

HEUN の微分方程式と CALOGERO 系について

竹村 剛一 (横浜市大総合理学)

ABSTRACT. Heun の微分方程式の楕円関数表示により表示される 1 粒子 Inozemtsev 模型について調べた。得られた結果は、三角関数の模型からの正則摂動可能性、Bethe 仮設法の開発、有限帯ポテンシャルであること等である。また、部分的結果であるが、モノドロミーの超楕円関数による積分表示式も得られる。

1. はじめに

1 粒子 (BC_1 -)Inozemtsev 模型とは、1 次元多体系の量子力学の模型であり、ハミルトニアンが

$$(1.1) \quad H := -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i + 1)\wp(x + \omega_i),$$

により与えられる模型である。ここで、 l_0, l_1, l_2, l_3 は結合定数であり、 $\wp(x)$ は基本周期は $(1, \tau)$ であるような Weierstrass の $\wp$ 関数である。また、 $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 1/2$, $\omega_2 = \tau/2$, $\omega_3 = (1 + \tau)/2$ である。

この小論では、Inozemtsev 模型の固有値、固有関数にかかわることを間接的なものも含めて述べていく予定である。

まず、何故この模型を調べたいと思うかということを説明する。

70 年頃から、Calogero-Moser-Sutherland 系と呼ばれる模型たちなどを扱った量子可積分系の一連の研究がある。量子可積分系とは、量子力学の「可積分」な模型たちのことである。ここでの「可積分」の意味は、粒子数と同等の数だけ可換な微分作用素があるということで、解析力学における Liouville の意味での「古典可積分性」の量子論への対応物と思えるものである。

Olshanetsky と Perelomov による論文 ([9]) では、ルート系に付随する模型について、楕円関数をポテンシャルとしてもつものやそのポテンシャルの退化、模型の性質などが総合的に扱われている。また、Inozemtsev

は後に BC_N -Inozemtsev 模型と呼ばれることになる模型を提唱した。
([4]).

ここまでは、可積分な模型の発見についての話だが、模型の分類についても研究がなされている。

落合、大島、関口の三氏は、可換な微分作用素に少しの仮定をおくことにより、古典型のルート系に対応する対称性をもつ模型について、可積分な模型の分類を行なった ([8]). 結果として、 B_N 型のルート系に対応する場合において、 $N \geq 3$ とすると BC_N -Inozemtsev 模型のみが残るということになっている。

この観点から、 BC_N -Inozemtsev 模型は可積分な模型の中で普遍的なものであると思うことができる。これの $N = 1$ の場合のハミルトニアンが (1.1) である。

BC_1 -Inozemtsev 模型を別の視点から見てみる。これも大島氏らにより指摘されているが、 BC_1 -Inozemtsev 模型の式を楕円関数を用いた変数変換などをほどこし書き換えると、リーマン球面において4点に確定特異点をもつ2階の常微分方程式になるのである。なお、これを標準化したものは Heun の方程式と呼ばれている。(ガウスの超幾何微分方程式は3点の場合である。) また、Heun の方程式から出発しても、あるパラメータの BC_1 -Inozemtsev 模型に対応することもわかり、標語的に言えば、 BC_1 -Inozemtsev 模型と Heun の方程式は1対1に対応しているのである。この対応については、後ほどもう少し具体的に論じる。

なお、Heun の方程式を楕円関数を用いて書き換えると BC_1 -Inozemtsev 模型に対応する式がでてくる、ということは19世紀より知られているようである。

よって、 BC_1 -Inozemtsev 模型を調べるということは、 BC_N -Inozemtsev 模型に代表される可積分系を調べる足掛かりとして、また、Heun の方程式自体を調べるというについて、重要性があるのではないか、と思われる。

次に、どのようにして BC_1 -Inozemtsev 模型を調べているか、ということについて述べる。

もともとの量子力学の問題からの動機として、この模型では区間 $(0, 1)$ において 2 乗可積分な固有関数とその固有値を求めたい、というものがある。以下において、2 乗可積分という条件は、課す場合と(とりあえず)課さない場合両方とも考察の対象となる。

1つの手として、楕円関数の 1 ではない周期 τ について、 $\tau \rightarrow \sqrt{-1}\infty$ といういわゆる三角極限をとり、そこからの摂動として調べる、というものが考えられる。極限をとった模型はポテンシャルが三角関数となり、この模型の 2 乗可積分な固有関数は超幾何関数型直交多項式 (Jacobi 多項式) で表され、模型の解析が格段にしやすくなる。これを基にして考えよう、という立場である。小森氏との共同研究により、Kato-Rellich 理論を用いて主に A 型の楕円型 Calogero-Moser-Sutherland 模型に対して三角的 Calogero-Moser-Sutherland 模型からの正則摂動可能性を示しているが、 BC_1 -Inozemtsev 模型についても同様な結果が成立しているのである。なお、ここでの正則摂動可能性により、摂動論のアルゴリズムで計算される形式的べき級数で表される固有値などの収束性が示される。

別の視点から見てみる。特別な結合定数の場合には、 BC_1 -Inozemtsev 模型のハミルトニアンは 2 重周期関数からなるある有限次元空間に作用している。この有限次元空間やそこでの固有値と 2 乗可積分な固有関数との関係について調べることができる。摂動によって得られた固有値、固有関数の大域的性質を調べるのは大変だが、2 重周期関数からなる有限次元空間から得られた固有値、固有関数については大域的性質を調べるのがいくぶんか可能ではないかと期待される。

他の視点としては、Bethe 仮設法による方法がある。Bethe 仮設法とは、もともとは可解格子模型を解くために用いられたいくつかの手段を指すようだが、ここでの Bethe 仮設法は、ハミルトニアンの (2 乗可積分とは限らない) 固有値、固有関数を求める問題を、有限個の変数からなる超越方程式系 (もしくは代数方程式系) の解を求める問題

に帰着する方法を指すことにする。対称性が A_1 型の楕円型 Calogero-Moser-Sutherland 模型については本質的には Whittaker-Watson の本により ([16])、高階の A 型楕円型 Calogero-Moser-Sutherland 模型については Felder と Varchenko ([2]) により Bethe 仮設法の導入がなされている。(ただし、Whittaker-Watson においては Bethe 仮設法という言葉は用いられていない) なお、([12]) において、この Bethe 仮設法を用いて 2 乗可積分な固有関数を構成し、応用として正則摂動可能性を導いた。

BC_1 -Inozemtsev 模型についても、Bethe 仮設法を開発することができたので、これについても後に述べることにする。なお、Bethe 仮設法において、 l_i ($i = 0, 1, 2, 3$) がすべて正の整数である、という仮定をおくが、これは議論を進める上において本質的な役割を果たす。ところで、Felder と Varchenko は高階の A 型の仕事において、KZB 方程式の積分表示について漸近挙動を考えることにより Bethe 仮設法を導出している。ここでの積分表示やその漸近挙動での対応物はアフィンリー代数の表現論と深く関わっている。しかし、 BC_1 -Inozemtsev 模型についてはほとんど関数論だけを用いており、現状では表現論との関係は明らかではない。 BC_N -Inozemtsev 模型において Bethe 仮設法が開発されるために表現論的側面からの攻略が期待されるが、筆者にとって、有効そうなアイデアや状況証拠が大変不足している。

ところで、 BC_1 -Inozemtsev 模型について、Bethe 仮設法を用いてどの程度の解が表示できるか、ということがわかっており、有限個以外の固有値に対して表示できることがわかる。ここで先程に述べた 2 重周期関数からなる有限次元空間が特別な役割を果たしているのである。

そして、今述べたことと関係して、 BC_1 -Inozemtsev 模型のポテンシャルは、結合定数がすべて正の整数のときに代数的な意味で有限帯ポテンシャルである、ということが導かれる。代数的な意味で有限帯ポテンシャルということは、おおよそはハミルトニアンと可換な奇数階の微分作用素が存在する、ということである。これに関しては、ソリトン理論の方向から独立に Verdier と Treibich の仕事がある ([15])。また、有限帯ポテンシャルの一般論を用いると、少なくとも $l_2 = l_3 = 0$ で l_0, l_1 がともに正の整数のときには、周期 1 や τ ずらしたときのモノドロミーについて、超楕円積分により積分表示ができることがわかる。この式

は固有値などの大域的性質を調べるのに大きな役割を果たすと期待できる。ここでの事実を Heun の方程式の話に焼きなおすと、4 点の確定特異点のうちちょうど 2 点を含むサイクルでの大域的なモノドロミーが超楕円積分を用いた積分表示をもつ、ということになり、難しいと言われてきた 4 点確定特異点の 2 階の微分方程式の解のモノドロミーを求めるという問題に一石を投じるものとなると期待される。

2. HEUN の微分方程式と INOZEMTSEV 系の関係

この節では、 BC_1 -Inozemtsev 模型を変形することにより Heun の微分方程式がでてくると、これの逆の対応について見てみる。本質的には大島・関口の二人による議論 ([10]) と同じである。([11, 13, 14]) にも同様の議論がある。

また、Heun の方程式を楕円関数を用いて書き換えると BC_1 -Inozemtsev 模型に対応する式がでてくる、ということは 19 世紀より知られているようである。

BC_1 -Inozemtsev 模型は、(1.1) によりハミルトニアンが定まっている 1 次元多体系の量子力学の模型である。ここで、便利のため、ハミルトニアンを再記しておく。

$$(2.1) \quad H := -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i + 1)p(x + \omega_i).$$

楕円関数の周期 τ を虚部が正である複素数とする。なお、自己共役性などを議論するときには τ を虚部が正である純虚数に制限することもある。

$e_i = p(\omega_i)$ ($i = 1, 2, 3$) (ω_i は半周期たち), $a = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$, $\tilde{\Phi}(w) = w^{\frac{l_0+1}{2}}(w-1)^{\frac{l_1+1}{2}}(aw-1)^{\frac{l_2+1}{2}}$ としておく。(a は楕円モジュラー関数 $\lambda(\tau)$ でもある。)

$f(x)$ を固有値が E である (2 乗可積分とは限らない) 固有関数とする。つまり、

$$(2.2) \quad (H - E)f(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i + 1)p(x + \omega_i) - E \right) f(x) = 0.$$

とする。

$$(2.3) \quad w = \frac{e_1 - e_3}{\wp(x) - e_3},$$

という変数変換により、式 (2.2) は次の式と同値になる。

$$(2.4) \quad \left(\left(\frac{d}{dw} \right)^2 + \left(\frac{l_0 + \frac{3}{2}}{w} + \frac{l_1 + \frac{3}{2}}{w-1} + \frac{l_2 + \frac{3}{2}}{w - \frac{1}{a}} \right) \frac{d}{dw} + \frac{\alpha\beta w + q}{w(w-1)(w - \frac{1}{a})} \right) \tilde{f}(w) = 0,$$

ここで、 $\tilde{f}\left(\frac{e_1 - e_3}{\wp(x) - e_3}\right) \tilde{\Phi}\left(\frac{e_1 - e_3}{\wp(x) - e_3}\right) = f(x)$, $\alpha = \frac{l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + 4}{2}$, $\beta = \frac{l_0 + l_1 + l_2 - l_3 + 3}{2}$,
 $q = \frac{E}{4(e_1 - e_3)} + \frac{a^{-1}}{4} \left(\frac{a+1}{3} \sum_{i=0}^3 l_i(l_i + 1) - a(l_0 + l_2 + 2)^2 - (l_0 + l_1 + 2)^2 \right)$
 としている。

この方程式が Heun の (微分) 方程式と呼ばれるものである。([11])

微分方程式 (2.4) はリーマン球面上において $0, 1, a^{-1}, \infty$ の 4 点のみに特異点を持ち、すべて高々確定特異点である。各確定特異点の特性指数は以下の Riemann's P -symbol から読み取れる。

$$(2.5) \quad P \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & a^{-1} & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ -l_0 - \frac{1}{2} & -l_1 - \frac{1}{2} & -l_2 - \frac{1}{2} & \beta \end{array} \begin{array}{c} z \\ q \end{array} \right).$$

ここまででは、Inozemtsev 模型からいかにしてリーマン球面上に 4 点確定特異点をもつ 2 階の微分方程式や Heun の方程式が導き出されるかを論じて来た。

逆に、リーマン球面上に 4 点確定特異点をもつ 2 階の微分方程式が与えられたとしよう。すると、適当な 1 次分数変換等により、あるパラメーターの Heun の方程式 (2.4) に変換できることがわかる。

もし、 $a \neq 0, 1$ ならば、 $a = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ となるような τ が存在することが知られている。こうして、 τ と、付随して e_1, e_2, e_3 が決定される。また、 l_i ($i = 0, 1, 2, 3$) は特性指数より決定され、 E も他が決定されていることから決まる。

こうして、リーマン球面上に 4 点確定特異点をもつ 2 階の微分方程式から Inozemtsev 模型が導出されるのである。

3. 三角極限と摂動論

この節では BC_1 -Inozemtsev 模型を摂動論を用いて考察する際の道筋を述べる。

$p = \exp(\pi\sqrt{-1}\tau)$ とおく。すると、 $\tau \rightarrow \sqrt{-1}$ という多少曖昧な書き方の極限は $p \rightarrow 0$ という極限に対応する。以下では感覚的には p が 0 に近いと思って議論する。

p 関数の p での展開の式などにより、 BC_1 -Inozemtsev 模型のハミルトニアン (2.1) は以下の表示をもつことがわかる。

$$(3.1) \quad H = H(p) = H_T + C_T + \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x)p^k.$$

ここで、 C_T は x や p に依存しない定数であり、 H_T は以下の式で与えられる三角的 BC_1 -Calogero-Sutherland 模型のハミルトニアンである。

$$(3.2) \quad H_T = -\frac{d^2}{dx^2} + l_0(l_0+1)\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} + l_1(l_1+1)\frac{\pi^2}{\cos^2 \pi x}$$

そして、 $V_k(x)$ は x についての関数であり、それぞれが $\cos 2\pi l x$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の有限和で書かれる。

とくに、 $p = 0$ のときは、 BC_1 -Inozemtsev 模型のハミルトニアンは三角的 BC_1 -Calogero-Sutherland 模型のハミルトニアンと等価となる。

一般の p での $H(p)$ では固有値問題はわかりにくいだが、実は H_T においては固有値問題は比較的よくわかる。この H_T での結果を踏み台にして $H(p)$ の固有値問題を後で考えていくことになる。

H_T の二乗可積分な固有関数・固有値について述べる。 $l_0 > 0, l_1 > 0$ を仮定しておく。

$$(3.3) \quad \Phi(x) = (\sin \pi x)^{l_0+1} (\cos \pi x)^{l_1+1},$$

$$(3.4)$$

$$\psi_m(x) = \psi_m^{(l_0, l_1)}(x) = c_m G_m \left(l_0 + l_1 + 2, \frac{2l_0 + 3}{2}; \sin^2 \pi x \right) \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}),$$

とする。ここで、 $G_m(\alpha, \beta; w) = {}_2F_1(-m, \alpha + m; \beta; w)$ は次数 m の Jacobi 多項式であり、 c_m は正規化定数とする。

すると、

$$(3.5) \quad H_T \Phi(x) \psi_m(x) = \pi^2 (2m + l_0 + l_1 + 2)^2 \Phi(x) \psi_m(x),$$

が成立しているのである。このことは、 $w = \sin^2 \pi x$ という変換により超幾何微分方程式に書き換えることによりわかる。また、 c_m の決め方

等により、

$$(3.6) \quad \langle \Phi(x)\psi_m(x), \Phi(x)\psi_{m'}(x) \rangle = \delta_{m,m'}$$

も成立している。

そして、ここでの固有関数たちは二乗可積分な関数からなるあるヒルベルト空間での完全正規直交基底になっていることもわかっている。

ここまでで H_T の二乗可積分な固有関数・固有値について述べてきた。以下では摂動論のアルゴリズムによる $H(p)$ の固有値・固有関数の求め方について述べる。

$v_m = \Phi(x)\psi_m(x)$, とおく。 v_m は $H(0) = H_T + C_T$ の固有ベクトルでもある。 v_m の $H(0) = H_T + C_T$ についての固有値を $E_m (= \pi^2(2m + l_0 + l_1 + 2)^2 + C_T)$ とおく。

$H(p)$ の固有値・(正規化された)固有ベクトルを $E_j(p) = E_j + \sum_{k=1}^{\infty} E_j^{(k)} p^k$, $v_j(p) = v_j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j'} c_{j,j'}^{(k)} v_{j'} p^k$ という形でとりあえず形式的に求める。つまり、形式的べき級数として、

$$(3.7) \quad (H_T + C_T + \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x)p^k)v_j(p) = E_j(p)v_j(p),$$

$$\langle v_j(p), v_j(p) \rangle = 1,$$

が満たされるように $E_j^{(k)}$ や $c_{j,j'}^{(k)}$ を求めるのである。

まず、 $V_k(x)v_{j'} = \sum_{j''} d_{j,j''}^{(k)} v_{j''}$ となる係数 $d_{j,j''}^{(k)}$ を求める。これは、超幾何多項式に関する Pieri formula を用いることにより計算できる。あとは、式 (3.7) の p^k の各係数を見ることにより $E_j^{(k)}$ や $c_{j,j'}^{(k)}$ の漸化式が出て来て、これと順々に計算することにより、 $E_j(p)$ や $v_j(p)$ の各係数が一意的に求まるのである。

ここまでで、 $H(p)$ の固有値・固有ベクトルの形式的べき級数としての求め方を述べてきた。ここで、これらの形式的べき級数が問題となる。一般には、このような摂動の計算はできるがべき級数の収束半径が0となってしまう模型があることが知られているので収束性は自明な問題ではない。(例えば、 $H = -(\frac{d}{dx})^2 + x^2 + \alpha x^4$ の $\alpha = 0$ のそばでの α についての固有値の展開式の収束半径は0となる。)

ところが、ここでの $H(p)$ についてのべき級数については、収束性がいえるのである。(固有ベクトルの収束性についてはどのような意味で

か、ということをはっきりさせる必要はある。詳しくは ([14]) を参照のこと。) 収束性の証明は 2 つある。1 つは Bethe 仮設法によるもので、もう 1 つは Kato-Rellich の理論によるものである。これらについては後の章でふれることにする。

ここでは p についての摂動について述べたが、同様の議論が式 (2.4) の a についての摂動についてもいえる。($p \rightarrow 0$ と $a \rightarrow 0$ が対応している。)

固有値・固有関数の具体的なべき級数の計算は a についての展開によるほうがやりやすい面がある。([14])

4. KATO-RELLICH の理論と関わる結果

この節では Kato-Rellich の正則摂動の理論 ([5]) に深く関わる結果を記す。詳しくは ([14]) を見てもらいたい。

Theorem 4.1. 実数 p は $-1 < p < 1$ を満たすとする。 $H(p)$ の 2 乗可積分な空間での固有値は、以下の条件を満たすような $\tilde{E}_i(p)$ によりラベル付けされる。

- (i) $\tilde{E}_i(p)$ は $-1 < p < 1$ において実解析的である。
- (ii) $\tilde{E}_i(0) = E_i$ となる。ここで、 E_i は前章において式 (3.7) の少し前で定義されていた三角的な模型の固有値を定数だけずらしたものである。

また、固有値 $\tilde{E}_i(p)$ に対応する固有ベクトル $\tilde{v}_i(p, x)$ は L^2 (2 乗可積分な関数の空間) の元として $-1 < p < 1$ において p について実解析的であり、 $\{\tilde{v}_i(p, x)\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ は L^2 -空間において正規直交基底となる。

Corollary 4.2. 前節の摂動論によるアルゴリズムにより得られる固有値 $E_i(p)$ は $|p|$ が十分小さければ収束し、 $\tilde{E}_i(p)$ と一致する。また、固有ベクトル $v_i(p)$ も $|p|$ が十分小さければ L^2 ノルムにより収束し、 L^2 の元として $\tilde{v}_i(p, x)$ と一致する。

上の定理と系は Kato-Rellich の正則摂動の理論が適用できることがわかればそれほどの困難はなく示される。

実は、 $\tilde{v}_i(p, x)$ が $p \rightarrow 0$ において三角的な模型の固有ベクトル v_i に x についてコンパクト一様収束していることと、摂動論のアルゴリズムにより得られる固有ベクトル $v_i(p)$ も $p \rightarrow 0$ において三角的な模型の固有ベクトル v_i に x についてコンパクト一様収束していることもわかる

が、これらについては、Kato-Rellich の正則摂動の一般論とは別の議論が必要となる。

5. 有限次元不変部分空間

ここでは、” ほぼ ” 2 重周期的な関数の空間で、1 変数 Inozemtsev 模型のハミルトニアン H (1.1) によって不変となる空間について述べる。この空間での H での固有値は Bethe 仮設法についての定理を記述する際に重要な役割を果たす。

「ほぼ 2 重周期的な関数の空間」とは、 $f(x+1) = \pm f(x)$, $f(x+\tau) = \pm f(x)$ (複合任意) を満たす有理型関数から生成される空間とする。

以下では簡単のため、 l_0, l_1, l_2, l_3 はすべて 0 以上の整数とし、 $l_0 \geq l_1 \geq l_2 \geq l_3$ としておく。

Theorem 5.1. 上の仮定のもとで、ほぼ 2 重周期的な関数の空間の有限次元で極大な空間 V が存在する。

- (i) もし $l_0 + l_1 + l_2 + l_3$ が偶数であり、 $l_0 + l_3 \geq l_1 + l_2$ であれば、 V の次元は $2l_0 + 1$ である。
- (ii) もし $l_0 + l_1 + l_2 + l_3$ が偶数であり、 $l_0 + l_3 < l_1 + l_2$ であれば、 V の次元は $l_0 + l_1 + l_2 - l_3 + 1$ である。
- (iii) もし $l_0 + l_1 + l_2 + l_3$ が奇数であり、 $l_0 \geq l_1 + l_2 + l_3 + 1$ であれば、 V の次元は $2l_0 + 1$ である。
- (iv) もし $l_0 + l_1 + l_2 + l_3$ が奇数であり、 $l_0 < l_1 + l_2 + l_3 + 1$ であれば、 V の次元は $l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + 2$ である。

なお、ここでの空間 V はさらに小さい 4 つの部分空間の直和となっており、それぞれの空間は各周期をずらしたときの符号の変化と半周期での極 (または零) の位数により統制されている。

Definition 1. $P(E)$ を上記の定理での有限次元空間 V でのハミルトニアン H (1.1) についての *monic* な特性多項式とする。つまり、 V での H の広義の固有値を α_i (重複度分複製しておく) としたとき、 $P(E) = \prod_{i=1}^{\dim V} (E - \alpha_i)$ となっているものである。

6. BETHE 仮設法

この章では、1 粒子 Inozemtsev 模型においての Bethe 仮設法について述べる。ここでの Bethe 仮設法は、模型のハミルトニアン (2 乗可積分とは限らない) 固有値、固有関数を求める問題を、有限個の変数からなる超越方程式系の解を求める問題に帰着する方法を指す。

まず、([13]) において示されている Bethe 仮設法についての主定理を述べる。なお、以下の定理において、 $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合、つまり、Lame 方程式の場合は Whittaker-Watson の本 ([16]) に載っている結果と本質的に同じになっている。

Theorem 6.1. l_0, l_1, l_2, l_3 をすべて 0 以上の整数とし、 $l = l_0 + l_1 + l_2 + l_3 \neq 0$ とする。

$$(6.1) \quad \tilde{\Lambda}(x) = \frac{\exp(\pi\sqrt{-1}cx) \prod_{j=1}^l \theta(x+t_j)}{\theta(x)^{l_0} \theta(x+1/2)^{l_1} \theta(x+(1+\tau)/2)^{l_2} \theta(x+\tau/2)^{l_3}},$$

とし、 $t_j \neq t_{j'}$ ($j \neq j'$) も仮定しておく。

1 粒子 Inozemtsev 模型のハミルトニアン H (1.1) に対し、ある固有値 E が存在して $H\tilde{\Lambda}(x) = E\tilde{\Lambda}(x)$ が成立するための必要十分条件は、 $t_1, \dots, t_l, c$ が以下の方程式たち (Bethe 方程式) を満たすことである。

(6.2)

$$\begin{aligned} & c\pi\sqrt{-1} + \sum_{k \neq j} \frac{\theta'(t_k - t_j)}{\theta(t_k - t_j)} + l_0 \frac{\theta'(t_j)}{\theta(t_j)} + l_1 \frac{\theta'(t_j - 1/2)}{\theta(t_j - 1/2)} \\ & + l_2 \frac{\theta'(t_j - (1+\tau)/2)}{\theta(t_j - (1+\tau)/2)} + l_3 \frac{\theta'(t_j - \tau/2)}{\theta(t_j - \tau/2)} = 0, \quad (j = 1, \dots, l) \\ & (1 - \delta_{l_0,0}) \left(c\pi\sqrt{-1} + \pi\sqrt{-1}(l_2 + l_3) + \sum_{j=1}^l \frac{\theta'(t_j)}{\theta(t_j)} \right) = 0, \\ & (1 - \delta_{l_1,0}) \left(c\pi\sqrt{-1} + \pi\sqrt{-1}(l_2 + l_3) + \sum_{j=1}^l \frac{\theta'(t_j - 1/2)}{\theta(t_j - 1/2)} \right) = 0, \\ & (1 - \delta_{l_2,0}) \left(c\pi\sqrt{-1} - \pi\sqrt{-1}(l_0 + l_1) + \sum_{j=1}^l \frac{\theta'(t_j - (1+\tau)/2)}{\theta(t_j - (1+\tau)/2)} \right) = 0, \\ & (1 - \delta_{l_3,0}) \left(c\pi\sqrt{-1} - \pi\sqrt{-1}(l_0 + l_1) + \sum_{j=1}^l \frac{\theta'(t_j - \tau/2)}{\theta(t_j - \tau/2)} \right) = 0. \end{aligned}$$

固有値 E の値は次のようになる。

(6.3)

$$E = \pi^2(c^2 + (l_0 + l_1)(l_2 + l_3)) + l(l+1)\eta_1 - \sum_{j < k} \frac{\theta''(t_j - t_k)}{\theta(t_j - t_k)} \\ + (l_0 l_1 + l_2 l_3)e_1 + (l_0 l_2 + l_1 l_3)e_2 + (l_0 l_3 + l_1 l_2)e_3 \\ + \sum_{j=1}^l \left(l_0 \frac{\theta''(t_j)}{\theta(t_j)} + l_1 \frac{\theta''(t_j - 1/2)}{\theta(t_j - 1/2)} + l_2 \frac{\theta''(t_j - (1+\tau)/2)}{\theta(t_j - (1+\tau)/2)} + l_3 \frac{\theta''(t_j - \tau/2)}{\theta(t_j - \tau/2)} \right)$$

ここで、 $\eta_1 = \zeta(1/2)$ であり、 $\zeta(x)$ は擬周期が 1 と τ である *Weierstrass* の *zeta* 関数である。($\zeta'(x) = -p(x)$ をみたしている。)

さらに、 E が $P(E) \neq 0$ を満たす、つまり、 E が”ほぼ” 2 重周期関数の空間の固有値となっていないならば、 $(H - E)f(x) = 0$ の解の空間の基底として上記の $\tilde{\Lambda}(x)$ と $\tilde{\Lambda}(-x)$ がとれる。

この定理によると、有限個以外の E については、Bethe 仮設法によるもので解が表示できるわけである。

$\tilde{\Lambda}(x)$ は 2 乗可積分ではないなど、ここまででは 2 乗可積分ということとは無視していた。ここから、2 乗可積分の条件との関係について述べる。

(6.1) における c が整数であり、しかも 2 の倍数であるとする。このとき、

$$(6.4) \quad \tilde{\Lambda}^{sym}(x) = \tilde{\Lambda}(x) - (-1)^{l_0} \tilde{\Lambda}(-x)$$

とおくと、これは実軸上で正則となり、周期 1 の周期関数となる。(つまり、 $0, 1/2, 1, \dots$ 等での極が消えてしまう。)

このように、 $c \in 2\mathbb{Z}$ 、ということが 2 乗可積分な固有関数と対応する「境界条件」となっている。

ここで、三角極限について考える。 $l_2 = l_3 = 0$ とし、 l_0, l_1 はともに正の整数とする。楕円関数の 1 つの周期 τ を $\sqrt{-1}\infty$ に飛ばす極限を考える。この極限に対応して、 $\theta(x) \rightarrow \sin \pi x$ となっている。また、三角極限をとった場合にも、Theorem 6.1 に対応するものが成立している ([13])。この場合には、式 (6.3) に対応する c と E の関係式として、あ

る $t_1, \dots, t_l$ に依存しない定数 D が存在して $E = \pi^2 c^2 + D$ という形の式が成立することがわかっている。

$c_m = l_0 + l_1 + 2 + 2m$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とする。このとき、 $E_m = \pi^2 c_m^2 + D$ に対応する固有関数が、式 (6.1) の三角関数版である

$$(6.5) \quad \tilde{\Lambda}_T(x) = \frac{\exp(\pi\sqrt{-1}c_m x) \prod_{j=1}^{l_0+l_1} \sin \pi(x+t_j)}{(\sin \pi x)^{l_0} (\cos \pi x)^{l_1}},$$

という形で表示でき、 $\tilde{\Lambda}_T^{sym}(x) = \tilde{\Lambda}_T(x) - (-1)^{l_0} \tilde{\Lambda}_T(-x)$ とすると、ある 0 でない定数 B_m を用いて

$$(6.6) \quad \tilde{\Lambda}_T(x) = B_m \Phi(x) \psi_m(x)$$

と書けることもわかる。ここで、 $\Phi(x)$, $\psi_m(x)$ は式 (3.3, 3.4) にて登場した関数である。

さて、 c_m を固定しておく。すると、 $p = \exp(\pi\sqrt{-1}\tau)$ の $p = 0$ のそばの Bethe 方程式の解が正則につながることを、いくつかの議論をすることから出てくる。この Bethe 方程式の解の正則性より、少し弱い形の p についての Inozemtsev 模型の三角関数の模型からの正則摂動可能性を導出することもできる。つまり、Kato-Rellich の理論を用いずにも、正則摂動可能性がでてくるのである。

ここで、Theorem 6.1 の後半部、つまり、 E が $P(E) \neq 0$ を満たすとき、 $(H - E)f(x) = 0$ の解の空間の基底として $\tilde{\Lambda}(x)$ と $\tilde{\Lambda}(-x)$ がとれる、ということの証明の方針を述べておく。詳しくは ([13]) を参照のこと。以下の式で、次章の有限帯ポテンシャルの議論で現れるものもある。なお、Theorem 6.1 の前半部は、極が消える条件を計算すればでてくる。

さて、

$$(6.7) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1) p(x+\omega_i) - E \right) f(x) = 0.$$

の解について考えてみよう。微分方程式の形から、解の特異点は $x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} + \frac{\tau}{2}\mathbb{Z}$ のみにありうることがわかる。

ところで、もし l_0, l_1, l_2, l_3 がすべて整数であれば、各特異点での特性指数はともに整数となり、Apparant な特異点となる。(べき級数展開で $\log$ がでてこない。)

ゆえに、方程式 (6.7) の解の空間上の線形変換 T_1, T_τ を $T_1 f(x) = f(x+1), T_\tau f(x) = f(x+\tau)$ により定めると、 T_1 と T_τ は可換であることがわかる。よって同時対角化することにより、(6.7) のある解 $\Lambda(x)$ と 0 でない定数 m_1, m_τ が存在し、

$$(6.8) \quad T_1 \Lambda(x) = m_1 \Lambda(x), \quad T_\tau \Lambda(x) = m_\tau \Lambda(x),$$

が成立することがわかる。ここで、

$$(6.9) \quad \Xi(x) = \Lambda(x)\Lambda(-x),$$

とおくと、 $\Xi(x)$ は 2 重周期関数となり、以下の微分方程式 (方程式 (6.7) の解の積が満たす方程式) が成立する。

$$(6.10) \quad \left(\frac{d^3}{dx^3} - 4 \left(\sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i) - E \right) \frac{d}{dx} - 2 \left(\sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1)\wp'(x+\omega_i) \right) \right) \Xi(x) = 0,$$

逆に、2 重周期性と微分方程式 (6.10) をみたすということより $\Xi(x)$ は定数倍を除き一意に定まる。

また、 $\frac{d}{dx}(\Lambda(x)\frac{d}{dx}\Lambda(-x) - \Lambda(-x)\frac{d}{dx}\Lambda(x)) = 0$ という式などにより、以下の積分表示式が導かれる。

$$(6.11) \quad \Lambda(\pm x) = \sqrt{\Xi(x)} \exp \int \frac{\mp \sqrt{Q(E)} dx}{\Xi(x)}.$$

ここで、 $Q(E)$ は E に関する多項式となっており、

$$(6.12) \quad Q(E) = \Xi(x)^2 \left(\sum_{i=0}^3 l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i) - E \right) - \frac{1}{2}\Xi(x)\frac{d^2\Xi(x)}{dx^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\Xi(x)}{dx}\right)^2$$

が成立している。ここで、 $\Lambda(x)$ や $\Xi(x)$ も E に依存していることに注意しておく。

積分表示式 (6.11) などにより、 $\Lambda(x)$ の零点を $t_1, \dots, t_l$ とおくことにより、 $\Lambda(x)$ が式 (6.1) のように表示できることがわかるのである。

また、次の命題も証明を完結させるために用いられる。

Proposition 6.2. $P(E) = 0$ の零点の集合と $Q(E) = 0$ の零点の集合は一致する。

これに関係して、次の予想を立てている。 $(P(E), Q(E))$ がともに単根のみしかもたない場合は明らかである)

Conjecture 1. ある E に依存しない定数 A があり、 $P(E) = AQ(E)$ が成立する。

Proposition 6.3. *Conjecture 1* は $l_2 = l_3 = 0$ のとき、または $l_0 + l_1 + l_2 + l_3 \leq 8$ のとき、成立している。

7. 有限帯ポテンシャル

$q(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) を周期が 1 の滑らかな実数値周期関数としたとき、

$$(7.1) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right) f(x) = Ef(x)$$

の解を考える。固有値 E により、解の構造が変わりうる。ある E については、すべての解 $f(x)$ が x について有界になっているかもしれないし、別の E については有界でない解が存在するかもしれない。 E を変化させるごとに、解が有界になる (E についての) 安定帯や有界にならなくなる不安定帯ということが交互に現れる。一般に不安定帯は無限個あるわけだが、1 点に退化していない不安定帯の個数が有限個のとき、 $q(x)$ は有限帯ポテンシャルと呼ばれる。

昔から知られていた有限帯ポテンシャルとして、Lame ポテンシャル $l(l+1)p(x + \frac{\pi}{2})$ ($l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) がある。これは、この小論で扱っているモデルの特別な場合である。

1960 年代以降、有限帯ポテンシャルとソリトン理論との関係が明らかにされてきた ([1])。それによると、有限帯ポテンシャルは高次 KdV 方程式の解となっている、つまり、(7.1) の左辺の作用と可換な奇数階の微分作用素が存在する、ということが知られている。

逆にソリトン理論のほうの立場では、ハミルトニアンと可換な奇数階の微分作用素が存在するとき、そのハミルトニアンがポテンシャルが有限帯ポテンシャルである、というような言い方がされることがある。

本章では、Inozemtsev 模型のハミルトニアン (1.1) において、 l_0, l_1, l_2, l_3 がすべて正の整数のとき、そのポテンシャルはソリトン理論の意味での有限帯ポテンシャルであるということと、付随する可換な奇数階の微分作用素の構成法を述べる。

なお、有限帯ポテンシャルであること自体は Treibich と Verdier によって Tangential covering 等の代数幾何の結果を用いることすでに得られていたのであった ([15])。だが、我々の方法により、証明は簡明化され、可換な奇数階の微分作用素の具体的な構成法が見えやすくなっていると筆者は思っている。

ところで、Inozemtsev 模型のハミルトニアンポテンシャルはソリトン理論の人等から、Treibich-Verdier ポテンシャルと呼ばれることもある。

以下において、ハミルトニアン (1.1) と可換な奇数階の微分作用素の構成法を述べる。

前章の式 (6.9) において、 $\Xi(x)$ という関数が構成されていた。この関数は定数倍を調節することにより、ある正の整数 h が存在して

$$(7.2) \quad \Xi(x) = E^h + a_1(x)E^{h-1} + \dots + a_h(x),$$

という形で表示することができる。ここでの係数 $a_j(x)$ と $u(x) = \sum_{i=0}^3 l_i(l_i + 1)\wp(x + \omega_i)$ を用いて、

$$(7.3) \quad A = \sum_{j=0}^h \left\{ a_j(x) \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} a_j(x) \right) \right\} \left(- \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + u(x) \right)^{h-j},$$

とおく。このとき、 A は $2h + 1$ 階の微分作用素となっており、以下のことが成り立つ。

Theorem 7.1. $2h + 1$ 階の微分作用素 A は Inozemtsev 模型のハミルトニアン H と可換である。つまり、 $[A, H] = 0$ となる。

A の階数 $2h + 1$ の具体的な表示については、Conjecture 1 が成立するような l_0, l_1, l_2, l_3 においては Theorem 5.1 に出て来ていた空間 V の次元と一致していることがわかる。

8. モノドロミーの超楕円積分による表示

Inozemtsev 模型の方程式や Heun の方程式のモノドロミーについて考察することは、2 乗可積分な固有関数に対応する固有値を記述する上で役にたつなど、重要な問題であると思われる。この章では、Inozemtsev 模型の方程式や Heun の方程式のモノドロミーの表示式を探求していく。

微分方程式 (2.2) の $x \rightarrow x+1$ に対応するモノドロミーを式 (6.1) の $\tilde{\Lambda}(x)$, $\tilde{\Lambda}(-x)$ という解の基底をもとにして求めてみる。

まず、Bethe 仮設法の式 (6.1) からは、

$$(8.1) \quad \tilde{\Lambda}(x+1) = \exp(\pi\sqrt{-1}c)\tilde{\Lambda}(x),$$

という式がでてくる。固有値 E から出発してモノドロミーを求めるためには c を求めなければならず、このためには Bethe 方程式を解かなければならない。

また、積分表示式 (6.11) からは、

$$(8.2) \quad \tilde{\Lambda}(x+1) = \exp\left(\int_{0+\epsilon}^{1+\epsilon} \frac{-\sqrt{Q(E)}dx}{\Xi(x)}\right) \tilde{\Lambda}(x),$$

という式がでてくる。これについても、出てくる積分がややこしい形をしているため、あまり簡明であるとは言いがたいと思われる。

では、他の表示式はないのであろうか？

実は、有限帯ポテンシャルの昔の仕事を焼きなおすと、他のモノドロミーの式もあるということが見えてくるのである。

Hochstadt([3]), McKean-van Moerbeke([7]) らの仕事によると、有限帯ポテンシャルをもつハミルトニアンについて、 $x \rightarrow x+1$ に対応するモノドロミーは第2種超楕円積分を用いて書ける、ということが知られている。

この結果を、我々が考えている場合の適用できる場合に適用すると以下の結果が得られるのである。

Theorem 8.1. $l_2 = l_3 = 0$ とし、 $l_0, l_1 \in \mathbb{Z}$, $l_0 > l_1 \geq 0$ とする。このとき、ある l_0 次の s に関する多項式 $P_1(s)$ が存在し、

$$(8.3) \quad \tilde{\Lambda}(x+1) = \exp\left(\int_{E_0}^E \frac{P_1(s)}{\sqrt{-P(s)}}ds\right) \tilde{\Lambda}(x),$$

とかける。ここで、 $P(E)$ は Definition 1 により定められているものであり、 E_0 は $P(E_0) = 0$ を満たす数である。また、

$$(8.4) \quad P_1(E) = \int_{0+\epsilon}^{1+\epsilon} \Xi(x)dx,$$

と書ける。

なお、 $P_1(E)$ を具体的に計算することは原理的に可能である。Theorem 8.1 などの具体例などは次章にて紹介する。

ここで、Heun の方程式との関係についてコメントしておく。Inozemtsev 模型と Heun の方程式との間の変数変換は式 (2.3) で与えられていた。Inozemtsev 模型の変数においての $x \rightarrow x+1$ による解析接続は、Heun の方程式での変数 w においては、二つの確定特異点 0 と 1 を内部にもつ経路での解析接続に対応する。よって、(8.3) での変換の係数は、対応する Heun の方程式での変数 w においての大域的な解析接続についてのモノドロミーの係数を与えるということになるのである。また、0 と ∞ を内部にもつ経路についての解析接続についてのモノドロミーの係数も類似の方法で求めることができる。これにより、特別な Heun の方程式については、大域的なモノドロミーを超楕円積分を用いて書けるということがわかった。

9. 例

l_0, l_1, l_2, l_3 を固定したとき、この小論で現れた関数たちの具体的な表示を記しておく。

• $l_0 = 1, l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合

5 章に出てきた有限次元空間 V の次元は 3 となっており、この空間の基底として、 $\sqrt{\wp(x) - e_1}, \sqrt{\wp(x) - e_2}, \sqrt{\wp(x) - e_3}$ がとれる。

この空間 V でのハミルトニアン $H = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2\wp(x)$ についての特性多項式は、

$$P(E) = (E + e_1)(E + e_2)(E + e_3),$$

となっている。

$$\tilde{\Lambda}(x) = \frac{\exp(\pi\sqrt{-1}cx)\theta(x+t)}{\theta(x)},$$

としたときの Bethe 方程式は、

$$c\pi\sqrt{-1} + \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = 0,$$

となる。また、 $E \neq -e_1, -e_2, -e_3$ のときは微分方程式 $(H - E)f(x) = 0$ の解の基底は $\tilde{\Lambda}(x), \tilde{\Lambda}(-x)$ という形で書ける。

式 (6.9) に出てくる $\Xi(x)$ の具体形は、

$$\Xi(x) = \wp(x) + E$$

と書け、これにより、 $\tilde{\Lambda}(x)$ の積分表示式は、

$$\tilde{\Lambda}(x) = \sqrt{\wp(x) + E} \exp \int^x \frac{-\sqrt{-(E+e_1)(E+e_2)(E+e_3)}}{\wp(x) + E} dx,$$

と書ける。

式 (8.3) におけるモノドロミーの式は、

$$\tilde{\Lambda}(x+1) = \exp \left(\int_{-e_1}^E \frac{s - 2\eta_1}{\sqrt{-(s+e_1)(s+e_2)(s+e_3)}} ds \right) \tilde{\Lambda}(x),$$

と書ける。この式の分子は、 $\int_{0+\epsilon}^{1+\epsilon} (\wp(x) + E) dx = E - (\zeta(1+\epsilon) - \zeta(\epsilon)) = E - 2\eta_1$ により求まっている。ここで、 $\zeta(x)$ は擬周期が 1 と τ である Weierstrass の zeta 関数であり、 $\eta_1 = \zeta(1/2)$ である。また、 $-e_1$ は $P(-e_1) = 0$ を満たしていること、積分の始点は $-e_2$ や $-e_3$ とすることもできることに注意しておく。

• $l_0 = 2, l_1 = 1, l_2 = l_3 = 0$ の場合

5 章に出てきた有限次元空間 V の次元は 5 となっており、この空間の基底として、 $\wp(x) - e_1, \sqrt{\frac{\wp(x)-e_2}{\wp(x)-e_1}}, \sqrt{\frac{\wp(x)-e_3}{\wp(x)-e_1}}, \sqrt{(\wp(x)-e_2)(\wp(x)-e_1)}, \sqrt{(\wp(x)-e_3)(\wp(x)-e_1)}$ がとれる。

この空間 V でのハミルトニアン $H = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 6\wp(x) + 2\wp(x + \frac{1}{2})$ についての特性多項式は、

$$P(E) = \frac{1}{16}(E + 4e_1)\{16E^4 - 224e_1E^3 + (56g_2 - 144e_1^2)E^2 - (200g_2e_1 - 5920e_1^3)E + (81g_2^2 - 3640g_2e_1^2 + 19216e_1^4)\}$$

となっている。ここで、 $g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)$ である。

$$\tilde{\Lambda}(x) = \frac{\exp(\pi\sqrt{-1}cx)\theta(x+t_1)\theta(x+t_2)\theta(x+t_3)}{\theta(x)^2\theta(x+1/2)},$$

としたときの Bethe 方程式は、

$$c\pi\sqrt{-1} + \sum_{k \neq j} \frac{\theta'(t_k - t_j)}{\theta(t_k - t_j)} + 2 \frac{\theta'(t_j)}{\theta(t_j)} + \frac{\theta'(t_j - 1/2)}{\theta(t_j - 1/2)} = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$c\pi\sqrt{-1} + \sum_{j=1}^3 \frac{\theta'(t_j)}{\theta(t_j)} = 0,$$

$$c\pi\sqrt{-1} + \sum_{j=1}^3 \frac{\theta'(t_j - 1/2)}{\theta(t_j - 1/2)} = 0,$$

となる。また、 $P(E) \neq 0$ のときは微分方程式 $(H - E)f(x) = 0$ の解の基底として $\tilde{\Lambda}(x), \tilde{\Lambda}(-x)$ ととることができる。

式 (6.9) に出てくる $\Xi(x)$ の具体形は、

$$\Xi(x) = \wp(x)^2 + \frac{E - 2e_1}{3}\wp(x) + \frac{E + 4e_1}{3}\wp(x + \frac{1}{2}) + \frac{E^2 - 5e_1E - 27e_1^2}{9}$$

と書け、これにより、 $\tilde{\Lambda}(x)$ の積分表示式は、

$$\tilde{\Lambda}(x) = \sqrt{\Xi(x)} \exp \int^x \frac{-\sqrt{-P(E)}}{\Xi(x)} dx,$$

と書ける。

式 (8.3) におけるモノドロミーの式は、

$$\tilde{\Lambda}(x+1) = \exp \left(\int_{E_0}^E \frac{\frac{1}{4}(4s^2 - 20e_1s + 3g_2 - 108e_1^2 - 16(2s - e_1)\eta_1)}{\sqrt{-P(s)}} ds \right) \tilde{\Lambda}(x),$$

と書ける。ここで、 E_0 は $P(E_0) = 0$ を満たす数であり、例えば $E_0 = -4e_1$ ととることができる。

REFERENCES

- [1] 田中俊一, 伊達悦朗: KdV 方程式. 紀伊国屋書店 (1979).
- [2] Felder, Giovanni; Varchenko, Alexander: Three formulae for eigenfunctions of integrable Schrödinger operator, *Compositio Math.* **107** no. 2, 143-175 (1997).
- [3] Hochstadt, Harry: Functiontheoretic properties of the discriminant of Hill's equation. *Math. Z.* **82** 237-242 (1963).
- [4] Inozemtsev, V. I.: Lax representation with spectral parameter on a torus for integrable particle systems. *Lett. Math. Phys.* **17** no.1, 11-17 (1989).
- [5] Kato, Tosio, *Perturbation theory for linear operators*, corrected printing of the second ed., Springer-Verlag, Germany, (1980).

- [6] Komori, Yasushi; Takemura, Kouichi: The perturbation of the quantum Calogero-Moser-Sutherland system and related results, preprint, math.QA/0009244 (2000).
- [7] McKean, H. P.; van Moerbeke, P.: The spectrum of Hill's equation. *Invent. Math.* **30** no. 3, 217–274 (1975).
- [8] Ochiai, Hiroyuki; Oshima, Toshio; Hideko Sekiguchi: Commuting families of symmetric differential operators, *Proc. Japan. Acad.* **70** 62–66 (1994).
- [9] Olshanetsky, M. A.; Perelomov, A. M.: Quantum integrable systems related to Lie algebras. *Phys. Rep.* **94** no. 6, 313–404 (1983).
- [10] Oshima, Toshio; Hideko Sekiguchi: Commuting families of differential operators invariant under the action of a Weyl group, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **2** 1–75 (1995).
- [11] Ronveaux, A.(ed.): Heun's differential equations. Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, (1995).
- [12] Takemura, Kouichi: On the eigenstates of the elliptic Calogero-Moser model, *Lett. Math. Phys.* **53** no. 3, 181–194 (2000).
- [13] Takemura, Kouichi: The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system I: the Bethe Ansatz method. Preprint, math.CA/0103077 (2001).
- [14] Takemura, Kouichi: The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system II, III. in preparation.
- [15] Treibich, Armando; Verdier, Jean-Louis: Revêtements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires. (French) *Duke Math. J.* **68** no. 2, 217–236 (1992).
- [16] Whittaker, E. T. and Watson, G. N.: A course of modern analysis. Fourth edition. Cambridge University Press, New York (1962).

236-0016 横浜市金沢区瀬戸 22-2 横浜市立大学数理科学教室
E-mail address: takemura@math.yokohama-cu.ac.jp