Selberg type integral, Nagoya Math. Jour. **132** (1993), 43-62.
- [MY] K.Mimachi and M.Yoshida : Intersection numbers of twisted cycles and the correlation functions of the conformal field theory, preprint.
- [Y1] M.Yoshida : *Hypergeometric Functions, My Love*, Vieweg, 1997.
- [Y2] M.Yoshida : Intersection theory for twsted cycles III —Determinant formulae, Math. Nachr. **214** (2000), 173-185.

Katsuhisa Mimachi
Department of Mathematics
Tokyo Institute of Technology
Oh-okayama, Meguro-ku,
Tokyo 152-8551
Japan

Masaaki Yoshida
Department of Mathematics
Kyushu University
Ropponmatsu,
Fukuoka 810-8560
Japan