

hecke環の表現型について

有木 進 (東京商船大学)

1 宇野予想とは何か

W を有限 Weyl 群, $\mathcal{H}_q$ を W に付随した Hecke 環とする. Hecke 環のモジュラー表現論は 80 年代後半に Dipper-James により研究が開始され現在にいたる分野であり, Artin 環の理論, 代数群の表現論を主たる手法として発展してきた. まだ未開発の部分が多く, たとえば Artin 環の一般論を Hecke 環に適用して具体的な結果を得るという方向ではいろいろな問題が考えられる.

Artin 環の表現論について基本事項を復習しておこう. F を標数 l の体とし, 有限次元 F -代数を A とするとき, A が有限表現型 (finite type) とは, A の直既約加群の個数が同型を除いて有限個であるときをいう. また有限表現型でないとき無限表現型という. 有名な Drozd の定理によれば, 任意の Artin 環は finite, tame, wild の 3 つのどれかの表現型をもつが, ここでは有限表現型かそうでないかだけを考察したい.¹ 以下ではつねに F は A の splitting field であると仮定する.

さて A が群環ならば簡明な有限表現型の判定条件がある.

定理 1 ([BD]). G を有限群, $A = FG$ をその群環とする. このとき, A が有限表現型になるための必要十分条件は G の Sylow l -部分群が巡回群になることである.

この定理を Weyl 群に適用すると次の系が得られる.

系 2. W を有限 Weyl 群とする. このとき FW が有限表現型になるための必要十分条件は l^2 が $|W|$ を割り切らないことである.

宇野勝博は 1992 年の論文 [U] においてこの定理 2 の q -analogue を予想した. 予想を述べるためまず W の Poincaré 多項式の定義を思い出しておこう.

定義 3. W を有限 Weyl 群とすると, 次の多項式を W の Poincaré 多項式という. ただし, $l(w)$ は w の長さである.

$$P_W(x) = \sum_{w \in W} x^{l(w)}.$$

¹他の表現型の場合は将来の課題である. また直既約加群の分類をする一般論として Auslander-Reiten 理論があるがこれを Hecke 環に適用したときどういふことがいえるかというのも将来の課題である.

$\mathcal{H}_q$ の半単純性については次の行者・宇野の結果がすでに知られている。これは、群環の場合 FW が半単純になるのは l が $|W|$ を割り切らないことと同値である、という Maschke の定理の自然な q -analogue である。

定理 4 ([GU]). $\mathcal{H}_q$ が半単純環になるための必要十分条件は q が $P_W(q) \neq 0$ をみたすことである。

この定理と定理 2 を考えあわせるとき次の予想は自然に思えるであろう。

予想 5 (宇野予想). $q \neq 1$ とする。このとき、 $\mathcal{H}_q$ が有限表現型かつ半単純でないための必要十分条件は q が $P_W(x) = 0$ の単根になることである。

まず次の命題により W を既約 Weyl 群としてよい。これは complexity の理論の簡単な応用である。

命題 6 ([A, Proposition 8]). W が既約 Weyl 群の場合に宇野予想が正しいければ、一般の有限 Weyl 群に対しても宇野予想は正しい。

2 表現型を決定するには

ここでは表現型を決定するために使う一般論について復習しておこう。

命題 7. A を対称多元環, F を A の splitting field とする。直既約射影加群 P が存在して $\text{End}_A(P)$ がどの $F[x]/(x^m)$ ($m = 1, 2, \dots$) と同型でないならば A は無限表現型である。

定理 8. A を対称多元環, A の分解行列 D が

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & & \\ & 0 & 1 & \cdots & & \\ & & 0 & \cdots & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & \cdots & 1 & 0 \\ & & & & \cdots & 1 & 1 \\ & & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のかたちだとする。このとき A は有限表現型である。

3 主定理

この講演では宇野予想がほぼ解決したことを報告したい。古典型の場合は私と Mathas の結果であり [AM][A], 巡回 Hecke 環の分解係数に関する以前の

私の結果の応用である。例外型については最近宮地兵衛 [M] により l が good prime という仮定のもとで解決されたようである。² これは、いくつかの命題を用意しておいてから、CHEVIE を用いた具体的な計算でこの命題の仮定が成立することを確認して解決するもので、計算機代数の美しい応用である。

定理 9. 古典型の場合は l を任意の素数、例外型の場合は l が good prime とする。このとき宇野予想は正しい。すなわち $q \neq 1$ のとき $\mathcal{H}_q$ が有限表現型で半単純でないための必要十分条件は q が $P_W(x) = 0$ の単根になることである。

以下では古典型と例外型に分けてそれぞれ証明の概略を紹介する。例外型については [M] の議論を適当に修正して紹介した。

4 古典型について

以下つねに $q = \sqrt[3]{1} \neq 1$ を仮定する。³

A 型の Hecke 環に対する宇野予想は宇野がすでに示している [U]。具体的には次の定理が成立する。

定理 10 ([U, Proposition 3.7, Theorem 3.8]). $\mathcal{H}_q$ が A 型 Hecke 環ならば、 $\mathcal{H}_q$ が有限表現型であるための必要十分条件は $n < 2e$ である。

よって B 型と D 型をやればよい。そのために 2 変数 B 型 Hecke 環に対して表現型を決定する。

定義 11. q, Q を F の可逆元とする。 $\mathcal{H}_{q,Q}$ とは生成元 $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ と次の基本関係で生成される F -代数である。

$$\begin{aligned} (T_0 + 1)(T_0 - Q) &= 0, & (T_i + 1)(T_i - q) &= 0 \text{ for } 1 \leq i \leq n-1, \\ T_0 T_1 T_0 T_1 &= T_1 T_0 T_1 T_0, & T_{i+1} T_i T_{i+1} &= T_i T_{i+1} T_i \text{ for } 1 \leq i \leq n-2, \\ T_i T_j &= T_j T_i \text{ for } 0 \leq i < j-1 \leq n-2. \end{aligned}$$

以下、 $-Q$ が q のべきかどうかで場合分けする。

定理 12 ([DJ, Theorem 4.17]). すべての整数 f に対し $Q \neq -q^f$ とする。ランクが $m-1$ と $n-m-1$ の A 型 Hecke 環のテンソル環を $\mathcal{H}_q(m, n-m)$ とすると、 $\mathcal{H}_{q,Q}$ は $\bigoplus_{m=0}^n \mathcal{H}_q(m, n-m)$ に森田同値である。

定理 13 ([AM, Theorem 1.4]). $0 \leq f < e$ をみたす整数 f に対し $Q = -q^f$ ならば、 $\mathcal{H}_{q,Q}$ が有限表現型になるための必要十分条件は

$$n < \min\{e, 2 \min\{f, e-f\} + 4\}$$

²good prime とは、正ルートを $\alpha = \sum n_i \alpha_i$ とかくとき、つねに $n_i \not\equiv 0 \pmod{l}$ となるような素数 l のことであり、具体的には G_2, F_4, E_6, E_7 では $l \neq 2, 3$, E_8 では $l \neq 2, 3, 5$ である。

³ $q = \sqrt[3]{1}$ という表記は q の位数が e という意味で使用している。

である。

定理 12 の証明は実際に progenerator を構成することによりおこなう。以下では定理 13 の証明を説明する。

まず $n \geq \min\{e, 2\min\{f, e-f\} + 4\}$ のとき無限表現型を示すために命題 7 を用いるのであるが、そのためには題意をみたす直既約射影加群を見つけなければならない。そしてそのためにはその直既約射影加群の組成因子を決定できる程度には分解係数の計算ができないといけない。ところで Hecke 環の分解係数が計算できるようになったのは比較的最近のことであって、今の場合は次の定理にもとづく。

定理 14. $q, Q = -q^f$ を固定し、 $K_0(\mathcal{H}_{q,Q} - \text{proj}) \otimes \mathbb{Q}$ のすべての非負整数 n にわたる直和を $\mathcal{L}$ とする。このとき、 $\mathcal{L}$ には $U(\widehat{sl}_e)$ -加群の構造が入り、最高ウェイト $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_f$ の Fock 空間への埋め込み写像が存在して分解写像の転置と同一視される。この埋め込みのもとで $\mathcal{L} \simeq L(\Lambda)$ であり、また $l=0$ ならこの同型のもとで直既約射影加群と標準基底が対応する。

系 15 ([AM, Corollary 3.7]). (K, R, F) をモジュラー系とし、 P_K^μ, P_R^μ, P^μ を対応する射影加群とする。もし上の対応のもとで $[P_K^\mu]$ が単項式の形の標準基底に対応するならば P^μ は P_K^μ の還元である。すなわち $P_K^\mu = P_R^\mu \otimes K$ が成立。

この系により、正標数の場合でも分解係数が計算できる場合がある。今の場合これで十分な情報を与えるのであって、たとえば $n=e, f \neq 0$ のときは $\mu = ((0), (1^e))$, $n=2f+4, 0 < f \leq \frac{e}{2}$ のときは $\mu = ((1), (2^{f+1}1))$ のときの P^μ の分解係数を計算し、さらに Specht 加群理論を適用することにより、 $\text{End}_{\mathcal{H}_q}(P^\mu)$ がどの $F[x]/(x^m)$ ($m=1, 2, \dots$) と同型にはならないことを示すことができる。具体的には $D^\mu \oplus D^\mu \subset \text{Soc}(P^\mu/\text{Rad}^3(P^\mu))$ を示すのであり、そのために、

- P^μ が Specht filtration をもつこと、
- 分解係数の計算から P^μ の Specht filtration にあらわれる Specht 加群の組成商が具体的にわかること、
- その他、Specht 加群、直既約射影加群に対して一般的に成り立つ性質、

を用いる。 $f=0$ のときはもっとやさしい。

次に $n < \min\{e, 2\min\{f, e-f\} + 4\}$ のとき有限表現型を示すために定理 8 を適用するのだが、そのためにはマヤ図形の組み合わせ論と James–Mathas による cyclotomic Jantzen sum formula を用いる。なかなか気が利いている議論であるが、詳しくは [AM] を参照していただきたい。

この系として、 B 型 Hecke 環のとき宇野予想が正しいことがしたがう。

さらに D 型 Hecke 環を $\mathcal{H}_{q,Q=1}$ に埋め込むことにより議論すれば, D 型 Hecke 環のときも宇野予想が正しいことを示すことができる. やさしい議論なので [A] を参照されたい.

5 例外型について

最初に $q = \sqrt[e]{l} \in \mathbb{C}$ のときを考える. このときは代数群の表現論が $\mathcal{H}_q$ の分解係数の情報を与えることを説明しよう.

補題 16. $\Phi_e(x)$ を e 次円分多項式とすると, $l \parallel \Phi_e(p)$ となる素数の対 (l, p) が無限にたくさん存在する.

Proof. 等差数列 $1 + \mathbb{Z}e$ は素数を無限に含む. この素数をあらわす変数を l としよう. このとき e は $l-1$ の約数ゆえ, $a \in \mathbb{Z}$ であって $a \bmod l$ の位数が e であつ $a \bmod l^2$ の位数が e でないものが存在する. 実際, $a \bmod l^2$ の位数が e なら $a+l$ を改めて a にとればよい. そこで等差数列 $a + \mathbb{Z}l^2$ に含まれる素数 p をとれば $p \bmod l$ は位数 e で $p \bmod l^2$ は位数 e でない. よって $\Phi_e(p) \equiv 0 \bmod l$ で $\Phi_e(p) \not\equiv 0 \bmod l^2$ である. $\square$

さて, この補題で存在の保証された l, p に対し, $G(p)$ を分裂型 Lie 型有限群, $B(p)$ をその Borel 部分群, 群環 $FB(p)$ の単位表現の $FG(p)$ への誘導加群を M とするとき, M は $(FG(p), \mathcal{H}_q)$ -両側加群であり, Dipper の補題より $\mathcal{H}_q$ の分解行列は $FG(p)$ の分解行列の部分行列になる.

いま, 剰余体の標数が l である素イデアルを用いて $q = \sqrt[e]{l} \in \mathbb{C}$ の場合から $q = \sqrt[e]{l} \in F$ の場合への還元を考えると, 補題 16 より, いくらでも大きい標数 l があつて q の位数を e に保ったまま還元できることがわかる. また簡単な議論により l が十分大きいときの分解行列は $q = \sqrt[e]{l} \in \mathbb{C}$ の場合の分解行列と一致することがわかる. このようにして代数群の表現論から $q = \sqrt[e]{l} \in \mathbb{C}$ の場合の $\mathcal{H}_q$ に関する情報を得ることができる.

実際, 例外型の場合にはこのような情報を援用して計算量を減らしつつ, cell 表現を具体的に分解していく手法により分解係数を計算することができ, Geck および Lux により $q = \sqrt[e]{l} \in \mathbb{C}$ の場合のすべての分解係数が求まっている.

とくに q が $P_W(x) = 0$ の単根になる場合を考えれば, Brauer によって与えられた群環の場合の議論⁴ を今の場合にあてはめてパラレルに議論すれば, $\mathcal{H}_q$ のすべてのブロックは Brauer 木代数に森田同値で, しかも Brauer 木は直線であることを示すことができる. とくに次の定理を得る.

定理 17 ([G, Corollary 9.7]). $q = \sqrt[e]{l} \in \mathbb{C}$ が $P_W(x) = 0$ の単根とすると $\mathcal{H}_q$ は有限表現型である.

⁴たとえば [Go, Chap.11] を見よ.

さて、例外型の場合に宇野予想を示すため、まず $q = \sqrt[l]{l} \in F$ が $P_W(x) = 0$ の単根ならば $\mathcal{H}_q$ が有限表現型になることを示す。そのためには、分解係数が定理 17 の場合から増加しないことを示さなければならない。ここで l が good prime という仮定を使えば、分解係数に関する十分な制約条件が得られ、CHEVIE で具体的な計算をすると、 q が $P_W(x) = 0$ の単根の場合には分解係数の可能性が一意に決まってしまう、という議論で証明されるようである。また、無限表現型を示すとき必要となる分解係数についても、同様にして決定できるようである。(筆者はこの計算については確認していない。)

次に示すべきは q が $P_W(x) = 0$ の重根のとき $\mathcal{H}_q$ が無限表現型になることである。⁵ そのためには命題 7 より $\text{End}_{\mathcal{H}_q}(P)$ が $F[x]/(x^m)$ ($m = 1, 2, \dots$) と同型にならないような直既約射影加群を見つけられればよい。例外型を扱う利点は、場合わけが有限個で済むので各個撃破で証明できることであるが、他方、計算が手計算では無理なのでどの直既約射影加群に注目すればよいかに気づくのがむづかしい。そこで計算機代数に頼る必要があるのであるが、そのためには表現論と計算機代数の両方に習熟している必要がある。普通はなかなかそういう人材はみつからないのであるが、さいわいにそういう人材がいた。以下では宮地の結果 [M] について紹介する。まず準備から。

定義 18. M を $\mathcal{H}_q$ -加群とすると $M^* = \text{Hom}_F(M, F)$ に生成元 T_i の作用を M への作用の転置で定義し、一般の元に対しては $(T_w f)(m) = f(mT_{w^{-1}})$ で作用を定義する。 M^* は $\mathcal{H}_q$ -加群である。これを M の dual とよび、 $M \simeq M^*$ のとき M を self-dual 加群という。

補題 19. Hecke 環の既約加群は self-dual である。

Proof. まず $\mathcal{H}_q$ が半単純環のときを考える。既約加群 S の指標を χ_S 、 S^* の指標を χ_{S^*} とするとき $\chi_S = \chi_{S^*}$ を示せば十分である。 $q = 1$ の場合は Weyl 群の既約表現が $\mathbb{Q}$ 上実現できていることより正しい。 q が不定元のときは Tits' deformation theorem より $q = 1$ の場合からしたがう。よって一般の半単純環の場合も q を特殊化することによりしたがう。

$\mathcal{H}_q$ が半単純でないときは、 (K, R, F) をモジュラー系とし、 $\mathcal{H}_q$ の任意の直既約射影加群をとりこれを P とする。 P_R をその lift とすると P_R^* は $\mathcal{H}_q$ が対称多元環であることより射影加群であり、射影加群に対しては $P_R \otimes K \simeq P_R^* \otimes K$ から $P_R \simeq P_R^*$ が結論できるので $P = P_R \otimes F$ と $P^* = P_R^* \otimes F$ も同型。

とくに $S = \text{Top}(P) \simeq \text{Top}(P^*) \simeq \text{Soc}(P)^* = S^*$ がしたがう。□

補題 20. $\mathcal{H}'_q$ を $\mathcal{H}_q$ の放物型部分環、 V を $\mathcal{H}'_q$ -加群とする。このとき

$$(V \uparrow^{\mathcal{H}_q})^* \simeq (V^*) \uparrow^{\mathcal{H}_q}$$

が成立。とくに self-dual な加群の誘導加群は self-dual である。

⁵ 古典型の場合と違い、 $q = \sqrt[l]{l} \in F$ は重根だが $q = \sqrt[l]{l} \in \mathbb{C}$ は単根、という e が存在することに注意しておく。しかし、 l が good prime という仮定がこの可能性を排除する。

Proof. 次の同型

$$\begin{aligned}\Phi : \text{Hom}_{\mathcal{H}_q}((V \uparrow^{\mathcal{H}_q})^*, U) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}_q}(U^*, V \uparrow^{\mathcal{H}_q}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}'_q}((U \downarrow_{\mathcal{H}'_q})^*, V) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}'_q}(V^*, U \downarrow_{\mathcal{H}'_q})\end{aligned}$$

を考える. $U = (V \uparrow^{\mathcal{H}_q})^*$ のとき, $\iota = \Phi(\text{Id}_U)$ とすると, 一般の U に対する Φ は $\Phi : f \mapsto f \circ \iota$ で与えられる. よって $(V \uparrow^{\mathcal{H}_q})^*$ は V^* に関して relatively free なので, $(V \uparrow^{\mathcal{H}_q})^* \simeq (V^*) \uparrow^{\mathcal{H}_q}$ を得る. $\square$

補題 21. S を M の既約部分加群, $[\text{Top}(M) : S] > 0$, $[\text{Top}(M/S) : S] = 0$ とする. このとき S は M の直和因子である.

Proof. $S \subset \text{Rad}(M)$ とすると, $\text{Top}(M/S) = \text{Top}(M)$ であるから矛盾. ゆえに分裂全射 $M \rightarrow S \rightarrow 0$ が存在し S は M の直和因子である. $\square$

定義 22. σ を $\sigma(T_i) = q - 1 - T_i$ ($\forall i$) で定まる $\mathcal{H}_q$ の自己同型とする. M が $\mathcal{H}_q$ -加群のとき, M^σ を $xm = \sigma(x)m$ ($x \in \mathcal{H}_q, m \in M$) で $\mathcal{H}_q$ -加群構造を定めた $\mathcal{H}_q$ -加群とする.

命題 23 ([M, Lemma 20]). M が次の条件をみたす $\mathcal{H}_q$ -加群とする.

- (1) M は self-dual.
- (2) $\text{Top}(M) = S \oplus S'$, ただし S と S' は非同型な既約加群.
- (3) $[M : S] = 2$, $[M : S'] = 2$.
- (4) $[P(S) : S'] \leq 1$, $[P(S') : S] \leq 1$.
- (5) $[\text{Rad}(M)]$ は multiplicity-free.
- (6) $[M^\sigma] \neq [M]$ かつ $[S^\sigma] + [S'^\sigma] = [S] + [S']$.
- (7) $[M] \neq [S] + [P(S')]$, $[M] \neq [S'] + [P(S)]$.

このとき, 既約でない直既約 $\mathcal{H}_q$ -加群 M', M'' であって次の条件をみたすものが存在する.

- (a) $\text{Top}(M') = \text{Top}(M'') = \text{Soc}(M') = \text{Soc}(M'')$ は既約加群.
- (b) $M' \not\cong M''$.
- (c) M' は M'' と同型な部分加群をもたない.
- (d) M'' は M' と同型な部分加群をもたない.

Proof. まず M が直既約としよう. 条件 (2) より $\pi_S : M \rightarrow S$ と $\pi_{S'} : M \rightarrow S'$ の全射が存在する.

(step 1) $\text{Soc}(M) \subset \text{Rad}(M)$ で, $H(M) = \text{Rad}(M)/\text{Soc}(M)$ は self-dual.

一般に、既約部分加群 $S \subset \text{Soc}(M)$ が $\text{Rad}(M)$ に含まれていないと仮定すると、分裂全射 $M \rightarrow S \rightarrow 0$ が存在し、 M が直既約に反する。ゆえに $\text{Soc}(M) \subset \text{Rad}(M)$ 。そこで

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & 0 & \\
 & & \uparrow & & \nearrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H(M)^* & \longrightarrow & \text{Rad}(M)^* & \longrightarrow & \text{Top}(M) = \text{Soc}(M)^* \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \nearrow & & \\
 & & M = M^* & & & & \\
 & \nearrow & \uparrow & & & & \\
 \text{Rad}(M) & \supset & \text{Top}(M)^* = \text{Soc}(M) & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

を考えると、 $\phi: \text{Rad}(M) \rightarrow H(M)^*$ が存在して $\text{Ker } \phi = \text{Soc}(M)$ である。

単射 $\bar{\phi}: H(M) \rightarrow H(M)^*$ が得られ、次元をくらべて $H(M)^* \simeq H(M)$ を得る。

(step 2) M の Loewy length は 3 である。

Loewy length 1 はありえない。Loewy length 2 だとすると、条件 (1) より $\text{Rad}(M) \subset \text{Soc}(M) = S \oplus S'$ であるから、条件 (3) よりこの包含関係において等号が成立する。これは条件 (6) に反す。他方、 $H(M) = \text{Rad}(M)/\text{Soc}(M)$ は (step 1) より self-dual であるから、 S が $H_0 = H(M)$ の既約部分加群なら $[H(M):S] > 0$ であり、条件 (5) より補題 21 が $H(M)$ に適用可能である。ゆえに $H_0 = S \oplus H_1$ とかける。以下同様に議論すれば $H(M)$ が半単純加群であることがしたがう。ゆえに Loewy length 3 である。

(step 3) $\text{Ker}(\pi_S)/S$ と $\text{Ker}(\pi_{S'})/S'$ は半単純加群ではない。

証明は同じなので $\text{Ker}(\pi_{S'})/S'$ についてだけ示す。

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\pi_{S'}} & S' & \longrightarrow & 0 \\
 \nwarrow & & \uparrow & & \\
 & & P(S') & &
 \end{array}$$

より $\phi_{S'}: P(S') \rightarrow M$ が存在する。 $U_{S'} = \text{Im}(\phi_{S'})$ とおく。 $\text{Top}(U_{S'}) = S'$ かつ $U_{S'} \subset \text{Ker}(\pi_S)$ である。(step 1) よりとくに $\text{Soc}(U_{S'}) \subset \text{Soc}(M)$ と $\text{Top}(U_{S'}) = S' \subset \text{Top}(M)$ に重なりはなく、 $U_{S'}$ は半単純加群ではない。

(i) $\text{Soc}(U_{S'}) = S'$ ならば、 $\text{Ker}(\pi_S)/S$ は $U_{S'}$ と同型な部分加群を含むので半単純加群ではない。

(ii) $\text{Soc}(U_{S'}) \neq S'$ ならば、 $\text{Soc}(U_{S'}) \supset S$ なので $\text{Ker}(\pi_S)/S$ は $U_{S'}/S$ を含み $\text{Top}(U_{S'}/S) = S'$ である。 $U_{S'}/S$ が既約加群でないとすると、 $\text{Top}(U_{S'}/S) =$

S' より $U_{S'}/S$ は半単純加群ではありえない. よってこの場合には $\text{Ker}(\pi_S)/S$ が半単純加群ではないことがわかる.

$S' = U_{S'}/S$ が既約加群とする. $U_{S'} \simeq S' \oplus S$ と仮定すると, この S' が $\text{Soc}(M)$ にあらわれるので M の直既約因子になり, M が直既約という仮定に反する. よって $S \subset \text{Top}(\text{Rad}(M)) \cap \text{Soc}(M)$ である. ゆえに $\text{Rad}(M) = S \oplus L$ とかける. $\text{Soc}(L) = S'$ より L は直既約で, 条件 (6) より $L = S'$ ではありえない. よって $\text{Ker}(\pi_S)/S$ は L と同型な部分加群を含み, L は半単純加群ではないので $\text{Ker}(\pi_S)/S$ も半単純加群ではない.

(step 4) $\text{Ker}(\pi_S)/S$ と $\text{Ker}(\pi_{S'})/S'$ は self-dual.

証明は (step 1) と同様である. たとえば $\text{Ker}(\pi_S)/S$ のときは, 次の可換図式を考えればよい.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \nearrow & & \\
 0 & \longrightarrow & (\text{Ker}(\pi_S)/S)^* & \longrightarrow & \text{Ker}(\pi_S)^* & \longrightarrow & S = S^* \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow & \nearrow & \\
 & & & & M = M^* & & \\
 & & \nearrow & & \uparrow & & \\
 & & \text{Ker}(\pi_S) & \supset & S = S^* & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

(step 5) $\text{Ker}(\pi_S)/S = U_{S'} \oplus (\text{semi-simple})$ と直既約分解され, $U_{S'}$ は次の条件をみたす.

- (1) $\text{Top}(U_{S'}) = \text{Soc}(U_{S'}) = S'$.
- (2) $U_{S'}$ は self-dual.
- (3) $[U_{S'} : S'] = 2$.
- (4) $U_{S'}$ の Loewy length は 3 以下.

(step 5') $\text{Ker}(\pi_{S'})/S' = U_S \oplus (\text{semi-simple})$ と直既約分解され, U_S は次の条件をみたす.

- (1) $\text{Top}(U_S) = \text{Soc}(U_S) = S$.
- (2) U_S は self-dual.
- (3) $[U_S : S] = 2$.
- (4) U_S の Loewy length は 3 以下.

まず, $\text{Ker}(\pi_S)/S$ の既約部分加群 T が S' と同型でなければ, かならず $\text{Ker}(\pi_S)/S$ の直和因子になることを示す.

実際, $[\text{Ker}(\pi_S)/S] = [S'] + [\text{Rad}(M)] - [S]$ であるから, 条件 (3)(5) より T の $\text{Ker}(\pi_S)/S$ 中の重複度は 1 であるが, (step 4) よりこの T は $\text{Top}(\text{Ker}(\pi_S)/S)$ にもあらわれないといけない. よって, 分裂全射 $\text{Ker}(\pi_S)/S \rightarrow T \rightarrow 0$ が得られ, T は直和因子である.

(step 4) より, $\text{Ker}(\pi_S)/S$ の既約商加群 T が S' と同型でなければ, かならず $\text{Ker}(\pi_S)/S$ の直和因子になることもわかる.

以上から, $\text{Ker}(\pi_S)/S = U \oplus (\text{semi-simple})$ とかけて, $\text{Soc}(U)$ と $\text{Top}(U)$ には S' しかあらわれないようにできる. $\text{Soc}(U) = S' \oplus S'$ なら, $[U : S'] = 2$ より $\text{Top}(U) = \text{Soc}(U)$ で U が半単純加群になり, (step 3) に反するので, $\text{Soc}(U) = S'$ である. 同様にして $\text{Top}(U) = S'$ を得る. とくに U は直既約.

U は $\text{Ker}(\pi_S)/S$ の唯一の既約でない直既約因子であるから, (step 4) より U も self-dual. $[U : S'] = 2$ は明らかで, U の Loewy length が 3 以下なのは (step 2) より明らかである. 以上で (step 5) が示された. (step 5') も同様.

(step 6) 題意をみたす M', M'' が存在する.

M に対し, (step 5), (step 5') で与えられた $\mathcal{H}_q$ -加群 $U_S, U_{S'}$ をとる. M^σ も M と同じ条件をみたすので, M^σ に対し, 同様にして得られる $\mathcal{H}_q$ -加群を $V_S, V_{S'}$ とする.

$(\text{Ker}(\pi_S))^\sigma = \text{Ker}(\pi_{S^\sigma})$ であるから, $(U_S)^\sigma = V_{S^\sigma}$, $(U_{S'})^\sigma = V_{S'^\sigma}$ である.
(i) $U_S \neq V_S$ のとき.

このときは $M' = U_S, M'' = V_S$ ととれば, 条件 (a)(b) は明らかにみたされ, U_S が V_S の部分加群なら, $U_S \neq V_S$ と $\text{Top}(V_S) = S$ より, $U_S \subset \text{Rad}(V_S)$ である. これは, $[V_S : S] = 3$ ということだから矛盾. 同様に議論して V_S が U_S の部分加群にならないこともわかる.

(ii) $U_S \simeq V_S$ のとき.

このときは $M' = U_{S'}, M'' = V_{S'}$ とおく. $M' \neq M''$ のみ示せば, あとは (i) と同様である. 命題の仮定 (6) より, $[H(M)] \neq [H(M^\sigma)]$ ゆえ, 仮定 (3)(5) より, 既約加群 $T \neq S, S'$ であって, $[H(M) : T] = 1$, $[H(M^\sigma) : T] = 0$ をみたすものが存在する. $U_S \simeq V_S$ より $[U_S : T] = 0$ であるから, T は $\text{Ker}(\pi_{S'})/S'$ の直和因子. とくに, $\text{Top}(L) = T$, $\text{Soc}(L) = S'$, $[L] = [T] + [S']$ なる M の部分加群が存在する. $L \subset \text{Rad}(M)$ であるから, $L \subset \text{Ker}(\pi_S)$ であり, $\text{Ker}(\pi_S)/S$ は L と同型な部分加群を含む. よって, $\text{Ker}(\pi_S)/S \rightarrow U_{S'}$ を直和因子 $U_{S'}$ への射影とすると, 像が 0 なら, L が半単純加群になり矛盾する. 像が T なら $\text{Soc}(U_{S'})$ が T を含み, やはり矛盾. ゆえに, $U_{S'}$ が L と同型な部分加群を含むことがしたがう.

以上から, $[U_{S'} : T] = 1$, $[V_{S'} : T] = 0$ が得られたので, $U_{S'} \neq V_{S'}$ である.

次に M が直既約でないとする. このとき, $M = M_S \oplus M_{S'}$, $\text{Soc}(M_S) = S$, $\text{Soc}(M_{S'}) = S'$ とかける. 同様に, $M^\sigma = (M^\sigma)_S \oplus (M^\sigma)_{S'}$, $\text{Soc}((M^\sigma)_S) = S$, $\text{Soc}((M^\sigma)_{S'}) = S'$ とかける.

(step 1) $M_S, M_{S'}$ は self-dual.

M が self-dual ゆえ, $M_S^* \simeq M_S, M_{S'}^* \simeq M_{S'}$ でなければ, $M_S^* \simeq M_{S'}$ である. 以下, $M_S^* \simeq M_{S'}$ を仮定して矛盾を導く.

まず, $M_S \not\simeq M_S^g, M_{S'}^g$ である. 実際, $M_S \simeq M_S^g$ なら $M_S^* \simeq M_{S'}$ より $M_{S'} \simeq M_{S'}^g$ でもあるので, $M^\sigma = M_S^g \oplus M_{S'}^g \simeq M$ となり, 命題の仮定 (6) に反する. $M_S \simeq M_{S'}^g$ のときも同様である. ゆえに, $M_S \not\simeq (M^\sigma)_S$.

$M_S^* \simeq M_{S'}$ より, $\text{Top}(M_S) = S'$ で, $\text{Top}(M_S) \not\simeq \text{Soc}(M_S)$ であるから, $\text{Top}((M^\sigma)_S) \not\simeq \text{Soc}((M^\sigma)_S)$ となり, $\text{Top}((M^\sigma)_S) = S'$ でもある.

M_S と $(M^\sigma)_S$ は補題 25 の仮定 (a)(b)(c)(d) をみたすので, 補題 25 と同様に議論すれば, $\text{Soc}(L) = S, \text{Top}(L) = S' \oplus S'$ をみたす直既約加群 L が存在する. よって, 全射 $P(S) \rightarrow L^* \rightarrow 0$ が存在し, 命題の仮定 (4) に反する.

(step 2) $M_S, M_{S'}$ は既約加群ではない.

$M_S = S$ として矛盾を導く. $\text{Soc}(M_{S'}) = S'$ と

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & M_{S'} \\ & & \downarrow & & \checkmark \\ & & I(S') = P(S') & & \end{array}$$

より, $M_{S'} \subset P(S')$ としてよい.

命題の仮定 (7) より $M_{S'} \not\simeq P(S')$ であるから, $M_{S'} \subset \text{Rad}(P(S'))$ である. とくに, $M_{S'}/S'$ は $H(P(S'))$ の部分加群である.

命題の仮定 (3) より $[M_{S'} : S] = 1$ であり, また, $M_{S'}$ の Loewy length が 3 であるから, $S \subset \text{Soc}(H(P(S')))$ であるが, $H(P(S'))$ が self-dual であることと, 命題の仮定 (4) より $[H(P(S'))/S : S] = 0$ であることより, 補題 21 が適用可能で, S は $H(P(S'))$ の直和因子である. よって, $H(P(S'))$ から直和因子 S への射影を $M_{S'}/S'$ に制限すれば, 分裂全射 $M_{S'}/S' \rightarrow S \rightarrow 0$ が得られ, S が $M_{S'}/S'$ の直和因子になり, $\text{Top}(M_{S'}/S') = S'$ に反す.

$M_{S'} = S'$ のときも同様に議論すればよい.

(step 3) 題意をみたす M', M'' が存在する.

$M_S \simeq (M^\sigma)_S$ かつ $M_{S'} \simeq (M^\sigma)_{S'}$ とすると, 命題の仮定 (6) に反するので, $M_S \not\simeq (M^\sigma)_S$ としよう. このとき, $M' = M_S, M'' = (M^\sigma)_S$ とおく. (a)(b) は明らかで, $(M^\sigma)_S$ が M_S の部分加群とすると, $\text{Rad}((M^\sigma)_S) \subset M_S$ であるから, $[M_S : S] = 1 + [\text{Rad}(M_S) : S] \geq 3$ で命題の仮定 (3) に反する. ゆえに, (c) が成り立つ. (d) も同様である.

$M_{S'} \not\simeq (M^\sigma)_{S'}$ のときは, $M' = M_{S'}, M'' = (M^\sigma)_{S'}$ とおけばよい. $\square$

この命題は次のような状況で使われる. $\mathcal{H}_q'$ の有限表現型ブロックに含まれる既約加群 T を選び P を T の projective cover とする. Brauer 木は決

定されており, $[P]$ は完全に記述されている. そこで, 通常指標の誘導により $[P \uparrow^{\mathcal{H}_q}]$ を計算することができる. 上で述べたように, この射影加群を直既約分解するのに必要なだけの分解係数は計算できているので, この計算より $P \uparrow^{\mathcal{H}_q}$ がどういう直既約射影加群の直和になるかは完全にわかる.

$P \uparrow^{\mathcal{H}_q}$ に現れるブロックを B とし, $P \uparrow^{\mathcal{H}_q}$ の B への寄与を $P \uparrow^B$ とかく. 補題を実際に応用する状況では, $P \uparrow^B = P(S) \oplus P(S')$ と 2 個の直既約射影加群の直和である.

そこで $M = T \uparrow^B$ とおく. $[T]$ も通常指標の交代和で具体的に記述されており, $[M]$ が計算できる. また, $S \downarrow_{\mathcal{H}'_q}$ と $S' \downarrow_{\mathcal{H}'_q}$ も計算できる.

補題 20 より命題の仮定 (1) がみたされ, 全射 $P \rightarrow T \rightarrow 0$ が

$$P(S) \oplus P(S') \rightarrow M \rightarrow 0$$

を誘導するから, $\text{Top}(M) \subset S \oplus S'$ であるが,

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}_q}(M, ?) = \text{Hom}_{\mathcal{H}'_q}(T, ? \downarrow_{\mathcal{H}'_q}), \quad (? = S, S')$$

の右辺が 1 であることを確認すれば, 仮定 (2) がみたされることがわかる. (4) は分解係数をみればわかり, (3)(6)(7) は $[M]$ の計算よりわかる. (5) は (2) と $[M]$ の計算よりわかる.

もっと状況がよく, $P \uparrow^B$ が直既約射影加群になる場合もある. このときは次の命題を適用する.

命題 24 ([M, Lemma 18]). 既約 $\mathcal{H}'_q$ -加群 T と $\mathcal{H}_q$ のブロック B が次の条件をみたすと仮定する.

- (1) $T \uparrow^B$ は既約加群ではない.
- (2) $P(T) \uparrow^B$ は直既約射影加群.
- (3) $(P(T) \uparrow^B)^\sigma \simeq P(T) \uparrow^B$.
- (4) $[(T \uparrow^B)^\sigma] \neq [T \uparrow^B]$.

このとき, $M' = T \uparrow^B$, $M'' = (T \uparrow^B)^\sigma$ は次の条件をみたす.

- (a) $\text{Top}(M') = \text{Top}(M'') = \text{Soc}(M') = \text{Soc}(M'')$ は既約加群.
- (b) $M' \not\simeq M''$.
- (c) M' は M'' と同型な部分加群をもたない.
- (d) M'' は M' と同型な部分加群をもたない.

Proof. $P(T) \uparrow^B \rightarrow M \rightarrow 0$ であるから, 条件 (2)(3) と補題 20 より (a) は明らかである. M' と M'' は次元が等しいので, M' が M'' の部分加群なら $M' \simeq M''$ である. よって, (b)(c)(d) は条件 (4) よりしたがう. $\square$

さて, このふたつの命題の意味は次の補題で明らかになる.

補題 25 ([M, Lemma 15]). $\mathcal{H}_q$ -加群 M', M'' がともに既約ではなく, 次の条件をみたすとする.

- (a) $\text{Top}(M') = \text{Top}(M'') = \text{Soc}(M') = \text{Soc}(M'')$ は既約加群.
- (b) $M' \neq M''$.
- (c) M' は M'' と同型な部分加群をもたない.
- (d) M'' は M' と同型な部分加群をもたない.

このとき, $\mathcal{H}_q$ は無限表現型である.

Proof. (a) の既約加群を S とする. $\text{Soc}(M') = S$ より

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & M' \\ & & \downarrow & \swarrow & \\ & & I(S) & & \end{array}$$

により, $M' \subset I(S)$ とみなせる. 同様に $M'' \subset I(S)$ とみなす. $V_{M', M''} = M' + M'' \subset I(S)$ とおく. $\text{Soc}(I(S)) = S$ より $\text{Soc}(V_{M', M''}) = S$ である.

$M' \neq V_{M', M''}$ である. 実際, $M' = V_{M', M''}$ とすると, M' は M'' と同型な部分加群を含むので条件 (c) に反する. 同様に, $M'' \neq V_{M', M''}$ である. とくに, M', M'' はそれぞれ $V_{M', M''}$ の極大部分加群に含まれる.

$\text{Top}(M') \oplus \text{Top}(M'') \rightarrow \text{Top}(V_{M', M''}) \rightarrow 0$ より, $\text{Top}(V_{M', M''})$ は S または $S \oplus S$ であるが, $\text{Top}(V_{M', M''}) = S$ ならば $V_{M', M''}$ は唯一の極大部分加群をもつので, $M, N \subset \text{Rad}(V_{M', M''})$ となり, $V_{M', M''} = M' + M'' \subset \text{Rad}(V_{M', M''})$ で矛盾. ゆえに $\text{Top}(V_{M', M''}) = S \oplus S$ である.

以上から, $\text{Top}(V_{M', M''}^*) = S$ かつ $\text{Soc}(V_{M', M''}^*) = S \oplus S$ である.

$\text{Hom}_{\mathcal{H}_q}(V_{M', M''}^*, \text{Soc}(V_{M', M''}^*)) \subset \text{End}_{\mathcal{H}_q}(V_{M', M''}^*)$ を考える.

$\text{End}_{\mathcal{H}_q}(V_{M', M''}^*) \simeq F[x]/(x^m)$ と仮定して矛盾を導こう.

実際, このとき $x \in \text{Hom}_{\mathcal{H}_q}(V_{M', M''}^*, \text{Rad}(V_{M', M''}^*))$ であり,

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}_q}(V_{M', M''}^*, \text{Soc}(V_{M', M''}^*)) = Fy \oplus Fz,$$

$y = f(x)$, $z = g(x)$ とかくと, $y(\text{Rad}(V_{M', M''}^*)) = 0$, $z(\text{Rad}(V_{M', M''}^*)) = 0$ より $yx = 0$, $zx = 0$ でなければならない. しかし, これは $f(x)$ と $g(x)$ が x^{m-1} の定数倍ということであるから, y と z が 1 次独立に反する. よって, 命題 7 より $\mathcal{H}_q$ は無限表現型である. $\square$

宮地 [M] は, 古典型に帰着できない場合すべてに対して, 命題 23, 命題 24 を援用しつつ, この補題 25 をみたす $\mathcal{H}_q$ -加群のペア M', M'' をみつけた.

具体的な計算については [M] を参照されたい.

参考文献

- [A] S. Ariki, Uno's conjecture on representation types of Hecke algebras, preprint (2001), **math.QA/0108176**.
- [AM] S. Ariki and A. Mathas, The representation type of Hecke algebras of type B , preprint (2001), **math.RT/0106185**.
- [BD] V.M. Bondarenko and J.A. Drozd, The representation type of finite groups, *J. Soviet Math.*, **20** (1982), 2515–2528.
- [DJ] R. Dipper and G. James, Representations of Hecke algebras of type B_n , *J. Algebra*, **146** (1992), 454–481.
- [ED] K. Erdmann and D.K. Nakano, Representation type of Hecke algebras of type A , preprint (2000).
- [G] M. Geck, Brauer trees of Hecke algebras, *Comm. Alg.*, **20** (1992), 2937–2973.
- [Go] D.M. Goldschmidt, *Lectures on Character Theory*, Publish or Perish, Berkeley (1980).
- [GU] A. Gyoja and K. Uno, On the semisimplicity of Hecke algebras, *J. Math. Soc. of Japan*, **41** (1989), 75–79.
- [M] H. Miyachi, Uno's conjecture for the exceptional Hecke algebras, preprint (2001).
- [U] K. Uno, On representations of non-semisimple specialized Hecke algebras, *J. Algebra*, **149** (1992), 287–312.