

量子群の旗多様体

谷崎俊之 (広島大・理)

概要

旗多様体 G/B の q 類似を非可換スキームとして考察した Rosenberg-Lunts[2] の結果の紹介を行う.

1 問題の設定

G を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の連結かつ単連結な半単純代数群, B をそのボレル部分群とする. 商多様体 $X = G/B$ を G の旗多様体と呼ぶ. まず, X の射影多様体としての記述を述べる.

G の基本ウェイトを $\varpi_1, \dots, \varpi_\ell$ とし,

$$P = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\varpi_i, \quad P^+ = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i \quad (1.1)$$

とおく. $\lambda \in P^+$ を最高ウェイトに持つ有限次元既約 G 加群を $V(\lambda)$ とし, その最高ウェイト・ベクトルを ℓ_λ で表す. G のアフィン代数多様体としての座標環を $\mathbb{C}[G]$ により表す. また, P 次数付き環 A を

$$A = \bigoplus_{\lambda \in P^+} A(\lambda) \subset \mathbb{C}[G], \quad (1.2)$$

$$A(\lambda) = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gb) = b^\lambda f(g) \ (g \in G, b \in B)\} \quad (1.3)$$

により定める.

命題 1.1. $X = \text{Proj}_P(A)$.

注意 1.2. $\mathbb{Z}$ により次数づけられた環に対する Proj の理論は, 有限階数の自由アーベル群 $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}e_i$ により次数づけられた環に対する Proj_Λ の理論に自然に拡張される. 幾何学的には, Proj は $\mathbb{P}^n$ の閉部分多様体

に対応し, Proj_Λ は $\prod_{i=1}^m \mathbb{P}^{n_i}$ の閉部分多様体に対応する. Λ 次数付き環 S を $S(n) = \bigoplus_{\sum_i k_i = n} S(\sum_i k_i e_i)$ により $\mathbb{Z}$ 次数付き環と見なすことは, 幾何学的には, Segre 埋め込み $\prod_i \mathbb{P}^{n_i} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ ($n+1 = \prod_i (n_i+1)$) により, $\prod_{i=1}^m \mathbb{P}^{n_i}$ の閉部分多様体を $\mathbb{P}^n$ の閉部分多様体と見なすことに対応している.

命題 1.1 の証明 G は $\prod_{i=1}^\ell \mathbb{P}(V(\varpi_i))$ に作用し, $x = ([\ell_{\varpi_1}], \dots, [\ell_{\varpi_\ell}])$ の固定部分群が B と一致する. これから Plücker 埋め込み

$$X = G/B \hookrightarrow \prod_{i=1}^\ell \mathbb{P}(V(\varpi_i))$$

が得られる. よって, P 次数付き環 $\tilde{A} = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \tilde{A}(\lambda)$ を,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= S(V(\varpi_1)^*) \otimes \cdots \otimes S(V(\varpi_\ell)^*) / I \\ I &= \bigoplus_{n_1, \dots, n_\ell} \{f \in S^{n_1}(V(\varpi_1)^*) \otimes \cdots \otimes S^{n_\ell}(V(\varpi_\ell)^*) \mid f(X) = 0\}, \\ \tilde{A}(\sum_i n_i \varpi_i) &= \text{Im}(S^{n_1}(V(\varpi_1)^*) \otimes \cdots \otimes S^{n_\ell}(V(\varpi_\ell)^*) \rightarrow \tilde{A}) \end{aligned}$$

により定めるとき, $X = \text{Proj}_P(\tilde{A})$ となる. ところが $\tilde{A}$ は,

$$S(V(\varpi_1)^*) \otimes \cdots \otimes S(V(\varpi_\ell)^*) \rightarrow \mathbb{C}[G] \quad (f \mapsto [g \mapsto f(g\ell_{\varpi_1}, \dots, g\ell_{\varpi_\ell})])$$

により A と同一視される. $\square$

注意 1.3. B の巾単根基を N とするとき,

$$A = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gn) = f(g) \ (g \in G, n \in N)\} = \Gamma(G/N, \mathcal{O}_{G/N}).$$

注意 1.4. 自然な同型 $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{\lambda \in P^+} V(\lambda)^* \otimes V(\lambda)$ のもとで, $A(\lambda)$ は $V(\lambda)^* \otimes \ell_\lambda$ に対応する.

次に, X のアフィン多様体の張り合わせとしての記述を与える.
 W をワイル群とする. このとき

$$X = G/B = \bigcup_{w \in W} U_w, \quad U_w = wB^-B/B$$

と書ける. ただし B^- は G のボレル部分群であって $H = B \cap B^-$ が G の極大トーラスになるようなものとする. U_w は X のアフィン開集合で,

$$N^- \cong U_w \quad (g \leftrightarrow wgB)$$

により, B^- の巾単根基 N^- と同型である.

$\lambda \in P^+$ に対して $V(\lambda)^*$ を右 G 加群とみて, ウェイト $w\lambda$ をもつウェイト・ベクトルを $\ell_{w\lambda}^* \in V(\lambda)^*$ で表す. また $c_w^\lambda \in A(\lambda)$ を $c_w^\lambda(g) = \langle \ell_{w\lambda}^*, g\ell_\lambda \rangle$ により定める. このとき, 定数倍を除いて $c_w^\lambda c_w^\mu = c_w^{\lambda+\mu}$ が成り立っているので,

$$S_w = \bigcup_{\lambda \in P^+} \mathbb{C}^\times c_w^\lambda \quad (1.4)$$

は A の積閉集合になっている. 局所化 $S_w^{-1}A$ を考えると, これも P により次数づけられた環であるが, 局所化を行ったため, $\lambda \in P \setminus P^+$ でも $(S_w^{-1}A)(\lambda) \neq 0$ である. X における U_w の補集合の定義方程式は $c_w^{\varpi_1}(gB) = \cdots = c_w^{\varpi_\ell}(gB) = 0$ により与えられるので, 結局次が成立する.

命題 1.5. $U_w = \text{Spec}((S_w^{-1}A)(0)).$

我々の問題は次の通り.

問題 1.6. (i) 量子群を用いて, A および $R_w = (S_w^{-1}A)(0)$ の q 類似 A_q および $R_{w,q}$ を構成せよ.

(ii) 非可換環 $A_q, R_{w,q}$ に対する $\text{Proj}_P(A_q), \text{Spec}(R_{w,q})$ は何を意味するか. また, $\text{Proj}_P(A_q)$ が $\text{Spec}(R_{w,q})$ の張り合わせであるということの意味付けを与えよ (より根源的な問として, 非可換スキームとは何か).

(iii) 非可換スキームとしての量子旗多様体

$$X_q = \text{Proj}_P(A_q) = \bigcup_{w \in W} \text{Spec}(R_{w,q})$$

の上で, 量子群の幾何学的表現論を展開せよ.

2 A_q および $R_{w,q}$ の構成

量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$) から出発する. これは $\mathbb{C}(q)$ 上のホップ代数である. また $\mathfrak{b} = \text{Lie}(B)$ に対する $U_q(\mathfrak{b})$ が $U_q(\mathfrak{g})$ の部分ホップ代数として含まれている.

G の座標環 $\mathbb{C}[G]$ は, $U(\mathfrak{g})$ の双対ホップ代数として定義されるので, このまねをして, $\mathbb{C}[G]$ の q 類似 $\mathbb{C}_q[G]$ を $\text{Hom}_{\mathbb{C}(q)}(U_q(\mathfrak{g}), \mathbb{C}(q))$ の中で構成する事ができる. これも $\mathbb{C}(q)$ 上のホップ代数であるが, 注意すべきは $\mathbb{C}[G]$ と違って, 環としては非可換であるということである. また $\mathbb{C}_q[B]$ が $\mathbb{C}_q[G]$ の商ホップ代数として定まる. $r_B^G: \mathbb{C}_q[G] \rightarrow \mathbb{C}_q[B]$ を自然な準同型とする. これは, 制限写像 $\mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[B]$ の自然な q 類似である. $\lambda \in P$ に対して, $U_q(\mathfrak{b})$ の指標 $\chi_\lambda: U_q(\mathfrak{b}) \rightarrow \mathbb{C}(q)$ が定まるが, これは $\mathbb{C}_q[B]$ の元と見なすことができる.

そこで, $A = \bigoplus_{\lambda \in P^+} A(\lambda)$ の q 類似を

$$A_q(\lambda) = \{f \in \mathbb{C}_q[G] \mid (1 \otimes r_B^G)\Delta(f) = f \otimes \chi_\lambda\}, \quad (2.5)$$

$$A_q = \bigoplus_{\lambda \in P^+} A_q(\lambda) \subset \mathbb{C}_q[G] \quad (2.6)$$

により定めることができる. A_q は, P による次数付けをもつ非可換な環になる.

次に, $R_{w,q}$ の構成について述べる. $\lambda \in P^+$ と $w \in W$ に対して, $c_{w,q}^\lambda \in A_q(\lambda)$ が c_w^λ と全く同様に定義されて, 積閉集合 $S_{w,q} = \bigcup_{\lambda \in P^+} \mathbb{C}(q)^\times c_{w,q}^\lambda$ が定まる. そこで局所化 $S_{w,q}^{-1}A_q$ を考えたいのであるが, 実は非可換環の局所化に関しては少し問題がある. 一般に, 非可換環 R の積閉集合 S に関して, 局所化 $S^{-1}R$ を考えることはできないわけではない. ただしこれは, S が一般だと, あまり感じのよいものではなくて, S が Ore 条件と呼ばれる条件を満たす場合にのみ, $S^{-1}R$ はよい性質を満たす. 今我々が考えている場合には, 実は Ore 条件が成り立っていて, よい局所化としての $S_{w,q}^{-1}A_q$ が定まるのである. これは P による次数付けをもつ非可換環である. そこで, R_w の q 類似を

$$R_{w,q} = (S_{w,q}^{-1}A_q)(0) \quad (2.7)$$

により定める.

3 非可換スキーム

非可換スキームとは何であろうか？（可換）スキームは、アフィン・スキーム $U_i = \text{Spec}(R_i)$ (R_i は可換環) の張り合わせであった。そこで、非可換環 R があるとき、ともかく $\text{Spec}(R)$ という非可換空間が定まっていると思うことにしておこう。一般の非可換スキームは、この非可換アフィン・スキームを張り合わせるることによって得られるであろう。では、2つの非可換アフィン・スキーム $Y_1 = \text{Spec}(R_1)$ と $Y_2 = \text{Spec}(R_2)$ を張り合わせるといえるのはどういうことであろうか？ $U = Y_1 \cap Y_2$ の非可換アフィン・スキームとしての記述ができればよいであろう。

ところが、この考えを量子群の旗多様体に適用して、 $X = G/B$ の2つのアフィン開集合 $U_{w_1} = \text{Spec}(R_{w_1})$, $U_{w_2} = \text{Spec}(R_{w_2})$ の共通部分 $U_{w_1} \cap U_{w_2}$ の座標環の q 類似を作ろうとすると、Ore 条件を満たさない積閉集合に関する局所化を考えざるを得なくなる。これでは使い物になる理論はできない。ここまでは誰も考えるところで、実は筆者もずっと以前にこの問題を考えたときに、ここで引っかかっていたのであった。

新しい観点の導入によりこの問題を解決するのが、Rosenberg による非可換スキームの理論である (Rosenberg[1])。

基本的考え方 非可換環の族 $\{R_i\}$ を張り合わせるのではなく、圏の族 $\{R_i\text{-加群のなす圏}\}$ の張り合わせを考える。

注意 3.1. (可換) アフィン・スキーム $Y = \text{Spec}(R)$ に対して、 R -加群のなす圏と準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群のなす圏は自然に同型である。また、アフィンとは限らない (可換) スキーム Y は、準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群のなす圏から一意的に定まる。

可換な世界で、(可換) スキーム X を考える代わりに、アーベル圏

$$M(\mathcal{O}_X) = \{ \text{準連接 } \mathcal{O}_X \text{ 加群} \}$$

を考え、スキームの射 $f: X \rightarrow Y$ の代わりに、右完全関手

$$f^*: M(\mathcal{O}_Y) \rightarrow M(\mathcal{O}_X)$$

を考える。これを拡張すれば、非可換スキームとはある種のアーベル圏のことであり、非可換スキームの射とはアーベル圏の間の逆方向の右完全関手であるということになる。

非可換スキームの定義をするために、少し言葉の準備をする。

- A, B をアーベル圏とする. 射 $f: A \rightarrow B$ とは, 右完全関手 $B \rightarrow A$ の同値類のことである.
- 射 $f: A \rightarrow B$ が与えられたとき, この同値類に属する任意の右完全関手のことを f に付随する逆像関手とよび $f^*: B \rightarrow A$ で表す.
- $f^*: B \rightarrow A$ が右随伴関手 $f_*: A \rightarrow B$ をもつとき, $f: A \rightarrow B$ は連続であるという. また f_* を順像関手と呼ぶ.
- f が連続で f^* が完全関手のとき, f は平坦であると言う.
- $f^*: B \rightarrow A$ が圏の局所化になっているとき, f は局所化であるという.
- 平坦な局所化の族 $f_i: A_i \rightarrow B$ ($i \in I$) が与えられているとする. アーベル圏 B における射 s であって, 任意の i に対して $f_i^*(s)$ が同型射となるものは, 同型射に限るものとする. このとき, $\{f_i\}_{i \in I}$ は B のザリスキー被覆であるという.
- 連続な射 f であって f_* が完全忠実関手となるものをアフィン射と呼ぶ.

定義 3.2. A, C をアーベル圏とし, 射 $f: A \rightarrow C$ が与えられているものとする. A のザリスキー被覆 $\{f_i\}_{i \in I}$ (ただし $f_i: A_i \rightarrow A$) であって, $f_i, f \circ f_i$ がアフィン射となるものが存在するとき, A は C 上のスキームであるという.

4 量子群の旗多様体

量子群の旗多様体が, 前節に述べた意味での非可換スキームとして構成されることを示す.

次数つき可換環 R に対する $Y = \text{Proj}(R)$ 上の準連接層は, 次数つき R 加群から自然に定まるが, この対応は 1 対 1 ではない. 従って, Y 上の準連接層の圏 $M(\mathcal{O}_Y)$ は, 次数付き R 加群の圏をある種の同値関係で割って (正確には圏の局所化を行って) 得られる. これと全く同様のことを, 次数付き非可換環で行うことにより, 非可換環に対する $M(\mathcal{O}_Y)$ の類似物が考えられる. これを A_q の場合に適用すると次のようになる. A_q は P による次数付けを持つ非可換環であった. $\lambda \in P$ に対して $A_q(\geq$

$\lambda) = \bigoplus_{\mu - \lambda \in P^+} A_q(\mu)$ とおく. P による次数付けを持つ左 A_q 加群の圏 $\text{Mod}_P(A_q)$ を考えよう. $M \in \text{Mod}_P(A_q)$ であって, 任意の $m \in M$ に対してある $\lambda \in P^+$ をとるとき $A_q(\geq \lambda)m = 0$ となるもののなす $\text{Mod}_P(A_q)$ の部分圏を, $\text{Tor}_P(A_q)$ で表す. $\text{Tor}_P(A_q)$ は部分商や拡大に関して閉じており, 局所化

$$\text{Proj}_P(A_q) = \frac{\text{Mod}_P(A_q)}{\text{Tor}_P(A_q)} = S^{-1} \text{Mod}_P(A_q)$$

$$S = \{\text{Mod}_P(A_q) \text{ における射 } f \mid \text{Ker}(f), \text{Cok}(f) \in \text{Tor}_P(A_q)\}$$

を考えることができる. これが $M(\mathcal{O}_{G/B})$ の類似物である.

$A_q(0) = \mathbb{C}(q)$ なので, $A_q(0)$ 加群の圏 $\text{Mod}(A_q(0))$ は, 圏 $M(\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{C}(q)})$ と同一視できる. すなわち, 圏 $\text{Mod}(A_q(0))$ は, スキームとしてみれば可換スキーム $\text{Spec } \mathbb{C}(q)$ と一致する.

関手 $\text{Mod}(A(0)) \rightarrow \text{Mod}_P(A_q) (N \rightsquigarrow A_q \otimes_{A_q(0)} N)$ と局所化関手 $\text{Mod}_P(A_q) \rightarrow \text{Proj}_P(A_q)$ の合成を π^* として, 射

$$\pi : \text{Proj}_P(A_q) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}(q))$$

が定まる.

$w \in W$ とする. $M \in \text{Mod}_P(A_q)$ であって, 任意の $m \in M$ に対してある $s \in S_{w,q}$ に関して $sm = 0$ となるもののなす $\text{Mod}_P(A_q)$ の部分圏を, $\text{Tor}_w(A_q)$ で表す. $\text{Tor}_w(A_q)$ も部分商や拡大に関して閉じており, 局所化 $\text{Mod}_P(A_q)/\text{Tor}_w(A_q)$ を考えることができるが, 実はこの圏は $R_{w,q}$ 加群の圏 $\text{Mod}(R_{w,q})$ と自然に同型であることが容易に分かる. そこでこれを $\text{Spec}(R_{w,q})$ と書くことにする. また $\text{Tor}_P(A_q) \subset \text{Tor}_w(A_q)$ なので, 自然な関手

$$\text{Proj}_P(A_q) = \frac{\text{Mod}_P(A_q)}{\text{Tor}_P(A_q)} \rightarrow \frac{\text{Mod}_P(A_q)}{\text{Tor}_w(A_q)} = \text{Spec}(R_{w,q})$$

を f_w^* として, 射 $f_w : \text{Spec}(R_{w,q}) \rightarrow \text{Proj}_P(A_q)$ が定まる.

定理 4.1 (Rosenberg-Lunts[2]). $\pi : \text{Proj}_P(A_q) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}(q))$ は $\text{Spec}(\mathbb{C}(q))$ 上のスキームで, $\{f_w : \text{Spec}(R_{w,q}) \rightarrow \text{Proj}_P(A_q)\}_{w \in W}$ はそのアフィン被覆となる.

参考文献

- [1] Rosenberg, A. L., Noncommutative schemes. *Compositio Math.* 112 (1998), no. 1, 93–125.

- [2] Lunts, V. A.; Rosenberg, A. L., Localization for quantumgroups. *Selecta Math. (N.S.)* 5 (1999), no. 1, 123–159.