

$SO_o(2, q)$ のクラス 1 主系列表現に対する Siegel-Whittaker 関数について

東京大学大学院数理科学研究科博士課程 3 年 石井 卓

0. Introduction

ここでは, IV型対称領域上の波動形式の Fourier 展開に現れる一般化された Whittaker 関数 (Siegel-Whittaker 関数と呼ぶ) について述べる.

G を実半単純リー群, K を G の極大コンパクト部分群, Γ を G の数論的部分群とする. さらに $\mathfrak{g}$ を G のリー環, $U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環とし, $Z(\mathfrak{g})$ をその中心, $U(\mathfrak{g})^K = \{X \in U(\mathfrak{g}) | \text{Ad}(k)X = X \ (k \in K)\}$ とする. このとき G 上の C^∞ 関数 F が Γ に関する保型形式であるとは, 次の 3 条件を満たすこととする: (1) F は左 Γ 不変かつ右 K 有限, (2) F は $U(\mathfrak{g})^K$ の元の同時固有関数, (3) cusp で多項式増大. 条件 (1) で特に F を右 K 不変とすると, 条件 (2) は F が G/K の G 不変微分作用素の同時固有関数になる, あるいは F が右移動で G の class 1 主系列表現を生成する, と言い換えられこのような保型形式を波動形式という.

$G = Sp(2, \mathbf{R}), \Gamma = Sp(2, \mathbf{Z})$ のとき波動形式 (Siegel 波動形式という) の Siegel 放物部分群 $P_s = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0_2 & * \end{pmatrix} \in G \right\}$ に沿った Fourier 展開について考える. $Z(\mathfrak{g})$ は 2 変数多項式環に同型でその生成元は 2 階のもの C_2 と 4 階のもの C_4 があり, Siegel 波動形式 F はこれらの同時固有関数. P_s の Levi 分解を $P_s = N_s L_s$; $L_s = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} | A \in GL(2, \mathbf{R}) \right\}$, $N_s = \left\{ n_s = \begin{pmatrix} 1_2 & S \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} | S = {}^t S \in M_2(\mathbf{R}) \right\}$ とし, N_s の指標 ξ を $\xi(n_s) = \exp(2\pi\sqrt{-1} \text{Tr}(H_\xi S))$ (H_ξ は実対称行列) と定めると,

$$F(ng) = \sum_{\xi \in (N_s \cap \Gamma \backslash N_s)^\wedge} \xi(n) W_{F, \xi}(g)$$

という Fourier 展開を得る. 以下 H_ξ が定置の項を考える. $G = P_s K = N_s L_s K$ という分解より, $W_{F, \xi}$ は $L_s / (L_s \cap K)$ という 3 次元空間上の関数と見なせる. F が正則保型形式のときは Cauchy-Riemann 条件から $W_{F, \xi}$ は指数関数で書けるのだが, 波動形式の場合は $C_2 F = \lambda F$, $C_4 F = \mu F$ という微分方程式系をこの 3 次元の空間に制限してもその解空間は無限次元になってしまう. そこで, L_s の中で ξ を固定する部分群の連結成分 $SO(\xi)$ (H_ξ が定置のときは $SO(2)$ に同型) で $W_{F, \xi}$ をさらに Fourier 展開する:

$$W_{F, \xi}(sg) = \sum_{\chi \in SO(\xi)^\wedge} \chi(s) W_{F, \xi, \chi}(g)$$

とおくと, $W_{F, \xi, \chi}(g)$ は $SO(\xi) \backslash L_s / (L_s \cap K)$ という 2 次元空間上の関数とみなせ, 微分方程式系の解空間は 8 次元になる. さらに G の原点で正則で, 無限遠で急減少となるものが定数倍を除いて一意に定まり, その明示形もわかる ([5], [4]). 従って

$$F(ng) = \sum_{\xi, \chi} a_{H_\xi, \chi}(F) \xi(n) \chi(s) W_{F, \xi, \chi}(g) + (\xi \text{ が定置でない項})$$

という Fourier 展開を得る. なお, 定置でない項に対しては $SO(\chi) \cong SO_o(1, 1)$ はコンパクトではないので定置のときとは状況が異なり, 現段階では未解決である. また, この結果を用いて Siegel 波動形式の Spinor L 関数の Γ 因子を計算することができる ([3], [4]).

以下ではこの結果の IV 型領域 $\mathcal{D}_q \cong SO_o(2, q) / SO(2) \times SO(q)$ ($q \geq 3$) への拡張について紹介する. ($\mathcal{D}_3 \cong \mathfrak{H}_2 = Sp(2, \mathbf{R}) / U(2)$)

1. $SO_o(2, q)$ の構造

$G = SO_o(2, q)$ とその Lie 環 $\mathfrak{g}$ は,

$$G = SO_o(2, q) = \{g \in SL(2+q, \mathbf{R}) \mid {}^t g I_{2,q} g = I_{2,q} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\}^\circ$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, q) = \{X \in M(2+q, \mathbf{R}) \mid {}^t X I_{2,q} + I_{2,q} X = 0\}.$$

で与えられる. G の Cartan involution $g \mapsto I_{2,q} {}^t g^{-1} I_{2,q}$ より $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を得る:

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \mid X_1 \in M_2(\mathbf{R}), X_2 \in M_q(\mathbf{R}) \text{ は交代行列} \right\},$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ {}^t X & 0 \end{pmatrix} \mid X \in M(2, q; \mathbf{R}) \right\}.$$

$\mathfrak{p}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{a}$ の基底 A_1, A_2 を

$$A_1 = E_{1,q+2} + E_{q+2,1}, \quad A_2 = E_{2,q+1} + E_{q+1,2}$$

にとり, 双対基底を α_1, α_2 とする. ルート系を $\Delta := \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, $\alpha \in \Delta$ に対して, $\mathfrak{g}_\alpha$ をルート空間とすると, $\Delta = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_1 \pm \alpha_2\}$, 各ルート空間の次元は, $\dim \mathfrak{g}_{\pm\alpha_i} = q-2$, $\dim \mathfrak{g}_{\pm\alpha_1 \pm \alpha_2} = 1$ となる. Δ の 1 つの正系 $\Delta^+ := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 \pm \alpha_2\}$ を固定し, $\mathfrak{n} := \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ とおくと, $\mathfrak{g}$ の岩澤分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}$ を得る. 対応する G の岩澤分解を $G = NAK$ と書く. $M := Z_K(\mathfrak{a})$. $Z(\mathfrak{g}) (= \mathfrak{g}$ の普遍包絡環の中心) は 2 変数多項式環でその生成元は 2 階のもの (C_2) と 4 階のもの (C_4) がある. C_2 はカシミール元でよく知られている. C_4 については [1] に述べられている方法で計算した.

2. $SO_o(2, q)$ の主系列表現

$\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ とする. H_ν を G 上の C^∞ 関数 ϕ で任意の $(n, a, m, g) \in N \times A \times M \times G$ に対して, $\phi(namg) = a^{\nu+\rho} \phi(g)$ を満たすもの全体とし, G の作用を右移動で定める. この G の表現 π_ν を class 1 主系列表現という. ここで, $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\dim \mathfrak{g}_\alpha) \alpha = (\frac{q}{2}, \frac{q}{2} - 1)$.

3. Siegel-Whittaker 関数の定義

G の Siegel 放物部分群という極大放物部分群 $P_s = L_s \ltimes N_s$ を

$$L_s := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{2}(a+a^{-1}) & & \frac{1}{2}(a-a^{-1}) \\ \hline & g_0 & \\ \hline \frac{1}{2}(a-a^{-1}) & & \frac{1}{2}(a+a^{-1}) \end{array} \right) \mid a \in \mathbf{R}^\times, g_0 \in SO_o(1, q-1) \right\},$$

$$N_s := \exp(\mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1-\alpha_2})$$

$$= \left\{ n_s = \left(\begin{array}{c|c|c} 1+x_0 & \tilde{x} & -x_0 \\ \hline -x & 1_q & x \\ \hline x_0 & \tilde{x} & 1-x_0 \end{array} \right) \mid x = {}^t(x_1, \dots, x_q) \in \mathbf{R}^q \right\},$$

ととる. ここで, $x_0 = x_1^2 - x_q^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{q-1} x_i^2$, $\tilde{x} = (x_1, -x_2, \dots, -x_q)$. アーベル群 N_s のユニタリ指標 ξ を

$$\xi(n_s) := \exp(2\pi\sqrt{-1} \sum_{1 \leq i \leq q} \xi_i x_i), \quad (\xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbf{R}^q$$

で定義する. 以後しばし $\xi \in \hat{N}_s$ と $(\xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbf{R}^q$ を同一視する. L_s の N_s への共役による作用が誘導する L_s の $\hat{N}_s$ への作用で ξ を不変にする L_s の部分群の単位元の連結成分を $SO(\xi)$ と表す. すると,

$$SO(\xi) = \text{Stab}_{L_s}(\xi)^\circ = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & g_0 & \\ \hline & & 1 \end{array} \right) \mid {}^t g_0 \tilde{\xi} = \tilde{\xi}, g_0 \in SO_o(1, q-1) \right\}.$$

ここで $\tilde{\xi} = {}^t(\xi_1, \dots, \xi_q)$. これより

$$SO(\xi) \cong \begin{cases} SO(q-1) & \text{if } \xi_1^2 - \sum_{i=1}^q \xi_i^2 > 0, \\ SO_o(1, q-2) & \text{if } \xi_1^2 - \sum_{i=1}^q \xi_i^2 < 0. \end{cases}$$

$R := SO(\xi) \ltimes N_s$ と定義し, $SO(\xi)$ の既約表現 (χ, V_χ) を 1 つ固定すると R の表現 $\eta := \chi \otimes \xi$ が定まる.

定義 G の既約認容表現 (π, H_π) に対して, 絡作用素の空間

$$\text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(H_\pi, C^\infty \text{Ind}_R^G(\eta))$$

を, Siegel-Whittaker 汎関数の空間と呼ぶ. ここで

$$C^\infty \text{Ind}_R^G(\eta) = \{f : G \rightarrow V_\chi, C^\infty \mid f(rg) = \eta(r)f(g) \ \forall (r, g) \in R \times G\}.$$

v_0 を π_ν の K -fixed vector とすると, $\Phi \in \text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(H_\pi, C^\infty \text{Ind}_R^G(\eta))$ に対して, $\Phi(v_0)$ は右 K 不変である. すなわち次の空間の元である:

$$C_\eta^\infty(R \backslash G / K) = \{f : G \rightarrow V_\chi, C^\infty \mid f(r g k) = \eta(r)f(g) \ \forall (r, g, k) \in R \times G \times K\}.$$

さらに $Z(\mathfrak{g})$ の元の同時固有関数になっている. そこで, class 1 主系列表現 π_ν に対する Siegel-Whittaker 関数の空間 $SW(\pi_\nu; \eta)$ を

$$SW(\pi_\nu; \eta) = \{f \in C_\eta^\infty(R \backslash G / K) \mid z f = c_\nu(z) f, z \in Z(\mathfrak{g})\}$$

で定義する. c_ν は π_ν から定まる $Z(\mathfrak{g})$ の指標. また関数空間 C に対して, C^{rap} で C の中の急減少関数全体を表す.

注 1 以後 $SO(\xi) \cong SO(q-1)$ の場合のみを扱う. このとき $\xi = (1, 0, \dots, 0)$ としても一般性を失わないので, 以後そのように仮定する.

注 2 $G = RAK$ という分解が成り立つので, Siegel-Whittaker 関数 f は A への制限で決まる. 以後, この A 動径成分 $f|_A$ という 2 変数関数の満たす微分方程式, およびその解空間について考察する.

4. R の表現

$SO(\xi) \cong SO(q-1)$ の最高ウェイト $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{[q-1/2]})$ の有限次元既約表現 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ を Gelfand-Zetlin 基底を用いて実現する ([6]). $n = q-1$ と書く. $m_i = (m_{1,i}, m_{2,i}, \dots, m_{[i/2],i})$ ($2 \leq i \leq n$) というベクトルを

$$m_n = \lambda,$$

$$m_{1,2k+1} \geq m_{1,2k} \geq m_{2,2k+1} \geq m_{2,2k} \geq \dots \geq m_{k,2k+1} \geq m_{k,2k} \geq -m_{k,2k+1}$$

$$m_{1,2k} \geq m_{1,2k-1} \geq m_{2,2k} \geq m_{2,2k-1} \geq \dots \geq m_{k-1,2k} \geq m_{k-1,2k-1} \geq |m_{k,2k}|$$

を満たすようにとり、それを並べたもの

$$M = (m_n, m_{n-1}, \dots, m_2) = \begin{pmatrix} m_{1,n} & m_{2,n} & \dots & m_{k,n} \\ & m_{2,n-1} & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \\ & & & m_{1,5} & m_{2,5} \\ & & & m_{1,4} & m_{2,4} \\ & & & & m_{1,3} \\ & & & & m_{1,2} \end{pmatrix}$$

を Gelfand-Zetlin パターンといい、その全体 $GZ(\lambda)$ は、最高ウェイト λ の $SO(n)$ の有限次元既約表現の基底 $\{v(M) | M \in GZ(\lambda)\}$ をパラメトライズする。 $\mathfrak{so}(n)$ の元 $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$ ($1 \leq i, j \leq n$) の作用は、

$$\begin{aligned} F_{2p+1,2p}v(M) &= \sum_{k=1}^p A_{2p}^k(M)v(M_{2p,k}^+) - \sum_{k=1}^p A_{2p}^k(M_{2p,k}^-)v(M_{2p,k}^-), \\ F_{2p+2,2p}v(M) &= \sum_{k=1}^p B_{2p+1}^k(M)v(M_{2p+1,k}^+) - \sum_{k=1}^p B_{2p+1}^k(M_{2p+1,k}^-)v(M_{2p+1,k}^-) \\ &\quad + \sqrt{-1}C_{2p}(M)v(M) \end{aligned}$$

で与えられ、一般の $F_{i,j}$ についてはこれらの交換子を計算すればわかる。ここで、 $M_{i,j}^\pm$ は M の $m_{i,j}$ を $m_{i,j} \pm 1$ にし、他の $m_{k,l}$ はそのままにすることを意味し、

$$\begin{aligned} A_{2p}^k(M) &= \frac{1}{2} \left| \frac{\prod_{r=1}^{p-1} ((l_{r,2p-1} - \frac{1}{2})^2 - (l_{k,2p} + \frac{1}{2})^2) \prod_{r=1}^p ((l_{r,2p+1} - \frac{1}{2})^2 - (l_{k,2p} + \frac{1}{2})^2)}{\prod_{r=1, r \neq k}^p (l_{r,2p}^2 - l_{k,2p}^2)(l_{r,2p}^2 - (l_{k,2p} + 1)^2)} \right|^{1/2}, \\ B_{2p+1}^k(M) &= \left| \frac{\prod_{r=1}^p (l_{r,2p}^2 - l_{k,2p+1}^2) \prod_{r=1}^{p+1} (l_{r,2p+2}^2 - l_{j,2p+1}^2)}{l_{k,2p+1}^2 (4l_{k,2p+1}^2 - 1) \prod_{r=1, r \neq k}^p (l_{r,2p+1}^2 - l_{k,2p+1}^2)(l_{k,2p+1}^2 - (l_{r,2p+1} - 1)^2)} \right|^{1/2}, \\ C_{2p}(M) &= \frac{\prod_{r=1}^p l_{r,2p} \prod_{r=1}^{p+1} l_{r,2p+2}}{\prod_{r=1}^p l_{r,2p+1} (l_{r,2p+1} - 1)}, \end{aligned}$$

ただし、 $l_{k,2p} = m_{k,2p} + p - k$, $l_{k,2p+1} = m_{k,2p+1} + p - k + 1$.

5. Siegel-Whittaker 関数の満たす微分方程式系

A の座標 (a_1, a_2) を $\exp(\log(a_1)A_1 + \log(a_2)A_2)$ で入れる。 $F \in SW(\pi_\nu; \eta)$ に対して、 $C_2F = c_\nu(C_2)F$, $C_4F = c_\nu(C_4)F$ という微分方程式の A 動径成分を書き下すと次を得る。

命題 N_s の指標 $\xi = (1, 0, \dots, 0)$, $SO(\xi)$ の最高ウェイト λ の有限次元既約表現 χ_λ を固定する。このとき、 $F(a) = \sum_{M \in GZ(\lambda)} f_M(a)v(M)$ を class 1 主系列表現に対する Siegel-Whittaker 関数の A 動径成分とする。新しい変数 $y = (y_1, y_2)$; $y_1 = a_1 a_2^{-1}$, $y_2 = a_1 a_2$ を導入すると

$$\begin{aligned} (1) \quad [D_2 - \frac{2y_1 y_2}{(y_1 - y_2)^2} S_q] F(y) &= \frac{1}{2} (\nu_1^2 + \nu_2^2 - \frac{1}{2} q^2 + q - 1) F(y), \\ (2) \quad [D_4 - \frac{4y_1 y_2}{(y_1 - y_2)^2} D'_4 S_q] F(y) &= (\nu_1 + \frac{q-2}{2})(\nu_2 + \frac{q-2}{2})(-\nu_1 + \frac{q-2}{2})(-\nu_2 + \frac{q-2}{2}) F(y). \end{aligned}$$

ここで、

$$D_2 = y_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + y_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + (q-2) \frac{y_1 y_2}{y_1 - y_2} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right) - (y_1^2 + y_2^2),$$

$$\begin{aligned}
D_4 = & y_1^4 \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} + y_2^4 \frac{\partial^4}{\partial y_2^4} - 2y_1^2 y_2^2 \frac{\partial^4}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} + \left(4 + \frac{2(q-2)y_2}{y_1 - y_2}\right) y_1^3 \frac{\partial^3}{\partial y_1^3} + \left(4 - \frac{2(q-2)y_1}{y_1 - y_2}\right) y_2^3 \frac{\partial^3}{\partial y_2^3} \\
& + \frac{2(q-2)y_1}{y_1 - y_2} y_1^2 y_2 \frac{\partial^3}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \frac{2(q-2)y_2}{y_1 - y_2} y_1 y_2^2 \frac{\partial^3}{\partial y_1 \partial y_2^2} \\
& + \left\{ -2(y_1^2 - y_2^2) - q(q-3) - 2(q-2)(q-3) \frac{y_2}{y_1 - y_2} \right\} y_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \\
& + \left\{ 2(y_1^2 - y_2^2) - q(q-3) + 2(q-2)(q-3) \frac{y_1}{y_1 - y_2} \right\} y_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \\
& + \left\{ -4y_1^2 - 2(q-2)y_2^2 - 2(q-2)y_1 y_2 \right\} y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \left\{ -2(q-2)y_1^2 - 4y_2^2 - 2(q-2)y_1 y_2 \right\} y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\
& + (y_1^2 - y_2^2)^2 + q(q-3)(y_1^2 + y_2^2) + 2(q-2)(q-3)y_1 y_2
\end{aligned}$$

$$D'_4 = y_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + y_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2y_1 y_2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} - (q-1) \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) - (y_1 - y_2)^2 + q - 1,$$

$$S_q = \sum_{1 \leq i \leq q-2} \chi_\lambda(F_{q-1,i}^2).$$

(1), (2)において, 各 $v(M)$ 成分を取り出せば f_M たちの微分差分方程式を得ることができる. しかし実際は次が成立する.

主張 S_q はスカラー作用素で,

$$S_q v(M) = - \sum_{i=1}^{[q/2]} \{ m_{i,q-1}^2 + (q-2i-1)m_{i,q-1} \} v(M)$$

従って命題の微分方程式は1つの関数 $f_M(y)$ の微分方程式を与える. さらに $f_M \neq 0$ ならば Gelfand-Zetlin パターン M において, $m_{1,q-1}$ 以外の成分はすべて0になる. 特に,

$$S_q = -m_{1,q-1}(m_{1,q-1} + q - 3) = -\lambda_1(\lambda_1 + q - 3)$$

(略証) 前半は $S_q + S_{q-1} + \cdots S_3$ が $\mathfrak{so}(q-1)$ の Casimir 元であることから従う. 後半は $C_\eta^\infty(R \backslash G/K)$ の元の compatibility から出てくる. すなわち $r_0 \in Z_K(A) \cap SO(\xi)$ に対して, $\phi(a) = \phi(r_0 a r_0^{-1}) = \chi(r_0) \phi(a)$ ($a \in A, \phi \in C_\eta^\infty(R \backslash G/K)$) より $\chi(r_0) = 1$ となり, $\chi(F_{i,j}) = 0$ ($i, j < q-1$) を得る.

6. 微分方程式系の解空間

命題の微分方程式系の特異因子は $y_1 = 0, y_2 = 0, y_1 - y_2 = 0$ である. $y_1 - y_2 = 0$ に沿った解を考え, $f(y) = \sum_{m,n \geq 0} c_{m,n} y_1^{\tau_1+m} (y_2/y_1 - 1)^{\tau_2+n}$ とおく. $c_{m,n}$ の差分方程式から特性根 (τ_1, τ_2) を計算すると,

$$(\tau_1, \tau_2) = (\pm \nu_i + \frac{1}{2}q, \lambda_1), (\pm \nu_i + \frac{1}{2}q, -\lambda_1 - q + 3)$$

となる. 8次元ある解のうち $(\lambda_1 \geq -\lambda_1 - q + 3)$ なので $\tau_2 = \lambda_1$ に対応する4次元の正則解について考察する. 残りの4次元の解は log pole を持つものと思われる. そこで, $f(y) = \sum_{n \geq 0} \varphi_n(y_1) (y_2/y_1 - 1)^{\lambda_1+n}$ とおくと, 命題より $\varphi_n = \varphi_n(y_1)$ は次の微分差分方程式系を満たすことがわかる.

$$\begin{aligned}
(a) \quad & 2(n+2)(n+\lambda_1+q-1)\varphi_{n+2} \\
& + [-(2n+2\lambda_1+q)\theta + (n+1)(4n+8\lambda_1+3q-4) + \lambda_1(2\lambda_1+q-2)]\varphi_{n+1}
\end{aligned}$$

$$+[\theta^2 - (2n + 2\lambda_1 + q - 1)\theta - 2y_1^2 + (n + \lambda_1)(2n + 2\lambda_1 + q - 2) - \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2 - \frac{1}{2}q^2 + q - 1)]\varphi_n - 2y_1^2\varphi_{n-1} - 2y_1^2\varphi_{n-2} = 0,$$

$$(b) \quad \begin{aligned} & [-4y_1^2(\theta - n - \lambda_1 - q + 3)(\theta - n - \lambda_1 - q + 2) \\ & + (\theta + \nu_1 - \frac{q}{2})(\theta + \nu_2 + \frac{q}{2})(\theta - \nu_1 - \frac{q}{2})(\theta - \nu_2 - \frac{q}{2})]\varphi_n \\ & - 4y_1^2(\theta - n - \lambda_1 - q + 3)(2\theta - 2n - 2\lambda_1 - q + 5)\varphi_{n-1} \\ & + y_1^2\{-6\theta^2 + (8n + 6q + 8\lambda_1 - 28)\theta - 4(n + \lambda_1)^2 - (4q - 24)(n + \lambda_1) \\ & - \frac{3}{2}q^2 + 14q - 39 + \nu_1^2 + \nu_2^2\}\varphi_{n-2} + y_1^4\varphi_{n-4} = 0. \end{aligned}$$

ここで, $\theta = y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}$. (b)において $n = 0$ とおくと, $y_1 - y_2 = 0$ に沿った境界値 $\varphi_0(y_1)$ の満たす 4 階の合流型の常微分方程式を得る. この解空間の基底は Meijer の G 関数という Γ 関数の逆 Mellin 変換により定義される特殊関数を用いて記述できる ([2]). さらに, Meijer の G 関数の漸近挙動から, 4 次元の解のうち急減少になるものは 1 次元であることがわかる. 従って,

定理 N_s の指標 $\xi = (1, 0, \dots, 0)$, $SO(\xi) \cong SO(q-1)$ の最高ウェイト $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{[(q-1)/2]})$ の既約表現 χ_λ を固定する. このとき,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(\pi_\nu, C^\infty \text{Ind}_R^G(\eta)^{\text{rap}}) \leq 1.$$

$F = \sum_{M \in GZ(\lambda)} f_M v(M) \in SW(\pi_\nu; \eta)^{\text{rap}}$ を class 1 主系列表現に対する Siegel-Whittaker 関数とすると,

(1) $\lambda = (\lambda_1, 0, \dots, 0)$ ($\lambda_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) 以外のときは $F = 0$.

(2) $\lambda = (\lambda_1, 0, \dots, 0)$ ($\lambda_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) のとき,

$$F_{\xi, \chi_\lambda} = f_{M_0} v(M_0), \quad M_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

となり, 変数変換を行い

$$f_{M_0}|_A(y_1, y_2) = \sum_{n \geq 0} \varphi_n(y_1)(y_2/y_1 - 1)^{\lambda_1 + n}$$

とおくと,

$$\varphi_0(y_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma - \sqrt{-1}\infty}^{\gamma + \sqrt{-1}\infty} \frac{\Gamma[\frac{q}{4} + \frac{\nu_1}{2} - s]\Gamma[\frac{q}{4} + \frac{\nu_2}{2} - s]\Gamma[\frac{q}{4} - \frac{\nu_1}{2} - s]\Gamma[\frac{q}{4} - \frac{\nu_2}{2} - s]}{\Gamma[\frac{\lambda_1 + q - 1}{2} - s]\Gamma[\frac{\lambda_1 + q}{2} - s]} y_1^{2s} ds.$$

で, $\varphi_n(y_1)$ ($n \geq 1$) は (a) より一意に決定される.

注 1 定理の不等号が等号になることを示すには, (a), (b) が compatible である, すなわち, $\varphi_0(y_1)$ から (a) によって一意に定まる $\varphi_n(y_1)$ が (b) を満たしていることを証明しなければならない. これはおそらく正しいと思われるが現在のところまだ確認できていない. 実際 $q = 3$ のときは ν_i がある条件を満たしているときは F の積分表示式が与えられている ([5]).

注 2 保型 L 関数の Γ 因子の計算に関係あると思われる積分を計算しておく. (cf. [3])

$$\int_0^\infty \varphi_0(v) v^{s-1} dv = \frac{\Gamma[\frac{q}{4} + \frac{\nu_1}{2} + \frac{s}{2}]\Gamma[\frac{q}{4} + \frac{\nu_2}{2} + \frac{s}{2}]\Gamma[\frac{q}{4} - \frac{\nu_1}{2} + \frac{s}{2}]\Gamma[\frac{q}{4} - \frac{\nu_2}{2} + \frac{s}{2}]}{\Gamma[\frac{\lambda_1 + q - 1}{2} + \frac{s}{2}]\Gamma[\frac{\lambda_1 + q}{2} + \frac{s}{2}]}.$$

References

- [1] N. Bourbaki, Groupes et algèbre de Lie, chapitres 7 et 8, Hermann.
- [2] A. Erdelyi et. al., Higher Transcendental Functions, vol.1, McGraw-Hill, (1953).
- [3] A. Hori, Andrianov's L -functions associated to Siegel wave forms of degree two, Math. Ann. 303 (1995), 195–226.
- [4] T. Ishii, Siegel-Whittaker functions on $Sp(2, \mathbf{R})$ for principal series representations, preprint.
- [5] S. Niwa, On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space of degree 2, Nagoya Math. J. 121, (1991), 171–184.
- [6] N. Vilenkin and A. Klimyk, Representation of Lie groups and special functions, vol3, Kluwer Academic Publishers.