表現論シンポジウム講演集, 2001
pp.33-43

Dual pair (O_M, Sp_N) における Capelli 恒等式

伊藤 稔 (京大理)

Introduction. 不変式論の重要な道具である Capelli 恒等式 [Ca1], [Ca2] についてその類似を dual pair の観点から構成する. dual pair の基本的な性質のひとつとして普遍包絡環と微分作用素環の不変式環のあいだに自然な準同型が成立するということがあるが, Capelli 恒等式は (GL_r, GL_s) という特別な dual pair の場合にこの準同型の具体的な記述を与えている[H2]. Capelli 恒等式のこの性質に注目して, より一般の dual pair に関して同様の記述を与える等式を考えたい. 本稿では実際に dual pair (O_M, Sp_N) に付随する Capelli 恒等式の類似を与える.

基本的な問題設定は次の通りである. 以下 複素数体 $\mathbb{C}$ の上で議論を行う. (G, G') を複素 symplectic 群 $Sp_k = Sp_k(\mathbb{C})$ における reductive dual pair とする. すなわち G, G' は互いが互いの centralizer であるような Sp_k の reductive な部分群である. このとき Sp_k の oscillator 表現 ω に対して, 多項式係数微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)$ における $\omega(G)$ および $\omega(G')$ の commutant はそれぞれ Lie 環 $\mathfrak{g}' = \mathrm{Lie}(G')$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ の作用から生成される [H2]. ただし ω の表現空間を V 上の急減少函数の空間としている. 特に普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{g}')$ の作用について次の等式が成立する:

$$\omega(U(\mathfrak{g})^G) = \mathcal{PD}(V)^{G\times G'} = \omega(U(\mathfrak{g}')^{G'}). \tag{1}$$

ただし $U(\mathfrak{g})^G$ は G の adjoint 作用に関する $U(\mathfrak{g})$ の不変元全体のなす環, $\mathcal{PD}(V)^{G\times G'}$ は $G \times G'$- 不変な多項式係数微分作用素全体のなす環である. このように dual pair の一般論として三つの不変式環のあいだの等式が成立する. しかし, この等式は抽象的な議論の産物であり, 具体的にどの普遍包絡環の元がどの不変微分作用素に対応するのかを表しているわけではない. 本稿で考えるのはこの等式 (1) の生成元のレベルでの具体的な記述である.

§1 では dual pair が (GL_r, GL_s) の場合について考察する. この場合には 不変式論で有名な Capelli 恒等式が等式 (1) の生成元レベルの対応を表す. この Capelli 恒等式はまたいろいろな意味で理想的な等式である. これを踏まえて §2 と §3 では dual pair が (O_M, Sp_N) の場合に類似の関係式を構成する. これが本稿の主結果である. 複素

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

symplectic 群の既約な reductive dual pair は (GL_r, GL_s), (O_M, Sp_N) の二系列に限ることが知られており, これでこの枠組みの Capelli 型の恒等式が出そろうことになる.

dual pair (O_M, Sp_N) における Capelli 型の恒等式の先行研究としては Molev と Nazarov による[MN] がある. その結果はやはり等式 (1) の具体的な記述であり 本稿の結果とも密接に関係しているが, 普遍包絡環の中心の扱いが異なっている. すなわち [MN] では普遍包絡環の中心の元を Harish-Chandra 同型の逆像で定めており, 本稿のように Lie 環の元で具体的に表すわけではない. 実際には Sklyanin determinant と呼ばれる量子群の概念を用いることにより Lie 環の基底で具体的に書き下すことは可能ではあるが[M], そうしてみても本稿の結果はこの[MN] とは独立である. むしろ両者を組み合わせることで普遍包絡環の中心元に関する新しい関係式が得られる (詳細は §4).

Capelli 恒等式には不変式論の第一基本定理の証明や, 概均質ベクトル空間の b-函数の計算など 様々な応用がある. §2 と §4 で紹介するように, 本稿で与える (O_M, Sp_N) の場合の類似物にも幾つかの応用がある. もっとも現時点では Capelli 恒等式ほど豊かな御利益があるわけではなく, 応用に関してはまだ研究の余地があると思われる.

1. Dual pair (GL_r, GL_s) and the Capelli identity. まず Capelli 恒等式そのものを復習しよう. なお 今節の主な内容は[H2], [U1] により詳しい解説がある.

テンソル積 $V = \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^s$ の上の多項式の空間 $\mathcal{P}(V)$ には一般線型群 GL_r, GL_s が自然に作用する. 特にこれから Lie 環 $\mathfrak{gl}_r$, $\mathfrak{gl}_s$ の作用 $L(E_{ij}) = \sum_{a=1}^{s} t_{ia} \frac{\partial}{\partial t_{ja}}$, $R(E'_{ij}) = \sum_{a=1}^{r} t_{ai} \frac{\partial}{\partial t_{aj}}$ が決まる. ただし t_{ij} は $V = \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^s$ の座標, また E_{ij}, E'_{ij} はそれぞれ $\mathfrak{gl}_r$, $\mathfrak{gl}_s$ の標準的な基底である. この表示は $\boldsymbol{E} = (E_{ij})$, $\boldsymbol{E}' = (E'_{ij})$, $T = (t_{ij})$, $\partial = (\frac{\partial}{\partial t_{ij}})$ という行列を用いて簡潔に $L(\boldsymbol{E}) = T\,{}^t\partial$, $R(\boldsymbol{E}') = {}^tT\partial$ とまとめることができる. このとき Capelli 恒等式と呼ばれる等式が成り立つ:

Theorem (The Capelli Identity). $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し, 普遍包絡環の元と微分作用素とを結ぶ次の等式が成立する:

$$L\Big(\sum_{|I|=k} \det(\boldsymbol{E}_{II} + \mathrm{diag}(k-1, k-2, \ldots, 0))\Big) = \sum_{|I|=|J|=k} \det T_{IJ} \det \partial_{IJ}$$
$$= R\Big(\sum_{|J|=k} \det(\boldsymbol{E}'_{JJ} + \mathrm{diag}(k-1, k-2, \ldots, 0))\Big).$$

ただし非可換な要素からなる k 次正方行列 $Z = (Z_{ij})$ の行列式を

$$\det(Z) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) Z_{\sigma(1)1} \cdots Z_{\sigma(k)k}$$

で定義する (この非可換行列式を column-determinant と呼ぶ). また $r \times s$ 行列 $Z = (Z_{ij})$ および $I \subset \{1, \ldots, r\}$, $J \subset \{1, \ldots, s\}$ に対し $Z_{IJ} = (Z_{ij})_{i \in I, j \in J}$ と定める.

この Capelli 恒等式は Introduction で述べた dual pair の議論と以下のように関連している．この等式に現れる普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_r)$ の元

$$C_k^{\mathfrak{gl}_r} = \sum_{|I|=k} \det(\boldsymbol{E}_{II} + \mathrm{diag}(k-1, k-2, \ldots, 0))$$

は Capelli elements と呼ばれるもので, 後でわかるように実は普遍包絡環の中心に属している．右辺に現れる普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_s)$ の元 $C_k^{\mathfrak{gl}_s}$ も中心元である．特にそれらの像である微分作用素 $\sum_{|I|=|J|=k} \det T_{IJ} \det \partial_{IJ}$ は $GL_r \times GL_s$- 不変となるが, この事実はまた独立に確かめることもできる． さらにこれら三つの元は k を動かしたときそれぞれ普遍包絡環の中心 $ZU(\mathfrak{gl}_r)$, $ZU(\mathfrak{gl}_s)$ そして $GL_r \times GL_s$- 不変な多項式係数微分作用素のなす環 $\mathcal{PD}(V)^{GL_r \times GL_s}$ の生成系となっている． 従ってこれらの不変式環のあいだに次の関係が成立することになる:

$$L(ZU(\mathfrak{gl}_r)) = \mathcal{PD}(V)^{GL_r \times GL_s} = R(ZU(\mathfrak{gl}_s)). \tag{2}$$

実はこの等式は dual pair の一般論から説明することができる． 実際, ここで考えた GL_r, GL_s の作用 L, R は Sp_{2rs} の oscillator 表現 ω の dual pair (GL_r, GL_s) への制限と本質的に一致している [H2], [H3] (正確にはスカラー倍のずれがある). すなわち不変式環の対応 (2) は本稿の最初に述べた dual pair に関する一般的な事実 (1) のひとつだったのである．そして Capelli 恒等式は, 等式 (1) の「$(G, G') = (GL_r, GL_s)$ の場合の生成元レベルの記述」であると解釈することができる．

Remarks. (1) oscillator 表現 ω の dual pair (GL_r, GL_s) への制限は正確には次のようになる:

$$\omega(E_{ij}) = \sum_{a=1}^{s} t_{ia} \frac{\partial}{\partial t_{ja}} + \frac{s}{2}\delta_{ij}, \qquad \omega(E'_{ij}) = \sum_{a=1}^{r} t_{ai} \frac{\partial}{\partial t_{aj}} + \frac{r}{2}\delta_{ij}.$$

(2) $L(\boldsymbol{E}) = T^t\partial$, $R(\boldsymbol{E}') = {}^tT\partial$ であるから, Capelli 恒等式は行列式の乗法公式の非可換な類似という側面もある．(より正確には Cauchy-Binet の公式の類似).

ふたつの普遍包絡環の中心の対応に限ると, Capelli 恒等式は Capelli elements どうしが対応するという単純な等式だが 次のように母函数の形で書き直すこともできる:

Corollary. 次の等式が成立する:

$$L(C^{\mathfrak{gl}_r}(u)) = R(C^{\mathfrak{gl}_s}(u + r - s)) \cdot u^{\overline{r-s}}.$$

ここで $C^{\mathfrak{gl}_r}(u)$ は次のような $\boldsymbol{E}$ の "固有多項式" である:

$$C^{\mathfrak{gl}_r}(u) = \det(\boldsymbol{E} + u1 + \mathrm{diag}(r-1, r-2, \ldots, 0)).$$

また階乗函数 $u^{\overline{k}}$, $u^{\underline{k}}$ を次のように定義している:

$$u^{\overline{k}} = u(u+1)(u+2)\cdots(u+k-1), \qquad u^{\underline{k}} = u(u-1)(u-2)\cdots(u-k+1).$$

この $C^{\mathfrak{gl}_r}(u)$ が Capelli elements $C_k^{\mathfrak{gl}_r}$ の次のような母函数であることに注意すれば, 上の Corollary は Capelli 恒等式から容易に導くことができる:

$$C^{\mathfrak{gl}_r}(u) = \sum_{k=0}^{r} C_k^{\mathfrak{gl}_r} \cdot u^{\overline{r-k}}.$$

2. Dual pair (O_M, Sp_N) and the action of $\mathfrak{o}_M$. 前節で見たように Capelli 恒等式は (GL_r, GL_s) という dual pair に対して不変式環の対応 (1) の生成元レベルの記述を与える. より一般の dual pair に対してもそのような等式が構成できないだろうか. 今節と次節の結果はこの動機に基づくもので, dual pair (O_M, Sp_N) における Capelli 恒等式の対応物を与える.

まず dual pair (O_M, Sp_N) の函数空間への作用を導入しよう. 以下 $M = 2m$, $N = 2n$ とおいて議論する (n は整数だが, m は一般には半整数である). 前節で見たように GL_M, GL_n は多項式の空間 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^n)$ へ自然に作用する. この GL_M の作用 L を直交群 O_M に制限する. これに合わせてうまく Lie 環 $\mathfrak{sp}_N$ の作用 R を考えて (2) と同様の次の等式が成り立つようにすることができる [H2], [H3]:

$$L(U(\mathfrak{o}_M)^{O_M}) = \mathcal{PD}(\mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^n)^{O_M \times \mathfrak{sp}_N} = R(ZU(\mathfrak{sp}_N)). \tag{3}$$

この R の具体的な形は少し後で述べるが, 本質的に GL_n の作用の拡張である. 作用する函数空間を急減少函数の空間等に置き換えると この R は Lie 群 Sp_N の作用に伸ばすことができ, このとき L, R は Sp_{MN} の oscillator 表現を dual pair (O_M, Sp_N) に制限したものに一致する. 特に (3) は (1) の特別な場合であったことになる. 以下, この (3) の具体的な記述という問題を扱う.

Remark. Lie 群の adjoint 作用に関する不変式環 $U(\mathfrak{g})^G$ は明らかに普遍包絡環の中心 $ZU(\mathfrak{g})$ の部分集合である. 実際には $G = GL_r, O_M, Sp_N$ に対しては, M が偶数のときの O_M を除いて $U(\mathfrak{g})^G = ZU(\mathfrak{g})$ が成立する.

結果を述べるために Lie 環とその表現を表す記号を用意しよう. Lie 環 $\mathfrak{o}_M$, $\mathfrak{sp}_N$ はそれぞれ $\mathfrak{gl}_M$, $\mathfrak{gl}_N$ の中で $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $F'_{ij} = E'_{ij} - J^{-1}E'_{ji}J$ の張る空間という形で実現できる. ただし J は次のような非退化な交代行列である:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき $\mathfrak{o}_M$, $\mathfrak{sp}_N$ の作用 L, R は $\boldsymbol{F}=(F_{ij})$, $\boldsymbol{F}'=(F'_{ij})$, $P=(T,\partial)$, $P^*=(\partial,-T)$ という行列を用いて $L(\boldsymbol{F})=P{}^tP^*+n1$, $R(\boldsymbol{F}')={}^tPP^*+m1$ と表すことができる ([H3], [I4]). 次が本稿の第一の主結果である:

Theorem 1. $k=0,1,2,\ldots$ に対し, 次の等式が成立する:

$$L(\sum_{|I|=k}\det(\boldsymbol{F}_{II}-n1+\mathrm{diag}(k-1,k-2,\ldots,0)))=\sum_{|I|=|J|=k}\det P_{IJ}\det P^*_{IJ}.$$

これは Capelli 恒等式の左半分の類似である. 行列式で表された普遍包絡環の元

$$B^{\mathfrak{o}}_k=\sum_{|I|=k}\det(\boldsymbol{F}_{II}-n1+\mathrm{diag}(k-1,k-2,\ldots,0))$$

は 本質的には[HU] によって与えられたもので, $k=0,1,2,\ldots$ としたとき $U(\mathfrak{o}_M)^{O_M}$ の生成系を与える. 従って Theorem 1 は生成元の対応という形で (3) の第一の等号の記述を与えている. また Capelli 恒等式と同じく 行列式の乗法公式の類似と見なせる.

Remark. Theorem 1 の文脈では $B^{\mathfrak{o}}_k$ が Capelli element $C^{\mathfrak{gl}}_k$ に相当する直交 Lie 環の普遍包絡環の中心元ということになる. しかし次節の議論を見ると, 必ずしもこの元こそが Capelli elements の対応物であるとは言いがたい. また n にも依存する量であるので, C の一歩手前という気持ちで B という記号で表す.

Theorem 1 を応用して, 直交 Lie 環の普遍包絡環の中心元のある関係式の証明ができる. Theorem 1 の特別な場合として $k=M=N$ という場合を見てみる:

$$L(\det(\boldsymbol{F}+\mathrm{diag}(m-1,m-2,\ldots,-m)))=\det P\det P^*.$$

ここで $PJ=P^*$ であること, そして行列 P の要素は行の異なる要素とは互いに可換であることに注意すると, $\det P=\det P^*$ であることがわかる. すなわち上の等式の右辺は $(\det P)^2$ と書ける. 一方, やはり $M=N$ のとき, [MN], [O] 等によって次の等式が得られている (証明は比較的易しい):

$$L(\mathrm{Pf}(\boldsymbol{F}))=(-)^{\frac{m(m-1)}{2}}\det P.$$

ただし $\mathrm{Pf}(\boldsymbol{F})$ は Pfaffian と呼ばれるもので次のように定義する:

$$\mathrm{Pf}(\boldsymbol{F})=\frac{1}{2^m m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2m}}\mathrm{sgn}(\sigma)F_{\sigma(1)\sigma(2)}\cdots F_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}.$$

$M = N$ のとき L は普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_M)$ の表現として忠実であることに注意すると, 以上の関係式を合わせて M が偶数のときの等式

$$\det(\boldsymbol{F} + \mathrm{diag}(m-1, m-2, \ldots, -m)) = \mathrm{Pf}(\boldsymbol{F})^2$$

を得る. これは「要素が可換な交代行列は Pfaffian の自乗が行列式に等しい」という古典的公式の非可換な類似である. この等式は[IU] においてかなり長い計算を経て初めて得られたものであるが, Theorem 1 を経由するとこのように簡単に証明できる.

Theorem 1 は Capelli 恒等式とほぼ同じ形であり, 証明もまた同様の手順でできる. この等式がこれまで知られていなかったのは不思議である.

3. Dual pair (O_M, Sp_N) and the action of $\mathfrak{sp}_N$. 前節では Capelli 恒等式の左半分の類似を与えた. 今節では残りの右半分 すなわち $\mathfrak{sp}_N$ の作用について考察する. 具体的にはふたつの普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_M)$, $U(\mathfrak{sp}_N)$ の中心の対応に関する等式を与える.

symplectic Lie 環の普遍包絡環の作用に関しては, 前節の結果ほど単純には Capelli 恒等式の類似は構成できない. その第一の原因は これまで用いてきた行列式 (column-determinant) がうまく働かないということである. 実際, 一般線型 Lie 環や直交 Lie 環との単純な類似で $\sum_{|I|=k} \det(\boldsymbol{F}'_{II} + u1 + \mathrm{diag}(k-1, k-2, \ldots, 0))$ という元を考えても, これは普遍包絡環 $U(\mathfrak{sp}_N)$ の中心元にならない. そこで新しく "対称化した行列式" Det を導入する [IU], [I2]:

$$\mathrm{Det}(Z\,;\, a_1, \ldots, a_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma') Z_{\sigma(1)\sigma'(1)}(a_1) \cdots Z_{\sigma(k)\sigma'(k)}(a_k).$$

ここで $Z = (Z_{ij})$ は k 次正方行列, $a_1, \ldots, a_k$ は複素数値のパラメータである. また $Z_{ij}(a) = Z_{ij} + a\delta_{ij}$ と定める. Z の要素が可換なときには $\mathrm{Det}(Z\,;\, 0, \ldots, 0) = \det Z$ であることに注意されたい. この Det は conjugation に関する不変性

$$\sum_{|I|=k} \mathrm{Det}(Z_{II}\,;\, a_1, \ldots, a_k) = \sum_{|I|=k} \mathrm{Det}((gZg^{-1})_{II}\,;\, a_1, \ldots, a_k)$$

を持つ. 特に行列 $Z = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}'$ がそれぞれ GL_r, O_M, Sp_N の元 g の adjoint 作用に関して $\mathrm{Ad}(g)Z = (\mathrm{Ad}(g)Z_{ij}) = {}^t g Z {}^t g^{-1}$ という等式をみたす[IU] ことに注意すると, 次の命題がわかる:

Proposition. Lie 環の基底を要素とする行列 $Z = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}'$ に対して小行列式の和 $\sum_{|I|=k} \mathrm{Det}(Z_{II}\,;\, a_1, \ldots, a_k)$ はそれぞれ $U(\mathfrak{gl}_r)^{GL_r}$, $U(\mathfrak{o}_M)^{O_M}$, $U(\mathfrak{sp}_N)^{Sp_N}$ に属す.

このように対称性の高い Det は, 普遍包絡環の中心元を構成するための 古典 Lie 環に共通の手段となる.

さらに $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ に対しては det と Det を結ぶ等式

$$\det(\boldsymbol{E}+u1+\mathrm{diag}(r-1,r-2,\dots,0))=\mathrm{Det}(Z+u1\,;\,r-1,r-2,\dots,0),$$
$$\det(\boldsymbol{F}+u1+\mathrm{diag}(M-1,M-2,\dots,0))=\mathrm{Det}(Z+u1\,;\,M-1,M-2,\dots,0)$$

が成り立つ [IU]. 同様の式は小行列 $\boldsymbol{E}_{II}$, $\boldsymbol{F}_{II}$ にも成り立つから, §§1, 2 で扱った普遍包絡環の元 $C_k^{\mathfrak{gl}}$, $B_k^{\mathfrak{o}}$ は この等式を用いて Det で書き直すことができ, 特にこれらが中心元であることもわかる. しかし $\mathfrak{sp}_N$ の基底を要素とする行列 $\boldsymbol{F}'$ にはこのような等式は (少なくとも単純な類似では) 成立しない.

新しい行列式 Det を用いて表した次の等式が本稿の第二の主結果である:

Theorem 2. $k=0,1,2,\dots$ に対して次の等式が成立する:

$$L(C_{2k}^{\mathfrak{o}})=\sum_{x=0}^{k}\frac{1}{x!}\,(m-k+1)^{\overline{x}}\,(m-n-1)^{\underline{x}}\,(n-k+1)^{\overline{x}}R(C_{2k-2x}^{\mathfrak{sp}}).$$

ここで $C_{2k}^{\mathfrak{o}}$, $C_{2k}^{\mathfrak{sp}}$ は次のように定める:

$$C_{2k}^{\mathfrak{o}}=\sum_{|I|=2k}\mathrm{Det}(\boldsymbol{F}_{II}\,;\,k-1,k-2,\dots,-k+1,0),$$
$$C_{2k}^{\mathfrak{sp}}=\sum_{|I|=2k}\mathrm{Det}(\widehat{\boldsymbol{F}}'_{II}\,;\,k-1,k-2,\dots,-k+1,0).$$

ただし $\widehat{\boldsymbol{F}}'$ は $\boldsymbol{F}'$ に 0 ばかりからなる第 $N+1$ 行, 第 $N+1$ 列を付け加えた $N+1$ 次の正方行列である. $C_{2k}^{\mathfrak{o}}$, $C_{2k}^{\mathfrak{sp}}$ はそれぞれ $U(\mathfrak{o}_M)^{O_M}$, $U(\mathfrak{sp}_N)^{Sp_N}$ の生成系であり, これで等式 (3) のうち普遍包絡環どうしの対応が記述できたことになる.

Theorem 2 は Capelli 恒等式と比較すると少し複雑に見えるが, §1 の Corollary のような母函数の形で綺麗にまとめることができる:

Corollary. 次の等式が成立する:

$$L(C^{\mathfrak{o}}(u))=R(C^{\mathfrak{sp}}(u))\cdot u^{\overline{M-N-1}}.$$

ただし $C^{\mathfrak{o}}(u)$, $C^{\mathfrak{sp}}(u)$ はそれぞれ次のような $\boldsymbol{F}$, $\widehat{\boldsymbol{F}}'$ の "固有多項式" であり, やはり $U(\mathfrak{o}_M)^{O_M}$, $U(\mathfrak{sp}_N)^{Sp_N}$ に属している:

$$C^{\mathfrak{o}}(u)=\mathrm{Det}(\boldsymbol{F}+u1\,;\,m-1,m-2,\dots,-m+1,0),$$
$$C^{\mathfrak{sp}}(u)=\mathrm{Det}(\widehat{\boldsymbol{F}}'+u1\,;\,n,n-1,\dots,-n).$$

また $u^{\overline{k}}$ は次のような "上下に伸びる階乗函数" である:

$$u^{\overline{k}} = (u + \tfrac{k-1}{2})(u + \tfrac{k-3}{2}) \cdots (u - \tfrac{k-1}{2}).$$

"固有多項式" $C^{\mathfrak{o}}(u)$, $C^{\mathfrak{sp}}(u)$ は 次の展開の形で $C^{\mathfrak{o}}_{2k}$, $C^{\mathfrak{sp}}_{2k}$ の母函数とみなせる. この展開式を使って Theorem 2 から Corollary を導くことができる.

$$C^{\mathfrak{o}}(u) = \sum_{0 \le 2k \le M} C^{\mathfrak{o}}_{2k} \cdot u^{\overline{M-2k-1}} \cdot u, \qquad C^{\mathfrak{sp}}(u) = \sum_{0 \le 2k \le N} C^{\mathfrak{sp}}_{2k} \cdot u^{\overline{N-2k+1}}.$$

Theorem 1 と Theorem 2 とで三つの不変式環の等式 (3) の具体的な記述ができたことになる. 実際 $B^{\mathfrak{o}}_k$ と $C^{\mathfrak{o}}_{2l}$ のあいだの次の関係式を使うと, 三つの不変式環の生成系レベルの対応がわかる:

$$B^{\mathfrak{o}}_k = (-)^k \sum_{0 \le 2l \le k} \frac{1}{(k-2l)!} (M-k+1)^{\overline{k-2l}} \left(\frac{N-k+1}{2} \right)^{\overline{k-2l}} C^{\mathfrak{o}}_{2l}.$$

Capelli 恒等式に現れた $C^{\mathfrak{gl}}_k$ も Theorem 1 に現れた $B^{\mathfrak{o}}_k$ も Det を用いて表されるから, 一連の Capelli 型恒等式は "対称化した行列式" でまとめることができる. "対称化した行列式" は column-determinant よりも実際の計算の上では複雑であるが, 不変性の観点からは自然なものであり, Capelli 型恒等式の本質的な姿のひとつと考えられる.

証明に関して少しだけ触れておく. Theorem 2 の証明は少なくとも計算技術的には Theorem 1 よりもかなり難しい. 詳細は本稿では省略するが, 計算は外積代数を用いて行う. 行列式を反可換な形式的変数を用いてある種の "母函数" で表示することで, 複雑になりかねない計算を整理して進めることができる.

Remarks. (1) symplectic Lie 環の普遍包絡環の中心元として, $\boldsymbol{F}'$ ではなく $\widehat{\boldsymbol{F}}'$ の行列式で定義された $C^{\mathfrak{sp}}_{2k}$, $C^{\mathfrak{sp}}(u)$ を考えるのは一見奇妙である. しかし何故かこうすると各種の関係式がうまく表される. 原理的にはこれらを $\boldsymbol{F}'$ の "対称化した行列式" で表すことも可能だが, パラメータが簡潔な形ではなくなる. 何故 $\boldsymbol{F}'$ ではなく $\widehat{\boldsymbol{F}}'$ なのかということには何か本質的な背景があると思われるが, 今のところはよくわからない.

(2) 上で述べたように $U(\mathfrak{o}_M)^{O_M}$, $U(\mathfrak{sp}_N)^{Sp_N}$ の生成系は偶数次の行列式の和で与えられる. 奇数次の行列式については, 次のような行列式の和が 0 になる:

$$\sum_{|I|=2k+1} \mathrm{Det}(\boldsymbol{F}_{II}\,;\, k, k-1, \ldots, -k) = 0, \qquad \sum_{|I|=2k+1} \mathrm{Det}(\widehat{\boldsymbol{F}}'_{II}\,;\, k, k-1, \ldots, -k) = 0.$$

(3) 上記の普遍包絡環の中心元のうち C^{o}_{2k} は column-determinant または Pfaffian を用いて書くこともできる[IU]:

$$\begin{aligned} C^{o}_{2k} &= \sum_{|I|=2k} \det(\boldsymbol{F}_{II} + \mathrm{diag}(k, k-1, \ldots, -k+1)) \\ &= \sum_{|I|=2k} \det(\boldsymbol{F}_{II} + \mathrm{diag}(k-1, k-2, \ldots, -k)) = \sum_{|I|=2k} \mathrm{Pf}(\boldsymbol{F}_{II})^2. \end{aligned}$$

また, 直交 Lie 環の "固有多項式" $C^{o}(u)$ は次のようにふたつの det の平均として表すことができる:

$$\begin{aligned} C^{o}(u) = \frac{1}{2}\{ &\det(\boldsymbol{F} + u1 + \mathrm{diag}(m, m-1, \ldots, -m+1)) \\ &+ \det(\boldsymbol{F} + u1 + \mathrm{diag}(m-1, m-2, \ldots, -m))\}. \end{aligned}$$

4. The images under the Harish-Chandra isomorphisms. Theorem 2 の応用のひとつとして $C^{\mathfrak{sp}}(u)$ の Harish-Chandra 同型による像の計算ができる.

前節まで不変式環の対応 (1) の記述を考えてきたが, 一口に「記述」といっても幾通りもの方法が考えられる. 例えば, (1) という三つの不変式環の対応のうち普遍包絡環どうしの対応に関しては, 固有値の対応という形で詳しい研究がされてきた. 本稿の Theorem 2 で扱った (O_M, Sp_N) の場合のふたつの普遍包絡環の中心の対応もこの形では既に[KV] 等により調べられている. しかしこれは Theorem 2 が無駄ということではない. 具体的な中心元に対しその固有値, すなわち Harish-Chandra 同型の像を計算することは一般に容易ではないからである. 実際, 逆に本稿の結果を固有値の対応と見比べることによって, symplectic Lie 環の普遍包絡環の中心元 $C^{\mathfrak{sp}}(u)$ の Harish-Chandra 同型による像の計算ができるのである.

直交 Lie 環の普遍包絡環における "固有多項式" $C^{o}(u)$ の Harish-Chandra 同型の像は既に Pfaffian を利用して計算されている ([IU], [I2]). また Harish-Chandra 同型の像の言葉による (O_M, Sp_N) の場合の普遍包絡環の中心の対応は[KV] で調べられており, その結果は[MN] において Theorem 2 に相当する形でまとめられている. 普遍包絡環 $U(\mathfrak{sp}_N)$ の作用は $M \geq N$ のとき忠実だから, これらを組み合わせることで symplectic Lie 環の普遍包絡環の "固有多項式" $C^{\mathfrak{sp}}(u)$ の像がわかる:

Corollary. $ZU(\mathfrak{sp}_N)$ 上の Harish-Chandra 同型 $\overline{\gamma}^{\mathfrak{sp}}$ に関して次が成立する:

$$\overline{\gamma}^{\mathfrak{sp}}(C^{\mathfrak{sp}}(u)) = u(u^2 - F'^2_{11}) \cdots (u^2 - F'^2_{nn}).$$

参考のために 一般線型 Lie 環および直交 Lie 環における "固有多項式" についても Harish-Chandra 同型 $\overline{\gamma}^{\mathfrak{gl}}$, $\overline{\gamma}^{\mathfrak{o}}$ による像を記しておく:

$$\overline{\gamma}^{\mathfrak{gl}}(C^{\mathfrak{gl}_r}(u)) = (u+E_{11})(u+E_{22})\cdots(u+E_{rr}).$$

$$\overline{\gamma}^{\mathfrak{o}}(C^{\mathfrak{o}}(u)) = \begin{cases} (u^2-\bar{F}_{11}^2)\cdots(u^2-\bar{F}_{M^\dagger M^\dagger}^2), & M\text{: even}, \\ u(u^2-\bar{F}_{11}^2)\cdots(u^2-\bar{F}_{M^\dagger M^\dagger}^2), & M\text{: odd}. \end{cases}$$

ただし $M^\dagger$ で $M/2$ を越えない最大の整数を表す. また $\bar{F}_{11},\ldots,\bar{F}_{M^\dagger M^\dagger}$ は直交 Lie 環 $\mathfrak{o}_M$ の Cartan 部分環の標準的な基底である. これらのうち $C^{\mathfrak{gl}}(u)$ の像の計算は非常に易しい. これは Capelli 恒等式の大きな利点であり, 多くの応用を持つ理由のひとつとなっている. これと比較すると直交 Lie 環や symplectic Lie 環に対する $C^{\mathfrak{o}}(u)$, $C^{\mathfrak{sp}}(u)$ の像の計算は決して易しくないが, 結果としてはやはり一般線型 Lie 環の場合とよく対応している.

最後に, これらの "固有多項式" に成立する Cayley–Hamilton 型の関係式を紹介しておく. これまで考えてきた "固有多項式" はその名に相応しく以下のような Cayley–Hamilton 型の関係式を満たす. まず一般線型 Lie 環については次が成立する[U3]:

$$C^{\mathfrak{gl}}(-\boldsymbol{E}) = 0.$$

直交 Lie 環, symplectic Lie 環に対しては

$$f(u) = \begin{cases} C^{\mathfrak{o}}(u), & M\text{: even}, \\ \frac{u-1/2}{u}C^{\mathfrak{o}}(u), & M\text{: odd}, \end{cases} \qquad g(u) = \frac{1}{u}C^{\mathfrak{sp}}(u)$$

とおくと,

$$f(\boldsymbol{F}) = 0, \qquad g(\boldsymbol{F}') = 0$$

が成立する ([I2], [M]). これらのうち一般線型 Lie 環, 直交 Lie 環の等式は直接証明することができるが, symplectic Lie 環の式は 固有値の言葉による結果[G], [M] を上記の Corollary で $C^{\mathfrak{sp}}(u)$ と結び付けることで得られる.

References

[Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.

[Ca2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.

[G] M.D. Gould, *Characteristic identities for semisimple Lie algebras*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B **26** (1985), 257–283.

[H1] R. Howe, *θ-series and invariant theory*, in "Automorphic Forms, Representations, and L-Functions" Part I, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 275–285.

[H2] ———, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 823.

[H3] ———, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond*, in "the Schur Lectures (1992)," Israel Math. Conf. Proc. **8**, 1995.

[HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[I1] M. Itoh, *Explicit Newton's formulas for $\mathfrak{gl}_n$*, J. Algebra **208** (1998), 687–697.

[I2] ———, *Capelli elements for the orthogonal Lie algebras*, J. Lie Theory **10** (2000), 463–489.

[I3] ———, *A Cayley-Hamilton theorem for the skew Capelli elements*, J. Algebra **242** (2001), 740-761.

[I4] ———, *Correspondences of the Casimir operators in the reductive dual pairs*, preprint (2000).

[IU] M. Itoh, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, Compositio Math. **127** (2001), 333-359.

[KV] M. Kashiwara and M. Vergne, *On the Segal–Shale–Weil representation and harmonic polynomial*, Invent. Math. **44** (1978), 1–47.

[MVW] C. Mœglin, M.-F. Vignéras and J.-L. Waldspurger, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1291, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[M] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), 923–943.

[MN] A. Molev and M. Nazarov, *Capelli identities for classical Lie algebras*, Math. Ann. **313** (1999), 315–357.

[N] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.

[NUW] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$*, Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.

[O] G. Ochiai, *A Capelli type identity associated with the dual pair $(\mathfrak{sp}_{2n}, O_m)$*, Master's thesis at Kyoto University (1996 Feb.).

[U1] T. Umeda, *The Capelli identities, a century after*, Sūgaku **46** (1994), 206–227; (in Japanese); English transl. in "Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants," AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu

[U2] ———, *On the proof of the Capelli identities*, preprint (1997).

[U3] ———, *Newton's formula for $\mathfrak{gl}_n$*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3169–3175.

[U4] ———, *On Turnbull identity for skew symmetric matrices*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **43** (2000), 379–393.

[Z] D.P. Želobenko, *Compact Lie Groups and their Representations*, Translations of Mathematical Monographs **40**, American Mathematical Society, 1973.