

クリフォード代数の一般化と高次カシミール作用素

本間 泰史 (早稲田大学 理工学部) *

1 序論

リーマン面上のコーシーリーマン作用素 $\partial/\partial\bar{z}$ (及び $\partial/\partial z$) の高次元化には, 二つの方向がある. 一つの方法は, 複素構造の高次元化に対応して現れる $\{\partial/\partial\bar{z}_i\}_{i=1}^n$ である. これは n 次元複素多様体上で定義される. もう一つの方法は, 共形構造の高次元化に対応して現れるディラック作用素 D である. こちらはリーマン多様体 (正確にはスピノ多様体) 上で定義される. このディラック作用素の数学, 物理学への応用は広い. 幾何学に関しては [BFGK], [Fr], [LM], 解析学 (調和解析, クリフォード解析) に関しては [GiMu], [DSS], 数理物理への応用に関しては [E] を参照.

さて, ディラック作用素がコーシーリーマン作用素の共形構造に関する高次元化であると述べたが, 実際, ディラック作用素は共形共変一階微分作用素である. つまり, 計量を $g \rightarrow g' = e^{2\sigma} g$ と共形変形した場合に, $D \rightarrow e^{(-\frac{n-1}{2}-1)\sigma} D e^{\frac{n-1}{2}\sigma}$ と変化する. とくにゼロ固有空間 (調和スピノール) の次元は共形不変量である. この意味でディラック作用素は共形構造に依存した作用素である. しかし, 3 次元以上では共形共変一階微分作用素はディラック作用素以外にも考えられる. 例えば, ツイスター作用素 T , 外微分 d , 余微分 d^* , ラリタシュインガー作用素などが挙げられる. そこで, コーシーリーマン作用素の高次元化を考える場合, これらすべての共形共変一階微分作用素を扱うのが適当である. 実際, ツイスター理論では, すでにそのような共形共変一階微分作用素が $\nabla^{AA'}\phi_{AB\dots E}$ として現れている [Hit]. (ツイスター理論とは, 多様体の共形幾何をツイスター空間の複素幾何に対応させる理論であった).

*e-mail: homma@gm.math.waseda.ac.jp

共形共変一階微分作用素とは任意の既約同伴束上のリーマン計量（およびスピン構造）から決まる一階微分作用素で、ディラック作用素の一般化といえる（このことから高スピディラック作用素ともいう）。その基本となる例を挙げよう。 $\mathbf{R}^3$ 上のディラック作用素 $D = D_{1/2}$ はパウリ行列を用いれば

$$D_{\frac{1}{2}} = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{on } \Gamma(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{C}^2) \quad (1.1)$$

となる。次に $SU(2) = Spin(3)$ のスピン- $m/2$ 表現 $(\pi_{m/2}, V_{m/2})$ を考える。 $\mathbf{R}^3 \simeq \mathfrak{su}(2)$ とみなせば、ディラック作用素の定義と同様にして一階微分作用素を定義できる（ $\mathbf{R}^3$ のリーマン計量のみから決まる作用素である）。

$$D_{\frac{m}{2}} = \pi_{\frac{m}{2}}(\sigma_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \pi_{\frac{m}{2}}(\sigma_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + \pi_{\frac{m}{2}}(\sigma_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{on } \Gamma(\mathbf{R}^3 \times V_{\frac{m}{2}}) \quad (1.2)$$

もちろん $m = 1$ のときは、ディラック作用素。さて、ディラック作用素の場合に、その表象はクリフォード積であり、表象の代数構造はクリフォード代数である。つまり、上の例では、

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = -2\delta_{ij} \quad (1.3)$$

という関係式を満たす。このクリフォード代数は、ディラック作用素の性質を調べるのに必要となるだけでなく、それ自体も幅広い応用を持つ。同様に、微分作用素 $D_{m/2}$ の表象および表象の代数構造を考えると、 $\mathfrak{su}(2)$ のスピン- $m/2$ 表現そのものになる。例えば、 m が奇数なら、weight は $-m, -m+2, \dots, -1, 1, \dots, m-2, m$ となるが、0 という weight が現れないことから微分作用素 $D_{m/2}$ は楕円型であることがわかる。

上の例からわかるように、高スピディラック作用素（共形共変一階微分作用素）を調べるには、まず表象を調べるべきであろう。それはクリフォード積の一般化として「クリフォード準同型」として定義される。そして、その代数的構造を調べることにより、表現論や幾何学への応用を得る。今回は、クリフォード準同型と高次カシミール作用素の関係、高スピディラック作用素のボホナー恒等式、ベクトル値球面調和多項式への応用について述べる。また、最後に $U(m)$ （多様体はケーラー多様体になる）に対する結果にも少し触れる。

2 ディラック作用素と高スピディラック作用素

ここでは, ディラック作用素とその一般化である高スピディラック作用素についての簡単な説明を行う.

(M, g) を向き付けられたリーマン多様体とする. このとき構造群が $SO(n)$ となる M 上の主束 $\mathbf{SO}(M)$ を得る. さらに, M がスピン多様体の場合には構造群が $Spin(n)$ となる M 上の主束 $\mathbf{Spin}(M)$ を得る. 以下, M はスピン多様体として M 上には主 $Spin(n)$ 束があるとする. 構造群 $Spin(n)$ のスピノール表現 (π_Δ, V_Δ) に対して, $\mathbf{Spin}(M)$ の同伴束であるスピノール束

$$\mathbf{S}_\Delta := \mathbf{Spin}(M) \times_\Delta V_\Delta \quad (2.1)$$

を得る. このスピノール束の切断の空間 $\Gamma(\mathbf{S}_\Delta)$ 上には一階線形微分作用素であるディラック作用素 D をつくることができる.

$$D := \sum e_i \cdot \nabla_{e_i} : \Gamma(\mathbf{S}_\Delta) \rightarrow \Gamma(\mathbf{S}_\Delta). \quad (2.2)$$

ここで $\{e_i\}$ は $T(M)$ の局所正規直交フレーム. ∇ はスピン接続から定まる共変微分. $e_i \cdot$ は e_i によるクリフォード積.

次に, クリフォード積を用いずにディラック作用素を再定義する. まずスピノール束上の共変微分を考える.

$$\nabla : \Gamma(\mathbf{S}_\Delta) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathbf{S}_\Delta \otimes T^*(M)). \quad (2.3)$$

同伴束のテンソル積 $\mathbf{S}_\Delta \otimes T^*(M)$ を既約分解すると, 再びスピノール束が現れる.

$$\mathbf{S}_\Delta \otimes T^*(M) = \mathbf{S}_\Delta \oplus \mathbf{S}_T. \quad (2.4)$$

この各既約成分への直交射影をそれぞれ

$$\Pi_\Delta^\Delta : \mathbf{S}_\Delta \otimes T^*(M) \rightarrow \mathbf{S}_\Delta, \quad \Pi_T^\Delta : \mathbf{S}_\Delta \otimes T^*(M) \rightarrow \mathbf{S}_T \quad (2.5)$$

とする. この Π_Δ^Δ と共変微分 ∇ を合成したものは先ほどのディラック作用素に一致する.

$$D : \Gamma(\mathbf{S}_\Delta) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathbf{S}_\Delta \otimes T^*(M)) \xrightarrow{\Pi_\Delta^\Delta} \Gamma(\mathbf{S}_\Delta). \quad (2.6)$$

Remark 2.1. もう一方の直交射影 Π_T^Δ を使えば, ツイスター作用素 $T : \Gamma(\mathbf{S}_\Delta) \rightarrow \Gamma(\mathbf{S}_T)$ を得ることができる.

ディラック作用素の二つの定義を得たが、それらは

$$\boxed{\text{クリフォード積 } e_i := \text{直交射影 } \Pi_{\Delta}^A}$$

という関係で結ばれている。

さて共変微分と直交射影の合成という定義ならディラック作用素を一般化できる。構造群 $Spin(n)$ の有限次元既約ユニタリ表現 (π_ρ, V_ρ) に対する同伴束 $\mathbf{S}_\rho := \mathbf{Spin}(M) \times_\rho V_\rho$ 及び、スピン接続からきまる共変微分作用素 ∇ を考える。

$$\nabla : \Gamma(\mathbf{S}_\rho) \rightarrow \Gamma(\mathbf{S}_\rho \otimes T^*(M)). \quad (2.7)$$

次に、テンソル束 $\mathbf{S}_\rho \otimes T^*(M)$ を $Spin(n)$ に関して既約同伴束に分解する。

$$\mathbf{S}_\rho \otimes T^*(M) = \sum_{\lambda} \mathbf{S}_{\lambda}. \quad (2.8)$$

$\mathbf{S}_\rho \otimes T^*(M)$ から、ある既約同伴束 $\mathbf{S}_{\lambda}$ への直交射影作用素 (束準同型) を Π_{λ}^{ρ} とする。このとき一階微分作用素を次で定義する。

$$D_{\lambda}^{\rho} : \Gamma(\mathbf{S}_\rho) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\mathbf{S}_\rho \otimes T^*(M)) \xrightarrow{\Pi_{\lambda}^{\rho}} \Gamma(\mathbf{S}_{\lambda}). \quad (2.9)$$

この作用素は高スピنديラック作用素と呼ばれる。もちろん $\mathbf{S}_\rho$ 上には既約成分 $\mathbf{S}_{\lambda}$ の数だけの高スピنديラック作用素がある。

Remark 2.2. 高スピنديラック作用素は共形共変一階微分作用素であり、逆に共形共変一階微分作用素は上記の方法で得られる。共形共変とはリーマン計量 g を $g' = e^{2\sigma} g$ と共形変形したとき、微分作用素 A が $A' = e^{k\sigma} A e^{l\sigma}$ ($k, l \in \mathbf{R}$) と変化する作用素のこと。

Remark 2.3. M をスピン多様体と仮定しているが、リーマン多様体の場合でも $SO(n)$ の表現に対応した同伴束のみを考えれば、同様の議論ができる。今後述べる結果もスピンである必要はない。

3 表象の代数構造

ディラック作用素 D の表象 $\sigma(D)$ は、まさにクリフォード積である。すなわち

$$T_x^*(M) \times (\mathbf{S}_{\Delta})_x \ni (u, \phi) \rightarrow \sigma_u(D)\phi = u \cdot \phi \in (\mathbf{S}_{\Delta})_x \quad (3.1)$$

これは各ファイバー（スピノール空間 V_Δ ）で書けば,

$$\mathbf{R}^n \times V_\Delta \ni (u, \phi) \rightarrow u \cdot \phi \in V_\Delta \quad (3.2)$$

となる. また, ディラック作用素の表象の代数構造がクリフォード代数である. つまりディラック作用素の表象は

$$u \cdot v \cdot + v \cdot u \cdot = -2\langle u, v \rangle \text{id} \quad (3.3)$$

を満たす. 次に, 高スピンディラック作用素に対してもその表象および表象の代数構造を考えよう. 高スピンディラック作用素 D_λ^ρ の表象は, その定義から

$$T_x^*(M) \times (\mathbf{S}_\rho)_x \ni (u, \phi) \rightarrow \sigma_u(D_\lambda^\rho)\phi = \Pi_\lambda^\rho(\phi \otimes u) \in (\mathbf{S}_\lambda)_x. \quad (3.4)$$

これを各ファイバーで書けば

$$\mathbf{R}^n \times V_\rho \ni (u, \phi) \rightarrow \sigma_u(D_\lambda^\rho)\phi = \Pi_\lambda^\rho(\phi \otimes u) \in V_\lambda. \quad (3.5)$$

ここで V_λ は $\mathbf{R}^n \otimes V_\rho = \sum V_\lambda$ のある既約成分である. この表象の代数構造を調べることが, この後の目的である. そこで表現論からのいくつかの事実を必要とする.

4 表現論からの準備

$Spin(n)$ に表現論についていくつか必要な事実を述べる.

(1) $\{e_i\}_{i=1}^n$ を $\mathbf{R}^n$ の (向き付けられた) 正規直交基底とする. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で内積を表す. クリフォード代数 Cl_n は次の基底と関係式で与えられる $\mathbf{R}$ 上結合代数である.

$$1 \text{ and } e_{i_1} \cdots e_{i_l} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n \quad l = 1, \dots, n), \quad (4.1)$$

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\langle e_i, e_j \rangle = -2\delta_{ij}. \quad (4.2)$$

スピン群のリー環 $\mathfrak{spin}(n)$ をクリフォード代数 Cl_n の次数 2 の部分空間として定義する. すなわち

$$\mathfrak{spin}(n) := \text{span}_{\mathbf{R}} \{[e_i, e_j] = e_i e_j - e_j e_i \mid 1 \leq i, j \leq n\} \subset Cl_n. \quad (4.3)$$

リー環構造は $a, b \in \mathfrak{spin}(n)$ に対して $[a, b] = ab - ba$ で定義する. このときスピノール群は $Spin(n) := \exp \mathfrak{spin}(n) \subset Cl_n$. また $Spin(n)$ の $SO(n)$ への 2 重被覆を与えるには, 次の adjoint 表現 $(\pi_{Ad}, \mathbf{R}^n)$ を用いる

$$Spin(n) \times \mathbf{R}^n \ni (g, x) \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1} \in \mathbf{R}^n. \quad (4.4)$$

(2) (π_ρ, V_ρ) を $Spin(n)$ の有限次元既約ユニタリ表現とし, その無限小表現も同じ記号で記す. 既約表現は次のような dominant integral (half integral) weight ((π_ρ, V_ρ) の highest weight) で分類される.

$$\rho = (\rho^1, \dots, \rho^m) \in \mathbf{Z}^m \cup (\mathbf{Z} + 1/2)^m, \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \rho^1 \geq \dots \rho^{m-1} \geq |\rho^m| & \text{for } n = 2m, \\ \rho^1 \geq \dots \rho^{m-1} \geq \rho^m \geq 0 & \text{for } n = 2m + 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

例えば, スピノール表現 $(\pi_{\Delta^\pm}, V_{\Delta^\pm})$ の highest weight は $\Delta^\pm = (1/2, \dots, \pm 1/2)$ であり, $(\pi_{Ad}, \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{C})$ の highest weight は $(1, 0, \dots, 0)$ である.

(3) 通常のカシミール作用素は次で定義される.

$$C = \frac{1}{64} \sum_{i,j} [e_i, e_j][e_i, e_j]. \quad (4.7)$$

これは V_ρ 上次の定数で作用する.

$$c(\rho) = -\frac{1}{2}(\|\delta + \rho\|^2 - \|\delta\|^2) \quad (4.8)$$

高次カシミール作用素とは普遍展開環 $U(\mathfrak{spin}(n))$ の中心 $\mathfrak{z}$ の元, またはその V_ρ への作用 (定数) のことである. 高次化カシミール作用素らの生成元は

1. $n = 2m + 1$ のときは,

$$C^q = \left(-\frac{1}{4}\right)^q \sum_{l_1, \dots, l_q} [e_{l_q}, e_{l_1}][e_{l_1}, e_{l_2}] \cdots [e_{l_{q-1}}, e_{l_q}]. \quad (4.9)$$

2. $n = 2m$ のときは, この他にパフィアン型カシミール作用素を加える

$$\text{Pf} = \sum_{\sigma \in S_{2m}} \text{sgn}(\sigma) [e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}] \cdots [e_{\sigma(2m-1)}, e_{\sigma(2m)}]. \quad (4.10)$$

このパフィアン型カシミール作用素は $n = 2m$ のときの highest weight ρ の第 m 成分 ρ^m の符号を判別するために使われる.

これらカシミール作用素の (π_ρ, V_ρ) への作用を $C_\rho^q := \pi_\rho(C^q)$ と書くことにする. また, 各既約成分上で定数で作用するが, その定数も具体的にかける. (例えば [Z] を参照).

(4) カシミール作用素を用いて既約表現に対する共形重み (conformal weight) という定数を定義しよう. $(\pi_\rho \otimes \pi_{\text{Ad}}, V_\rho \otimes \mathbf{R}^n)$ 上で次の作用素を考える.

$$\hat{C} := C_{\rho \otimes \text{Ad}} - C_\rho \otimes \text{id} - \text{id} \otimes C_{\text{Ad}} \quad (4.11)$$

(4.7) により

$$\hat{C} = \frac{1}{32} \sum_{ij} \pi_\rho([e_i, e_j]) \otimes \pi_{\text{Ad}}([e_i, e_j]) \quad (4.12)$$

となることがわかる. この作用素 $\hat{C}$ は $V_\rho \otimes \mathbf{R}^n$ の各既約成分 V_λ 上に次の定数で作用する.

$$m(\lambda) := \frac{1}{2}(n - \|\delta + \lambda\|^2 + \|\delta + \rho\|^2 - 1) \quad (4.13)$$

この定数を conformal weight と呼ぶ. (ρ と λ に依存).

5 クリフォード準同型

(π_ρ, V_ρ) と $(\pi_{\text{Ad}}, \mathbf{R}^n)$ のテンソル表現 $V_\rho \otimes \mathbf{R}^n = V_\rho \otimes \mathbf{C}^n$ の既約分解 $\sum V_\lambda$ を調べることが目的であった. まず, どのような既約成分が現れるかを見てみる.

補題 5.1 (Fegan[Feg]). テンソル表現 $V_\rho \otimes \mathbf{R}^n = V_\rho \otimes \mathbf{C}^n$ の既約分解 $\sum V_\lambda$ の重複度は 1 であり, その *highest weight* は次のような *dominant integral or half integral weight* で与えられる.

1. $n = 2m$ のとき,

$$\lambda = \rho \pm \mu_i \quad 1 \leq i \leq m. \quad (5.1)$$

2. $n = 2m + 1$ かつ $\rho = (\rho^1, \dots, \rho^m)$ が $\rho^m \geq \frac{1}{2}$ を満たすとき,

$$\lambda = \rho \quad \text{or} \quad \lambda = \rho \pm \mu_i \quad (1 \leq i \leq m). \quad (5.2)$$

3. $n = 2m + 1$ かつ $\rho = (\rho^1, \dots, \rho^m)$ が $\rho^m = 0$ を満たすとき,

$$\lambda = \rho + \mu_m \quad \text{or} \quad \lambda = \rho \pm \mu_i \quad (1 \leq i \leq m-1). \quad (5.3)$$

ここで μ_i は第 i 成分が 1 で他が 0 となる *weight*. $\mu_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

Remark 5.1. $V_\rho \otimes \mathbf{R}^n = \sum V_\lambda$ の既約成分の数を $N + 1$ 個として, その highest weight を辞書式順序にならべて $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_N$ とする. このとき各既約成分に対する conformal weight $m(\lambda_k)$ は

$$-\rho^1 = m(\lambda_0) < m(\lambda_1) < \dots < m(\lambda_N) \quad (5.4)$$

となる. 以下, このように既約成分を順序付けしておく. ただし $n = 2m$ かつ $\rho^{m-1} \geq 1$ かつ $\rho^m = 0$ の場合には, $m(\rho - \mu_m) = m(\rho + \mu_m)$ となってしまう. この場合には $V_{\rho - \mu_m} \oplus V_{\rho + \mu_m}$ を一つの既約成分と考える. これらを区別したい場合にはバフィアン型カシミールを用いる.

さて, 高スピディラック作用素の表象となるクリフォード準同型を定義しよう.

定義 5.2. 既約分解 $V_\rho \otimes \mathbf{R}^n = \sum V_{\lambda_k}$ において, 各成分への直交射影を $\Pi_{\lambda_k}^\rho$ とする. このとき $\mathbf{R}^n$ の各元に対して V_ρ から V_{λ_k} へ線形写像が定義できる.

$$\mathbf{R}^n \times V_\rho \ni (v, \phi) \mapsto p_{\lambda_k}^\rho(v)\phi := \Pi_{\lambda_k}^\rho(\phi \otimes v) \in V_{\lambda_k} \quad (5.5)$$

この $p_{\lambda_k}^\rho(v)$ をクリフォード準同型と呼ぶ. また内積に関する随伴作用素を $(p_{\lambda_k}^\rho(v))^* : V_{\lambda_k} \rightarrow V_\rho$ と書く.

この定義から

$$\boxed{\text{クリフォード準同型 } p_\lambda^\rho = \text{直交射影 } \Pi_\lambda^\rho}$$

である. つまり, 高スピディラック作用素の表象 $\sigma_u(D_\lambda^\rho) = p_\lambda^\rho(u)$ の代数構造を調べるには, このクリフォード準同型を調べればよい. このクリフォード準同型の性質を調べるため基本となる Lemma を述べる.

補題 5.3. $u, v \in \mathbf{R}^n$ に対して, 次が成立.

$$\sum_{k=0}^N (p_{\lambda_k}^\rho(u))^* p_{\lambda_k}^\rho(v) = \langle u, v \rangle \text{id} \in \text{End}(V_\rho) \quad (5.6)$$

補題 5.4. 任意の $u \in \mathbf{R}^n$ に対して, 次が成立.

$$-\frac{1}{4} \sum_i p_\lambda^\rho(e_i) \pi_\rho([e_i, u]) = m(\lambda) p_\lambda^\rho(u) \quad (5.7)$$

ここで, 左辺では $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底 $\{e_i\}$ について和をとっている.

Proof. $V_\rho \otimes \mathbf{R}^n$ 上に作用素 $\widehat{C}$ を作用させる. このとき式(4.12) を用いればよい. ■

補題 5.5. $u \in \mathbf{R}^n$, $g \in Spin(n)$ とする, このとき次が成立

$$p_\lambda^\rho(g \cdot u \cdot g^{-1}) = \pi_\lambda(g) p_\lambda^\rho(u) \pi_\rho(g^{-1}). \quad (5.8)$$

Proof.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \pi_{\lambda_k}(g) p_{\lambda_k}^\rho(u) \pi_\rho(g^{-1}) \phi &= \pi_\rho(g) \pi_\rho(g^{-1}) \phi \otimes \pi_{Ad}(g) u \\ &= \phi \otimes \pi_{Ad}(g) u \\ &= \sum_{k=0}^N p_{\lambda_k}^\rho(g u g^{-1}) \phi \end{aligned}$$

■

6 表現論への応用

クリフォード準同型と高次カシミール作用素の関係を述べる.

定理 6.1. $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ から $\text{End}(V_\rho)$ への双線形写像 r_ρ^q を

$$\begin{aligned} r_\rho^q : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \ni (u, v) &\mapsto \\ \left(-\frac{1}{4}\right)^q \sum_{l_1, \dots, l_{q-1}} \pi_\rho([u, e_{l_1}]) \pi_\rho([e_{l_1}, e_{l_2}]) \cdots \pi_\rho([e_{l_{q-1}}, v]) &\in \text{End}(V_\rho), \end{aligned} \quad (6.1)$$

と定義し ($q \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$), $r_\rho^0(u, v) := \langle u, v \rangle$ とする. このとき次が成立

$$\sum_k m(\lambda_k)^q (p_{\lambda_k}^\rho(u))^* p_{\lambda_k}^\rho(v) = r_\rho^q(u, v). \quad (6.2)$$

幾何学では、特に $q = 0, 1$ のときが重要である。

$$\sum_k (p_{\lambda_k}^\rho(u))^* p_{\lambda_k}^\rho(v) = \langle u, v \rangle. \quad (6.3)$$

$$\sum_k m(\lambda_k) (p_{\lambda_k}^\rho(u))^* p_{\lambda_k}^\rho(v) = -\frac{1}{4} \pi_\rho([u, v]). \quad (6.4)$$

Proof. 補題 5.4 を繰り返し使って、最後に補題 5.3 を用いればよい。 ■

r_ρ^q のトレースをとれば、高次カシミール作用素 C_ρ^q に一致するので、

系 6.2. $\sum_{k,i} m(\lambda_k)^q (p_{\lambda_k}^\rho(e_i))^* p_{\lambda_k}^\rho(e_i)$ は表現空間 V_ρ 上高次カシミール作用素 C_ρ^q である。

Remark 6.1. $\sum_i (p_{\lambda_k}^\rho(e_i))^* p_{\lambda_k}^\rho(e_i)$ は高次カシミール作用素である。実際、補題 5.5 から $Spin(n)$ の作用と可換である。

さて、 $n = 2m$ のとき、パフィアン型カシミール作用素とクリフォード準同型の関係式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_k p(\lambda_k) (p_{\lambda_k}^\rho(e_j))^* p_{\lambda_k}^\rho(e_i) &= \delta_{ij} p(\rho) + \\ 8m(1-\delta_{ij}) \operatorname{sgn} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m \\ i & j & & \end{smallmatrix} \right) \sum_{\sigma \in \tilde{S}_{2m}} \operatorname{sgn}(\sigma) \pi_\rho([e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}]) \cdots \pi_\rho([e_{\sigma(2m-1)}, e_{\sigma(2m)}]), \end{aligned}$$

ここで $\tilde{S}_{2m}$ は $\{1, \dots, 2m\} \setminus \{i, j\}$ の置換であり、定数 $p(\nu)$ はパフィアン型カシミール作用素 Pf_ν の V_ν への作用。

系 6.3. $\frac{1}{n} \sum_{k,i} p(\lambda_k) (p_{\lambda_k}^\rho(e_j))^* p_{\lambda_k}^\rho(e_i)$ は V_ρ 上パフィアン型カシミール作用素である。

Example 6.1. (スピノール) (π_Δ, V_Δ) をスピノール表現とする。このとき $V_\Delta \otimes \mathbf{R}^n = V_\Delta \oplus V_T$ と二つの既約成分が現れ、そのうち一つは再びスピノール表現である。そこで二つのクリフォード準同型を得る。

$$p_\Delta^\Delta(u) : V_\Delta \rightarrow V_\Delta, \quad p_T^\Delta(u) : V_\Delta \rightarrow V_T. \quad (6.5)$$

これらクリフォード準同型の関係式は

$$(p_T^\Delta(e_j))^* p_T^\Delta(e_i) + (p_\Delta^\Delta(e_j))^* p_\Delta^\Delta(e_i) = \delta_{ij}, \quad (6.6)$$

$$-\frac{1}{2} (p_T^\Delta(e_j))^* p_T^\Delta(e_i) + \frac{n-1}{2} (p_\Delta^\Delta(e_j))^* p_\Delta^\Delta(e_i) = -\frac{1}{4} \pi_\Delta([e_j, e_i]). \quad (6.7)$$

そこで, よく知られたクリフォード代数の関係式を得る.

$$(p_{\Delta}^{\Delta}(e_j))^* p_{\Delta}^{\Delta}(e_i) + (p_{\Delta}^{\Delta}(e_i))^* p_{\Delta}^{\Delta}(e_j) = \frac{2}{n} \delta_{ij}. \quad (6.8)$$

このように, 定理 6.1 により, クリフォード代数を復元できる.

Example 6.2. (微分形式) $(\pi_{\Lambda^k}, \Lambda^k)$ を k 次外積代数表現. $\Lambda^k \otimes \mathbf{R}^n = \Lambda^{k+1} \oplus \Lambda^{k-1} \oplus V_C$ となるので 3 つのクリフォード準同型を得る. このとき適当に正規化すれば

$$p_{\Lambda^{k+1}}^{\Lambda^k}(u) = u \wedge : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k+1}, \quad p_{\Lambda^{k-1}}^{\Lambda^k}(u) = i(u) : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k-1}. \quad (6.9)$$

7 高スピディラック作用素への応用

クリフォード準同型は補題 5.5 により, 自然に同伴束間の束準同型に拡張できる. すなわち各 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, 束準同型

$$p_{\lambda}^{\rho}(X) : \mathbf{S}_{\rho} \rightarrow \mathbf{S}_{\lambda} \quad (7.1)$$

を得る. そこで, 高スピディラック作用素に対しても, ディラック作用素と同様の公式が成立する. $T(M)$ の局所正規直交フレームを $\{e_i\}$ とすれば

$$D_{\lambda}^{\rho} = \sum_i p_{\lambda}^{\rho}(e_i) \nabla_{e_i} \quad (7.2)$$

さらにクリフォード準同型の関係式から, 高スピディラック作用素の恒等式を得る. 例えば (6.3), (6.4) から,

$$\nabla^* \nabla = \sum_k (D_{\lambda_k}^{\rho})^* D_{\lambda_k}^{\rho}, \quad (7.3)$$

$$R_{\rho}^1 = \sum_k m(\lambda_k) (D_{\lambda_k}^{\rho})^* D_{\lambda_k}^{\rho}, \quad (7.4)$$

を得る. ここで $\nabla^* \nabla$ は connection Laplacian であり, R_{ρ}^1 は $\mathbf{S}_{\rho}$ 上の曲率変換 (例えば, スピノール束上ならスカラー曲率であり, 接ベクトル束上ならリッチ変換). この二つの式から $(D_{\lambda_0}^{\rho})^* D_{\lambda_0}^{\rho}$ を消去すれば, 一般ボホナーワイゼンベック公式を得る.

定理 7.1 (一般 Bochner 型恒等式). $1 \leq k \leq N$ に対して,

$$\hat{D}_{\lambda_k}^{\rho} = \sqrt{1 - \frac{m(\lambda_k)}{m(\lambda_0)}} D_{\lambda_k}^{\rho} \quad (7.5)$$

と正規化すると

$$\Delta_\rho := \sum_{1 \leq k \leq N} (\hat{D}_{\lambda_k}^\rho)^* \hat{D}_{\lambda_k}^\rho = \nabla^* \nabla + \frac{1}{-m(\lambda_0)} R_\rho^1 \quad (7.6)$$

となる. この Δ_ρ を S_ρ 上のボホナー型ラプラス作用素と呼ぶ.

Remark 7.1. 曲率を与える恒等式(7.4) などから, このボホナー型ラプラス作用素の固有値の曲率による下から評価を得ることもできる.

Remark 7.2. ディラック作用素 (の 2 乗) と微分形式上のラプラスベルトラミ作用素に対するボホナーワイゼンバック公式とボホナー型ラプリアンの固有値評価は, 上の系としてだせる. conformal weight を計算するだけでよい.

さて高スピディラック作用素が共形共変一階微分作用素であることはすでに述べたが, 共形共変性の直接的な証明もクリフォード準同型の関係式から示せる.

命題 7.2. リーマン計量 g を $g' = e^{2\sigma(x)}g$ と共形変形したとき, 高スピディラック作用素は次のように共形共変である.

$$D_\lambda'^\rho = e^{-(m(\lambda)+1)\sigma} D_\lambda^\rho e^{m(\lambda)\sigma}. \quad (7.7)$$

特に $\dim \ker D_\lambda^\rho < +\infty$ の場合には $\dim \ker D_\lambda^\rho$ は共形不変量である.

以上のように, クリフォード準同型の微分幾何への応用は豊富である. 詳しくは [Hom5].

8 ベクトル値球面調和多項式への応用

$\mathbf{R}^n$ 上ベクトル値球面調和多項式を考える. つまり $\mathbf{R}^n$ 上の既約同伴ベクトル束 $S_\rho = \mathbf{R}^n \times V_\rho$ の多項式切断の空間 $\sum S^q \otimes V_\rho$ または調和多項式切断の空間 $\sum H^q \otimes V_\rho$. ここで, S^q は $\mathbf{R}^n$ 上 q 次多項式の空間, H^q は q 次調和多項式の空間. (スピノール表現を考えれば, クリフォード解析学との関係が深い. ここでの話しは, クリフォード解析学の一般化である).

$\sum S^q \otimes V_\rho$ などを解析する道具として, 高スピディラック作用素と対

応する代数的作用素を用いる:

$$\begin{aligned}
x_{\lambda_k}^\rho &:= \sum x_i p_{\lambda_k}^\rho(e_i) : S^q \otimes V_\rho \rightarrow S^{q+1} \otimes V_{\lambda_k}, \\
(x_{\lambda_k}^\rho)^* &:= \sum x_i (p_{\lambda_k}^\rho(e_i))^* : S^q \otimes V_{\lambda_k} \rightarrow S^{q+1} \otimes V_\rho, \\
D_{\lambda_k}^\rho &:= \sum p_{\lambda_k}^\rho(e_i) \frac{\partial}{\partial x_i} : S^q \otimes V_\rho \rightarrow S^{q-1} \otimes V_{\lambda_k}, \\
(D_{\lambda_k}^\rho)^* &:= - \sum (p_{\lambda_k}^\rho(e_i))^* \frac{\partial}{\partial x_i} : S^q \otimes V_{\lambda_k} \rightarrow S^{q-1} \otimes V_\rho.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

ここで x_i は $\mathbf{R}^n$ の e_i に対応した座標.

補題 8.1. $S^q \otimes V_\rho$, $H^q \otimes V_\rho$ はテンソル表現により $Spin(n)$ (or $SO(n)$) の表現空間とみなす. このとき, 上の作用素(8.1) は $Spin(n)$ の作用と可換である.

これら不変作用素の関係式を述べる.

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq k \leq N} (x_{\lambda_k}^\rho)^* x_{\lambda_k}^\rho &= \sum_i (x_i)^2 = r^2, \quad \sum_k (D_{\lambda_k}^\rho)^* D_{\lambda_k}^\rho = \Delta, \\
\sum_k (x_{\lambda_k}^\rho)^* D_{\lambda_k}^\rho &= r \frac{\partial}{\partial r} = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \\
\sum_k m(\lambda_k) (x_{\lambda_k}^\rho)^* x_{\lambda_k}^\rho &= 0, \quad \sum_k m(\lambda_k) (D_{\lambda_k}^\rho)^* D_{\lambda_k}^\rho = 0, \\
[\Delta, (D_{\lambda_k}^\rho)^*] &= 0, \quad [\Delta, D_{\lambda_k}^\rho] = 0, \\
[\Delta, x_{\lambda_k}^\rho] &= -2D_{\lambda_k}^\rho, \quad [\Delta, (x_{\lambda_k}^\rho)^*] = 2(D_{\lambda_k}^\rho)^*.
\end{aligned}$$

ここで $\Delta = -\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ はラプラシアン, $r = \sqrt{\sum x_i^2}$. これらの関係式を利用すれば, ある意味で $H^q \otimes V_\rho$ の既約分解ができる.

命題 8.2. S_ρ 上のボホナー型ラプラシアン(7.6) に対応した次の作用素 E を考える.

$$E := \sum_{1 \leq k \leq N} \left(1 - \frac{m(\lambda_k)}{m(\lambda_0)}\right) (x_{\lambda_k}^\rho)^* D_{\lambda_k}^\rho. \tag{8.2}$$

このとき次が成立.

1. E は Δ と可換.

2. $H^q \otimes V_\rho = \sum_i V_{\mu_i}$ を既約分解として, 既約成分の *highest weight* を $\mu_0 > \mu_1 \geq \dots$ と辞書式順序で並べる. このとき E の固有値は $0 = e(\mu_0) < e(\mu_1) \leq \dots$ となり,

$$E = q + \frac{m(\mu_i, q)}{-m(\lambda_0)} \quad \text{on } V_{\mu_i}. \quad (8.3)$$

ここで

$$m(\mu_i, q) := \frac{1}{2}(q^2 + (n-2)q + \|\rho + \delta\|^2 - \|\mu_i + \delta\|^2). \quad (8.4)$$

3. E は非負の作用素であり, ゼロ固有空間は必ず存在し,

$$\ker E = V_{h^q + \rho} = V_{\mu_0} = \bigcap_{1 \leq k \leq N} \ker D_{\lambda_k}^\rho. \quad (8.5)$$

Proof. 共形重みを与える $\hat{C}$ と同様に, 作用素 $\hat{C} = C_{h^q \otimes \rho} - C_{h^q} \otimes \text{id} - \text{id} \otimes C_\rho$ を考えると.

$$\hat{C} = \sum_k m(\lambda_k) (x_{\lambda_k}^\rho)^* D_{\lambda_k}^\rho$$

が成立する. ■

Example 8.1. スピノール調和多項式 $H^q \otimes V_\Delta$ は二つの既約成分を持つ.

$$E = -xD = \begin{cases} 0 & \text{on } V_{\mu_0} \\ n + 2q - 2 & \text{on } V_{\mu_1}. \end{cases} \quad (8.6)$$

特に $\ker D = V_{\mu_0}$ であり, クリフォード解析における調和スピノール多項式.

Example 8.2. 外積代数値調和多項式 $H^q \otimes \Lambda^p$ は四つの既約成分を持つ.

$$E = i(x)d - x \wedge d^* = \begin{cases} 0 & \text{on } V_{\mu_0} \\ q + p & \text{on } V_{\mu_1} \\ n + q - p & \text{on } V_{\mu_2} \\ n + 2q - 2 & \text{on } V_{\mu_3}. \end{cases} \quad (8.7)$$

特に $\ker d \cap \ker d^* = V_{\mu_0}$ である. より詳しくは [Hom1] を参照.

9 $U(m)$ の場合

この section では, 今までの $Spin(n)$ (or $SO(n)$) の話を, $U(m)$ に対して考える. ここでは高次カシミール作用素との関係について述べる. クリフォード準同型と高次カシミール作用素との関係がより明確になると思う.

9.1 カシミール作用素

$u(m)$ を複素化した $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ の標準基底を $\{E_{ij}\}$ と書く. 普遍展開環の元として見た場合には $\{e_{ij}\}$ と書いておくことにする.

$$e_{ij}^k = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} e_{ii_1} e_{i_1 i_2} \cdots e_{i_{k-1} j} \quad (9.1)$$

とすれば, このトレースが高次カシミール作用素である. つまり

$$C^k := \sum_i e_{ii}^k. \quad (9.2)$$

これら $\{C_k\}_{k=1}^m$ が高次カシミール作用素全体 (つまり普遍展開環の中心) の生成元である. さて highest weight $\rho = (\rho^1, \dots, \rho^m)$ ($\rho^1 \geq \rho^2 \geq \dots \geq \rho^m$, $\rho^i \in \mathbb{Z}$) をもつ有限次元既約ユニタリ表現 (π_ρ, V_ρ) を考えたとき, この表現空間への C^k の作用を $C_\rho^k := \pi_\rho(C^k)$ と書けば, この作用素は次の定数で作用する (see [Z]).

$$c_\rho^k = \sum_{i=1}^m \gamma_i l_i^k. \quad (9.3)$$

ここで

$$l_i := \rho^i + (m - i), \quad \gamma_i := \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{1}{l_i - l_j}\right). \quad (9.4)$$

9.2 既約分解 $V_\rho \otimes (\mathbb{C}^m)^*$

$Spin(n)$ の場合のクリフォード準同型と同様にして, 既約分解 $V_\rho \otimes (\mathbb{C}^m)^* = \sum V_\lambda$ を考える. ここで $(\mathbb{C}^m)^*$ は $U(m)$ の自然表現の双対表現であり, highest weight は $-\mu_m = (0, \dots, 0, -1)$.

補題 9.1. 既約分解 $V_\rho \otimes (\mathbb{C}^m)^* = \sum V_{\lambda_i}$ において現れる既約成分の *highest weight* は次をみたす.

$$\lambda_i := \rho - \mu_i \quad \text{and } \lambda_i \text{ is dominant integral.} \quad (9.5)$$

ここで $\mu_i = (0_{i-1}, 1, 0_{m-i})$ である.

$(\mathbb{C}^m)^*$ の正規直交基底を $\{\bar{e}_k\}$ とする. クリフォード準同型と同様に次の V_ρ から V_{λ_i} への線形写像を定義できる.

$$p_{\lambda_i}^\rho(\bar{e}_i) : V_\rho \rightarrow V_{\lambda_i}. \quad (9.6)$$

ただし既約成分として $\lambda_k = \rho - \mu_k$ に対応するものが現れない場合には $p_{\lambda_k}^\rho := 0 : V_\rho \rightarrow V_{\lambda_k}$ とする. もちろんその随伴もゼロとする. 以下の結果はすべて $Spin(n)$ に対するクリフォード準同型に関する結果と同様に証明できる.

補題 9.2. $p_{\lambda_i}^\rho(\bar{e}_i) : V_\rho \rightarrow V_{\lambda_i}$ は次を満たす.

$$m(\lambda_i) p_{\lambda_i}^\rho(\bar{e}_k) = -2 \sum p_{\lambda_i}^\rho(\bar{e}_j) \pi_\rho(E_{jk}). \quad (9.7)$$

ここで $m(\lambda_i)$ は共形重みと同様にカシミール作用素から定義される定数で,

$$m(\lambda_i) = m(\rho - \mu_i) = -2(\rho^i + m - i) = -2l_i. \quad (9.8)$$

命題 9.3. $p_{\lambda_i}^\rho(\bar{e}_i) : V_\rho \rightarrow V_{\lambda_i}$ は次を満たす.

$$\begin{aligned} \sum_i m(\lambda_i)^q (p_{\lambda_i}^\rho(\bar{e}_k))^* p_{\lambda_i}^\rho(\bar{e}_l) &= (-2)^k \sum_{i_1 \cdots i_{q-1}} \pi_\rho(E_{ki_1}) \pi_\rho(E_{i_1 i_2}) \cdots \pi_\rho(E_{i_{q-1} l}) \\ &= (-2)^k \pi_\rho(e_{kl}^q). \end{aligned}$$

ここで左辺では, すべての既約成分に対して和をとっている.

高次カシミール作用素の表示を見れば, 次の系が容易に示せる.

系 9.4.

$$\sum_k (p_{\lambda_i}^\rho(\bar{e}_k))^* p_{\lambda_i}^\rho(\bar{e}_l) = \gamma_i \text{id} = \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{1}{l_i - l_j} \right) \text{id}. \quad (9.9)$$

ここで λ_k という表現が既約成分のなかに現れない場合 ($\rho^k = \rho^{k+1}$ となる場合) には, $\gamma_k = 0$ であることに注意.

参考文献

- [BFGK] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald and I. Kath, *Twistors and Killing spinors on Riemannian manifolds*, Teubner-Verlag, Leipzig/Stuttgart 1991.
- [Br] T. Branson *Stein-Weiss Operators and Ellipticity*, J. Funct. Anal. **151**, (1997), 334-383.
- [Bu] J. Bureš, *The higher spin Dirac operators*, Differential geometry and applications (Brno. 1998), 319-334, Masaryk Univ., Brno, 1999.
- [DSS] R. Delanghe, F. Sommen, and V. Souček, *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions*, Kluwer Ac. Publishers, 1992.
- [E] G. Esposito, *Dirac operators and Spectral Geometry*, Cambridge Lecture Notes in Physics **12**, Cambridge, 1998.
- [Feg] H. D. Fegan, *Conformally invariant first order differential operators*, Quat. J. Math. Oxford, **27** (1976), 371-378.
- [Fr] T. Friedrich, *Dirac operators in Riemannian Geometry*, Graduate Studies in Math. **25** AMS, 2000.
- [GiMu] J. E. Gilbert and M. A.M. Murray, *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*, Cambridge Studies in Adv. Math. **26**, Cambridge Uni. Press, Cambridge, 1991.
- [Hit] N. J. Hitchin, *Linear field equations on self-dual space*, Proc. R. Soc. Lond., A **370** (1980), 173-191.
- [Hom1] Y. Homma, *Spinor-valued and Clifford Algebra-valued Harmonic Polynomials*, J. Geom. Phys. **37** No. 3 (2001), 201-215.
- [Hom2] Y. Homma, *The Higher Spin Dirac Operator on 3-Dimensional Manifolds*, to appear in Tokyo Journal of Math.
- [Hom3] Y. Homma, *Clifford Homomorphisms and Higher Spin Dirac operators*, submitted to a journal. (math. DG/0007052)

- [Hom4] Y. Homma, *Spherical harmonic polynomials for higher bundles*, to appear in "Clifford analysis and its applications" kluwer.
- [Hom5] Y. Homma, *Dirac operators, Clifford algebras, and their generalization* doctoral dissertation at Waseda University, 2001.
- [LM] H. B. Lawson and M. L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.
- [Z] D. P. Zelobenko *Compact Lie Groups and Their Representations*, Trans. Math. Monographs. vol **40**, A.M.S. 1973.