表現論シンポジウム講演集, 2001
pp.23-32

楕円型ルート系に付随したテータ関数

竹林 忠吉

1 楕円型ルート系の定義と楕円型 Weyl 群

F を 実有限次元ベクトル空間, $I : F \times F \to \mathbb{R}$ を F 上の対称双線形形式とする。元 $\alpha \in F$ が non-isotropic $\Leftrightarrow I(\alpha,\alpha) \neq 0$, と定義するとき、$\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{I(\alpha,\alpha)}$ を α の双対と言う。$\alpha \in F$ が non-isotropic のとき、鏡映 $w_\alpha \in O(F,I)$ を $w_\alpha(u) := u - I(u,\alpha^\vee)\alpha,\ u \in F$ により定義する。ここで直交群 $O(F,I) := \{g \in GL(F) \mid I(x,y) = I(gx,gy),\ \forall x,y \in F\}$.

定義 (一般化されたルート系)
non-isotropic な元からなる部分集合 $R \subset F$ が I に属するルート系であるとは、以下の公理 (1) ~ (4) を満たすことである。
(1) R で生成される F の部分加群を $Q(R)$ と書くと, $Q(R)$ は F の格子となる。
i.e. $Q(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq F$
(2) R の任意の元 $\alpha,\beta \in R$ に対し $I(\alpha,\beta^\vee) \in \mathbb{Z}$
(3) R の任意の元 $\alpha \in R$ の鏡映 w_α に対し R は不変 i.e. $w_\alpha R = R$
(4) (既約性) $R = R_1 \cup R_2$ かつ $R_1 \perp R_2$ (i.e. $I(\alpha_1,\alpha_2) = 0,\ \forall \alpha_i \in R_i$) ならば $R_1 = \emptyset$, 又は $R_2 = \emptyset$

定義 (楕円型ルート系)
(1) Rが楕円型ルート系であるとはその属するIが半正定値かつ $radI := \{x \in F \mid I(x,y) = 0,\ \forall y \in F\}$ の rank が 2 のこと。
(2) 楕円型ルート系 R の marking G とは $radI(\simeq \mathbb{R}^2)$ の実一次元線形部分空間で $G \cap Q(R) \simeq \mathbb{Z}$ となるもののこと。

(注) (R,G) を marking 付き楕円型ルート系という。R を $F/radI$, F/G へ射影した像集合をそれぞれ $R/radI$, R/G と書くことにすると、それぞれ有限ルート系、アフィンルート系となる。

R を楕円型ルート系とするとき、鏡映 w_α, $\alpha \in R$ で生成される群 W_R を楕円型 Weyl 群という。射影 $p : F \to F/rad(I)$ より準同型 $p_* : W_R \to W_{R_f}$ が得られ、完全系列

$$0 \longrightarrow H_R \xrightarrow{E} W_R \xrightarrow{p_*} W_{R_f} \longrightarrow 1$$

が得られる。また, $W_R = W_{R_f} \ltimes H_R$ と半直積に分解される。ここで、W_{R_f} は 有限ルート系 R_f の有限 Weyl 群, $H_R := (radI \otimes_{\mathbb{R}} F/radI) \cap E^{-1}(W_R)$ は rank $2l$ の 自由可換群 $(\simeq \mathbb{Z}^{2l})$ であり, $E : F \otimes_{\mathbb{R}} F/rad(I) \to End(F)$ は Eichler-Siegel 変換と言われる 半群の準同型で

$$E(\sum_i \xi_i \times \eta_i)(u) := u - \sum_i \xi_i I(\eta_i, u), \quad u \in F$$

により定義される。

2 The hyperbolic extension $(\widetilde{F}, \widetilde{I})$

F を含む実ベクトル空間 $\widetilde{F}$ で次のようなものが (同型を除いて) 唯一つある。

(i) $F \subset \widetilde{F}$, $dim\widetilde{F} = dimF + 1$ $(= l + 3$ とする)

(ii) $\widetilde{F}$ 上の対称双線形形式 $\widetilde{I} : \widetilde{F} \times \widetilde{F} \to \mathbb{R}$ で次の性質を持つものがある。

(a) $\widetilde{I}|_F = I$, (b) $rad(\widetilde{I}) = G$ $(= \mathbb{R}a)$

$(\widetilde{F}, \widetilde{I})$ を (F, I) の hyperbolic extension という。このとき, $\alpha \in R$ を $\widetilde{F}$ の元とみなして定義した鏡映を $\widetilde{w_\alpha} \in O(\widetilde{F}, \widetilde{I})$ と書き $\widetilde{w_\alpha}$, $\alpha \in R$ で生成される群を $\widetilde{W_R}$ と書く。$\widetilde{W_R}$ の $\widetilde{F}$ への作用を F に制限することにより、自然な上への写像 $\widetilde{W_R} \to W_R$ が得られ、この写像の核を $\widetilde{K}$ と書いて完全系列を得る。

$$0 \longrightarrow \widetilde{K} \xrightarrow{\widetilde{E}} \widetilde{W_R} \longrightarrow W_R \longrightarrow 1 .$$

補題 ([4])

(i) $\widetilde{K}$ は $k := (I : I_R)^{\frac{l_{max}+1}{m_{max}}} a \otimes b$ で生成される無限巡回群。

(ii) $\widetilde{W_R}$ は W_R の中心拡大である。

(ここで、a, b は $rad(I) \cap Q(R) \simeq \mathbb{Z}^2$ の 基底であり, (F, I) に属するルート系 R に対して $cI(x, x) \in 2\mathbb{Z}, \forall x \in Q(R)$ となる最小の正数 c を $(I_R : I)$ で表し、双線形形式 cI を I_R で表す。)

複素アフィン半空間 を次のように定義する。

$\widetilde{\mathbf{E}}^{l+2} := \{x \in Hom_{\mathbf{R}}(\widetilde{F}^{l+3}, \mathbb{C}) \mid a(x) = 1,\ Im(b(x)) > 0\}$,

$\mathbf{E}^{l+2} := \{x \in Hom_{\mathbf{R}}(\widetilde{F}^{l+2}, \mathbb{C}) \mid a(x) = 1,\ Im(b(x)) > 0\}$,

$\mathbf{H} := \{x \in Hom_{\mathbf{R}}(rad(I), \mathbb{C}) \mid a(x) = 1,\ Im(b(x)) > 0\}$,

ここで、a, $b \in rad(I)$ は その双対空間上の線形汎関数と理解し、$\tau(x) := \frac{b(x)}{a(x)}$ とおく。定義により $\widetilde{\mathbf{E}}^{l+2}$ 上に群 $\widetilde{W_R}$ が、$\mathbf{E}^{l+1}$ 上に群 W_R が作用して、埋め込み : $\widetilde{F} \supset F \supset rad(I)$ から得られる 射影 $\widetilde{\mathbf{E}}^{l+2} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \widetilde{\mathbf{E}}^{l+1} \xrightarrow{\pi} \mathbf{H}$ と可換となる。

3 The extension $(\widehat{F}, \widehat{I})$ of $(\widetilde{F}, \widetilde{I})$

同様の方法で $\widetilde{F}$ をさらに拡張する。$\widetilde{F}$ を含む実ベクトル空間 $\widehat{F}$ で次のようなものが（同型を除いて）唯一つある。

(i) $\widetilde{F} \subset \widehat{F}$, $dim\widetilde{F} = dim\widetilde{F} + 1$ $(= l + 4)$

(ii) $\widehat{F}$ 上の対称双線形形式 $\widehat{I} : \widehat{F} \times \widehat{F} \to \mathbb{R}$ で次の性質を持つものがある。

(a) $\widehat{I}|_{\widetilde{F}} = \widetilde{I}$, (b) $rad\widehat{I} = 0$

このとき、$\alpha \in R$ を $\widehat{F}$ の元とみなして定義した鏡映を $\widehat{w_\alpha} \in O(\widehat{F}, \widehat{I})$ と書き, $\widehat{w_\alpha}$, $\alpha \in R$ で生成される群を $\widehat{W_R}$ と書く。$\widehat{W_R}$ の $\widehat{F}$ への作用を F に制限することにより、自然な上への写像 $\widehat{W_R} \to W_R$ が得られ、この写像の核を $\widehat{K}$ と書くと次を得る。

補題 $\widehat{W_R}$ は W_R の中心拡大である。

$$0 \longrightarrow \widehat{K} \xrightarrow{\widehat{E}} \widehat{W_R} \xrightarrow{p_*} W_R \longrightarrow 1 .$$

ここで、

(i) p_* は $\widehat{W_R}$ の $\widehat{F}$ 上の作用を F へ制限して得られる全射準同型。

(ii) $\widehat{K}$ は $\widehat{M}$ の lattice で $\widehat{K} := \widehat{E}^{-1}(\widehat{W_R}) \cap \widehat{M}$ で定義される。

(iii) $\widehat{K}$ は $k := (I : I_R)\frac{l_{max}+1}{m_{max}}(a \otimes b - b \otimes a)$ で生成される無限巡回群。

(証明) $(\widehat{F}, \hat{I})$ に対する Eichler Siegel 写像 $\widehat{E} : F \otimes F \to End(\widehat{F})$ は

$$\widehat{E}(\sum_i f_i \otimes g_i)(u) := u - \sum_i f_i \hat{I}(g_i, u), \quad u \in \widehat{F},$$

で定義される。 $F \otimes_{\mathbb{R}} F$ 上の半群構造を

$$(\sum_i u_i \otimes v_i) \circ (\sum_j w_j \otimes x_j) := \sum_i u_i \otimes v_i + \sum_j w_j \otimes x_j - \sum_{i,j} \hat{I}(v_i, w_j) u_i \otimes x_j$$

で与えると次が成立。

(a) $\widehat{E}$ は単射。

(b) $\widehat{E}$ は半群の準同型 i.e. $\widehat{E}(\xi \circ \eta) = \widehat{E}(\xi) \cdot \widehat{E}(\eta)$.

(c) non-isotropic $\alpha \in F$ に対して鏡映 w_α は $w_\alpha = \widehat{E}(\alpha \otimes \alpha^\vee)$ $(\forall \alpha \in R)$ で与えられる。

(d) $\widehat{W_R}$ 上での Eichler Siegel 写像の逆写像 $\widehat{E}^{-1} : \widehat{W_R} \to F \otimes F$ は well defined である。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M} := ker(rad\ I \otimes rad\ I & \longrightarrow & S^2(rad\ I)), \\ \cup & & \cup \\ \xi & \longrightarrow & \frac{1}{2}(\xi + {}^t\xi) \end{array}$$

ここで、 $S^2(V)$ は V の対称テンソル積であり, $\widehat{M} = \mathbb{R}(a \otimes b - b \otimes a)$ である (cf. [4], §1).

$\widehat{E}(F \otimes F)$ の $\widehat{F}$ 上の作用は部分空間 F を不変にし、制限写像 p_* は well defined で次の可換図形を得る。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{W_R} & \xrightarrow{p_*} & W_R \\ \cap\ \widehat{E}^{-1} & & \cap\ E^{-1} \\ F \otimes F & \longrightarrow & F \otimes (F/rad\ I) \end{array}$$

それゆえ、$\widehat{K} := \widehat{E}^{-1}(\widehat{W_R}) \cap (F \otimes radI)$ とおくことにより完全系列を得る。 $\widehat{M} \subset F \otimes radI$ なので $\widehat{K} \subset \widehat{M}$ を示せばよい。 $\xi \in \widehat{K} \subset F \otimes radI$ に対して、 $w := \widehat{E}(\xi) \in \widehat{W_R} \subset (\widehat{F}, \hat{I})$ とおく. このとき、 $\xi + {}^t\xi \equiv \hat{I}(\xi, {}^t\xi) \mod \widehat{F} \otimes 1 + 1 \otimes \widehat{F}$.

(証明) $w = \widehat{E}(\xi) = \widehat{E}(\alpha \otimes \alpha^\vee)$ とおくと次が成立。

$$\begin{aligned} (1) \quad wf &= \widehat{E}(\xi)f = f - \hat{I}(\xi, f), \\ (2) \quad \hat{I}(wf, \xi) &= \hat{I}({}^t\xi, wf), \\ (3) \quad \hat{I}(\xi, f) &= \xi_1 \hat{I}(\xi_2, f) \\ &= \xi_1 \hat{I}(w\xi_2, wf) \\ &= \xi_1 \hat{I}(\xi_2 - \alpha \hat{I}(\alpha^\vee, \xi_2), wf) \\ &= \hat{I}(\xi - \hat{I}(\xi, {}^t\xi), wf) \end{aligned}$$

これらを使うと、

$$\hat{I}(f, g) = \hat{I}(wf, wg)$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{I}(wf, \widehat{E}(\xi)g) \\
&= \hat{I}(wf, g - \alpha\hat{I}(\alpha^\vee, g)) \\
&= \hat{I}(wf, g) - \hat{I}(wf, \alpha)\hat{I}(\alpha^\vee, g) \\
&= \hat{I}(wf, g) - \hat{I}(\hat{I}(wf, \alpha)\alpha^\vee, g) \\
&= \hat{I}(wf, g) - \hat{I}(\hat{I}(wf, \xi), g)
\end{aligned}
$$

それゆえ

$$
\begin{aligned}
& f - wf + \hat{I}(wf, \xi) \equiv 0 \mod \widehat{F} \otimes 1 + 1 \otimes \widehat{F}, \\
&= \hat{I}(\xi, f) + \hat{I}(wf, \xi) \\
&= \hat{I}(\xi - \hat{I}(\xi, {}^t\xi), wf) + \hat{I}(wf, \xi) \qquad (\text{ by (3) }) \\
&= \hat{I}(\xi - \hat{I}(\xi, {}^t\xi) + {}^t\xi, wf)
\end{aligned}
$$

ゆえに、 $\xi + {}^t\xi - \hat{I}(\xi, {}^t\xi) \equiv 0 \mod \widehat{F} \otimes 1 + 1 \otimes \widehat{F}$. Q.E.D

$\xi \in F \otimes radI$ なので $\hat{I}(\xi, {}^t\xi) = 0$ それゆえ、 $(*)$ $\xi + {}^t\xi \equiv 0$. ふたたび $\xi \in F \otimes radI$ に注意すると、 $(**)$ $\xi \in radI \otimes radI$, $(*)$ と $(**)$ より $\xi \in \widehat{M}$. $\widehat{K}$ は lattice $Q(R) \otimes_{\mathbb{R}} Q(R^\vee)$ に含まれるので $\widehat{K}$ は $\widehat{M}$ の中で discrete. また、(iii) の証明は [4], §11 と同様である。 Q.E.D.

(注) $\widehat{K} \subset \widehat{M}$ より $\widehat{K}$ は center である。なぜなら、 $\xi \in \widehat{K}$, $\eta \in F$ とすると、
$\widehat{E}(\xi)\widehat{E}(\eta) = \widehat{E}(\xi \circ \eta) = \widehat{E}(\xi + \eta - \hat{I}(\xi, \eta)) = \widehat{E}(\xi + \eta) = \widehat{E}(\eta)\widehat{E}(\xi)$.

命題 $\widetilde{W_R} \simeq \widehat{W_R}$.

(証明)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \widehat{K} & \longrightarrow & \widehat{W_R} & \longrightarrow & W_R & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & \widetilde{K} & \longrightarrow & \widetilde{W_R} & \longrightarrow & W_R & \longrightarrow & 1
\end{array}
$$

ここで、 $\widehat{K} \to \widetilde{K}$ と $\widehat{W_R} \to W_R$ は制限写像 $\widehat{w}_\alpha|_{\widetilde{F}} = \widetilde{w}_\alpha$. 補題より $\widehat{K} \cong \widetilde{K}$ なので五項補題より $\widehat{W_R} \cong \widetilde{W_R}$. Q.E.D.

基底 $\Lambda_b \in \widetilde{F} \backslash F$, $\Lambda_a \in \widehat{F} \backslash \widetilde{F}$ で次の内積を持つものを固定する。

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}(\Lambda_b, b) &= 1,\ \tilde{I}(\Lambda_b, a) = \tilde{I}(\Lambda_b, \Lambda_b) = \tilde{I}(\Lambda_b, x) = 0, \quad (x \in L := \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{R}\alpha_i), \\
\tilde{I}|_F &= I, \quad \widetilde{F} := F \oplus \mathbb{R}\Lambda_b, \qquad \text{また、} \\
\hat{I}(\Lambda_a, a) &= 1,\ \hat{I}(\Lambda_a, b) = \hat{I}(\Lambda_a, \Lambda_b) = \hat{I}(\Lambda_a, \Lambda_a) = \hat{I}(\Lambda_a, x) = 0, \\
\hat{I}|_{\widetilde{F}} &= \tilde{I}, \quad \widehat{F} := \widetilde{F} \oplus \mathbb{R}\Lambda_a,
\end{aligned}
$$

簡単のため $\Lambda_0 := \Lambda_b$, $\Lambda_1 := \Lambda_a$ とおく。 $\widetilde{F} = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{R}\alpha_i \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b \oplus \mathbb{R}\Lambda_0$ に対して α_i', a', b', $\Lambda_0' \in Hom_{\mathbb{R}}(\widetilde{F}, \mathbb{C})$ をそれぞれ α_i, a, b, Λ_0, の双対基底とする。そのとき、

$$
\widetilde{\mathbf{E}} = \{\sum_{i=1}^{l} x_i\alpha_i' + a' + \tau b' + t\Lambda_0' \mid x_i,\ t \in \mathbb{C},\ \tau \in \mathbf{H}\}.
$$

4 楕円型ルート系に付随したテータ関数

佐竹氏 [8] は、次のようにテータ関数を定義した。次の可換図形を考える。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{E}(a\otimes H) & \longrightarrow & \widetilde{H}_R & \xrightarrow{\psi_1} & H_a & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{E}(a\otimes H) & \longrightarrow & \widetilde{W}_R & \xrightarrow{\psi_2} & W_{af} & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & W_{R_f} & = & W_{R_f} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

ここで、ψ_1, ψ_2 は、射影 $\widetilde{F} \to \widetilde{F}/G$ から得られる写像であり、H は $\widetilde{E}^{-1}(\widetilde{W}_R) \cap G \otimes F/G = a \otimes H$, で定義される F/G に含まれる $\mathbb{Z}$-自由加群。

定義 (テータ関数) (佐竹 [8])
$P := \{\lambda \in \widetilde{F}/G \ \mid \ \widetilde{I}(H,\lambda) \subset \mathbb{Z},\ \widetilde{I}(b,\lambda) > 0,\ \widetilde{I}(\lambda,\lambda) = 0\}$, とおき、
$\widetilde{H}_a$ (resp. $\widetilde{W}_{af}$) を $\widetilde{H}_R \xrightarrow{\psi_1} H_a$ (resp. $\widetilde{W}_R \xrightarrow{\psi_2} W_{af}$), の lift とする。
$\lambda \in P,\ z \in \widetilde{\mathbf{E}}$, に対して テータ関数を次のように定義。

$$
\begin{aligned}
\Theta_\lambda : &= \sum_{g \in \widetilde{H}_a} exp\,[\,2\pi\sqrt{-1} < g(-\lambda), z >\,], \\
S_\lambda : &= \sum_{g \in \widetilde{W}_{af}} exp\,[\,2\pi\sqrt{-1} < g(-\lambda), z >\,], \\
A_\lambda : &= \sum_{g \in \widetilde{W}_{af}} (\mathrm{sgn}\ g) exp\,[\,2\pi\sqrt{-1} < g(-\lambda), z >\,].
\end{aligned}
$$

(注) アフィンルート系 $A_1^{(1)}$ の場合, $\lambda = -\frac{n}{2}\alpha_1 + m\Lambda_0 + rb$, $(\frac{n^2}{2} + 2mr = 0)$,
$z = -x\alpha_1' + \tau b' - u\Lambda_0'$, に対して Θ_λ は、Jacobi-Riemann テータ関数 ([2]) :

$$
\Theta_\lambda = \sum_{k \in \frac{n}{2m} + \mathbb{Z}} exp\ 2\pi\sqrt{-1}(mkx + mk^2\tau + mu).
$$

テータ関数を $\widehat{F}$ 上に拡張する。$\widehat{F} = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{R}\alpha_i \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b \oplus \mathbb{R}\Lambda_0 \oplus \mathbb{R}\Lambda_1$, 複素アフィン半空間 $\widehat{\mathbf{E}}$ を $\widehat{\mathbf{E}} := Hom(\widehat{F}, \mathbb{C})$ で定義する, このとき

$$
\widehat{\mathbf{E}} = \{\sum_{i=1}^{l} x_i\alpha_i' + \tau_1 b' + \tau_2 a' + t_1\Lambda_0{}' + t_2\Lambda_1{}' \mid x_i,\ \tau_1,\ \tau_2,\ t_1,\ t_2 \in \mathbb{C}\},
$$

ここで $\Lambda_1{}'$ は Λ_1 の双対基底。さらに、 $1 \otimes \widehat{H} := \widehat{E}^{-1}(\widehat{W}_R) \cap 1 \otimes F$, とおき、

$$
\widehat{P} := \{\lambda \in \widehat{F}/G \mid \hat{I}(\widehat{H},\lambda) \subset \mathbb{Z}, \hat{I}(b,\lambda) > 0,\ \hat{I}(\lambda,\lambda) = 0\ \}
$$

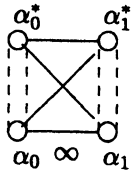
とする。

定義 (楕円型ルート系に付随したテータ関数)
$\lambda \in \widehat{P}$, $z \in \widehat{\mathbf{E}}$, に対して次のように形式的級数を定義：

$$\begin{aligned}
\widehat{\Theta}_\lambda : &= \sum_{w \in \widetilde{H}_R} exp\,[\,2\pi\sqrt{-1} < w(-\lambda), z >\,], \\
\widehat{S}_\lambda : &= \sum_{w \in \widetilde{W}_R} exp\,[\,2\pi\sqrt{-1} < w(-\lambda), z >\,], \\
\widehat{A}_\lambda : &= \sum_{w \in \widetilde{W}_R} (\mathrm{sgn}\ w) exp\,[\,2\pi\sqrt{-1} < w(-\lambda), z >\,].
\end{aligned}$$

5 楕円型ルート系 $A_1^{(1,1)}$ のテータ関数

$A_1^{(1,1)}$ の場合, elliptic diagram とその ルート系は次のように与えられる ([4]) 。



$$R = \{\pm(\epsilon_1 - \epsilon_2) + mb + na \quad (m, n \in \mathbb{Z})\}$$
$$\alpha_0 = \epsilon_2 - \epsilon_1 + b,\ \alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2,\ \alpha_0^* = \alpha_0 + a,\ \alpha_1^* = \alpha_1 + a.$$

鏡映 w_α は、$w_\alpha(\lambda) := \lambda - \hat{I}(\lambda, \alpha^\vee)\alpha \quad (\forall \lambda \in \widehat{F})$, で与えられる。ここで、$\alpha^\vee := 2\alpha/\hat{I}(\alpha, \alpha)$.
$w_1 := w_{\alpha_1}$, $w_0 := w_{\alpha_0}$, $w_1^* := w_{\alpha_1^*}$, $w_0^* := w_{\alpha_0^*}$, とおくとき、

$$\begin{cases} w_1\ (\alpha_1) = -\alpha_1, \\ w_1\ (\Lambda_0) = \Lambda_0, \\ w_1\ (\Lambda_1) = \Lambda_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} w_0\ (\alpha_1) = -\alpha_1 + 2b, \\ w_0\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 + \alpha_1 - b, \\ w_0\ (\Lambda_1) = \Lambda_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1^*\ (\alpha_1) = -\alpha_1 - 2b, \\ w_1^*\ (\Lambda_0) = \Lambda_0, \\ w_1^*\ (\Lambda_1) = \Lambda_1 - \alpha_1 - b, \end{cases} \qquad \begin{cases} w_0^*\ (\alpha_1) = -\alpha_1 + 2b + 2a, \\ w_0^*\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 + \alpha_1 - b - a, \\ w_0^*\ (\Lambda_1) = \Lambda_1 + \alpha_1 - b - a, \end{cases}$$

またその関係式は次のようになる ([6]).

$$w_0^2 = w_1^2 = w_0^{*2} = w_1^{*2} = 1,\ w_0 w_0^* w_1 w_1^* = w_1^* w_0 w_0^* w_1 = w_1 w_1^* w_0 w_0^* = w_0^* w_1 w_1^* w_0.$$

さらに、 $t_1 := w_0 w_1$, $t_k := t_1^k$, $s_1 := w_1 w_1^*$, $s_l := s_1^l$, $\gamma := w_0 w_0^* w_1 w_1^*$, とおくとき、

$$\begin{cases} t_k\ (\alpha_1) = \alpha_1 - 2kb, \\ t_k\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 + k\alpha_1 - k^2 b, \\ t_k\ (\Lambda_1) = \Lambda_1, \end{cases} \quad \begin{cases} s_l\ (\alpha_1) = \alpha_1 - 2la, \\ s_l\ (\Lambda_0) = \Lambda_0, \\ s_l\ (\Lambda_1) = \Lambda_1 + l\alpha_1 - l^2 a, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^p\ (\alpha_1) = \alpha_1, \\ \gamma^p\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 - pa, \\ \gamma^p\ (\Lambda_1) = \Lambda_1 + pb, \end{cases}$$

であり、次の関係式が成り立つ；

$$t_{k_1} \cdot t_{k_2} = t_{k_1 + k_2}, \quad s_{l_1} \cdot s_{l_2} = s_{l_1 + l_2}, \quad s_l \cdot t_k = \gamma^{2kl} t_k \cdot s_l,\ \gamma \text{ は中心元.}$$

これより、 $\widetilde{H}_R = \{\gamma^p s_l t_k \mid p, l, k \in \mathbb{Z}\}$, $\widetilde{W}_R = \{\gamma^p s_l t_k,\ \gamma^p s_l t_k w_1 \mid p, l, k \in \mathbb{Z}\}$ を得る。

(注)　t_1 は 次の t_{α_1} ([1]) と同一視される;

$$t_\alpha(\lambda) = \lambda + (\lambda, b)\alpha - \{\frac{|\alpha|^2}{2}(\lambda, b) + (\lambda, \alpha)\}b.$$

$A_1^{(1,1)}$ の場合, $\widehat{H} = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_0 \oplus \mathbb{Z}\alpha_1^* \oplus \mathbb{Z}\alpha_0^*$, $\widehat{P} = \{\frac{n}{2}\alpha_1 + m_1\Lambda_0 + m_2\Lambda_1 + rb \mid n, m_1, m_2 \in \mathbb{Z},\ m_1 > 0,\ \frac{n^2}{2} + 2m_1 r = 0\}$ である。

命題　$\lambda = -\frac{n}{2}\alpha_1 + m_1\Lambda_0 + m_2\Lambda_1 + rb$,　$(n, m_1, m_2 \in \mathbb{Z},\ m_1 > 0,\ \frac{n^2}{2} + 2m_1 r = 0)$, $z = -x\alpha_1' + \tau_1 b' + \tau_2 a' - u_1\Lambda_0' - u_2\Lambda_1'$,　$(x, \tau_1, \tau_2, u_1, u_2 \in \mathbb{C})$, とするとき、

$$\begin{aligned}
\widehat{\Theta}_\lambda &= exp\ 2\pi\sqrt{-1}(m_1u_1 + m_2u_2)\sum_{p\in\mathbb{Z}} exp\ 2\pi\sqrt{-1}p(m_1\tau_2 - m_2\tau_1) \\
&\quad \times \sum_{k\in\frac{n}{2m_1}+\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}} exp\ [2\pi\sqrt{-1}(m_1kx + m_1k^2\tau_1 + 2m_1kl\tau_2 + m_2lx + m_2l^2\tau_2)] \\
&= \widehat{\Theta}_{n,m_1,m_2}(x, x, \tau_1, \tau_2, u_1, u_2),
\end{aligned}$$

ここで、

$$\widehat{\Theta}_{n,m_1,m_2}(x_1, x_2, \tau_1, \tau_2, u_1, u_2) := exp\ 2\pi\sqrt{-1}(m_1u_1 + m_2u_2)\sum_{p\in\mathbb{Z}} exp\ 2\pi\sqrt{-1}p(m_1\tau_2 - m_2\tau_1)\times$$

$$\sum_{k\in\frac{n}{2m_1}+\mathbb{Z},\ l\in\mathbb{Z}} exp\ [2\pi\sqrt{-1}(m_1kx_1 + m_1k^2\tau_1 + 2m_1kl\tau_2 + m_2lx_2 + m_2l^2\tau_2)],$$

またさらに、

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_\lambda &= \widehat{\Theta}_{n,m_1,m_2}(x, x, \tau_1, \tau_2, u_1, u_2) + \widehat{\Theta}_{-n,m_1,m_2}(x, x, \tau_1, \tau_2, u_1, u_2), \\
\widehat{A}_\lambda &= \widehat{\Theta}_{n,m_1,m_2}(x, x, \tau_1, \tau_2, u_1, u_2) - \widehat{\Theta}_{-n,m_1,m_2}(x, x, \tau_1, \tau_2, u_1, u_2).
\end{aligned}$$

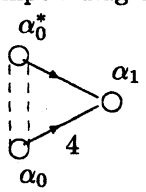
である。
ここで、パラメーターを特殊化する。
$\widehat{\theta}_{n,m_1,m_2}(x_1, x_2, \tau_1, \tau_2) := \widehat{\Theta}_{n,m_1,m_2}(x_1, x_2, \tau_1, \tau_2, 0, 0)$, とおくと

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_{0,1,1}(x_1, x_2, \frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2}) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} exp[2\pi\sqrt{-1}p(\tau_2 - \tau_1)] \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} exp[2\pi\sqrt{-1}(k^2\tau_1 + 2kx_1 + l^2\tau_2 + 2lx_2 + 2kl\tau_2)] \\
&= \delta(2\pi(\tau_2 - \tau_1)) \cdot \theta(\mathbf{z}, \Omega),
\end{aligned}$$

となる。ここで、$\delta(2\pi(\tau_2 - \tau_1))$ は, Dirac のデルタ関数であり、また $\theta(\mathbf{z}, \Omega) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2} exp(\pi\sqrt{-1}\mathbf{n}^t\Omega\mathbf{n} + 2\pi\sqrt{-1}\mathbf{n}^t\mathbf{z})$ は、2 変数テータ関数 ([3]) である。今の場合、$\mathbf{z} = (x_1, x_2)$, $\Omega = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_2 \end{pmatrix}$ となっている。

6　楕円型ルート系 $BC_1^{(2,1)}$ のテータ関数

elliptic diagram とその ルート系は次のように与えられる ([4]) 。



$$R = \{\pm\epsilon_1 + nb + ma,\ \pm 2\epsilon_1 + (2n+1)b + ma \quad (n, m \in \mathbb{Z})\},$$
$$\alpha_0 = -2\epsilon_1 + b,\ \alpha_1 = \epsilon_1,\ \alpha_0^* = \alpha_0 + a,$$

そして、次が成り立つ；

$$\begin{cases} w_1\ (\alpha_1) = -\alpha_1, \\ w_1\ (\Lambda_0) = \Lambda_0, \\ w_1\ (\Lambda_1) = \Lambda_1, \end{cases} \quad \begin{cases} w_0\ (\alpha_1) = -\alpha_1 + b, \\ w_0\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 + \alpha_1 - \frac{1}{2}b, \\ w_0\ (\Lambda_1) = \Lambda_1, \end{cases} \quad \begin{cases} w_0^*\ (\alpha_1) = -\alpha_1 + b + a, \\ w_0^*\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 + \alpha_1 - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a, \\ w_0^*\ (\Lambda_1) = \Lambda_1 + \alpha_1 - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a. \end{cases}$$

(注)　$\hat{I}(\Lambda_0, b) = 1$　より，$\hat{I}(\Lambda_0, \alpha_0^\vee) = \frac{1}{2}$ である。

w_0, w_1, w_0^* の関係式は次で与えられる　([6])；

$$w_0^2 = w_1^2 = w_0^{*2} = 1,\ (w_0 w_0^* w_1)^2 = (w_1 w_0 w_0^*)^2 = (w_0^* w_1 w_0)^2.$$

さらに、$t_1 := w_0 w_1$, $t_k := t_1^k$, $s_1 := w_0^* w_0$, $s_l := s_1^l$, $\gamma := (w_0 w_0^* w_1)^2$, とおくとき、

$$\begin{cases} t_k\ (\alpha_1) = \alpha_1 - kb, \\ t_k\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 + k\alpha_1 - \frac{k^2}{2}b, \\ t_k\ (\Lambda_1) = \Lambda_1, \end{cases} \quad \begin{cases} s_l\ (\alpha_1) = \alpha_1 - la, \\ s_l\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 + \frac{l}{2}a, \\ s_l\ (\Lambda_1) = \Lambda_1 + l\alpha_1 - \frac{l}{2}b - \frac{l^2}{2}a, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^p\ (\alpha_1) = \alpha_1, \\ \gamma^p\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 - pa, \\ \gamma^p\ (\Lambda_1) = \Lambda_1 + pb, \end{cases}$$

を得、これより，

$t_{k_1} \cdot t_{k_2} = t_{k_1+k_2}$,　$s_{l_1} \cdot s_{l_2} = s_{l_1+l_2}$,　$s_l \cdot t_k = \gamma^{kl} t_k \cdot s_l$,　γ は中心元.

そしてまた，$\widetilde{H}_R = \{\gamma^p s_l t_k \mid p, l, k \in \mathbb{Z}\}$,　$\widetilde{W_R} = \{\gamma^p s_l t_k,\ \gamma^p s_l t_k w_1 \mid p, l, k \in \mathbb{Z}\}$.

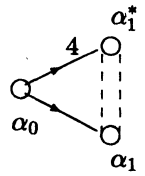
この場合、$\widehat{H} = \mathbb{Z}\frac{1}{2}\alpha_0 \oplus \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\frac{1}{2}\alpha_0^*$, $\widehat{P} = \{n\alpha_1 + 2m_1\Lambda_0 + 2m_2\Lambda_1 + rb \mid n, m_1, m_2 \in \mathbb{Z},\ m_1 > 0,\ n^2 + 4m_1 r = 0\}$, であり，次が成立。

命題　$\lambda = -n\alpha_1 + 2m_1\Lambda_0 + 2m_2\Lambda_1 + rb$,　$(n^2 + 4m_1 r = 0)$,
$z = -x\alpha_1' + \tau_1 b' + \tau_2 a' - u_1\Lambda_0' - u_2\Lambda_1'$　に対して、

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta}_\lambda \ = \ & exp\ 4\pi\sqrt{-1}(m_1 u_1 + m_2 u_2) \times \sum_{p\in\mathbb{Z}} exp\ 4\pi\sqrt{-1}p(m_1\tau_2 - m_2\tau_1) \times \\ & \sum_{k\in\frac{n}{2m_1}+\mathbb{Z}} exp\ 2\pi\sqrt{-1}[2(m_1 k + m_2 l)x + m_1 k^2\tau_1 + 2m_1 kl\tau_2 + (m_2\tau_1 - m_1\tau_2)l + m_2 l^2\tau_2]. \end{aligned}$$

7　楕円型ルート系 $BC_1^{(2,4)}$ のテータ関数

elliptic diagram とその ルート系は次のように与えられる ([4]) 。



$$R = \{\pm\epsilon_1 + nb + ma,\ \pm 2\epsilon_1 + (2n+1)b + 4ma \quad (n, m \in \mathbb{Z})\},$$
$$\alpha_0 = -2\epsilon_1 + b,\ \alpha_1 = \epsilon_1,\ \alpha_1^* = \alpha_1 + a,$$

そして、次を得る。

$$\begin{cases} w_1\ (\alpha_1) = -\alpha_1, \\ w_1\ (\Lambda_0) = \Lambda_0, \\ w_1\ (\Lambda_1) = \Lambda_1, \end{cases} \quad \begin{cases} w_0\ (\alpha_1) = -\alpha_1 + b, \\ w_0\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 + \alpha_1 - \frac{1}{2}b, \\ w_0\ (\Lambda_1) = \Lambda_1, \end{cases} \quad \begin{cases} w_1^*\ (\alpha_1) = -\alpha_1 - 2a, \\ w_1^*\ (\Lambda_0) = \Lambda_0, \\ w_1^*\ (\Lambda_1) = \Lambda_1 - 2\alpha_1 - 2a., \end{cases}$$

w_0, w_1, w_1^* の関係式は次で与えられる ([6])；

$$w_0^2 = w_1^2 = w_1^{*2} = 1,\ \ (w_0 w_1 w_1^*)^2 = (w_1^* w_0 w_1)^2 = (w_1 w_1^* w_0)^2.$$

さらに、 $t_1 := w_0 w_1$, $t_k := t_1^k$, $s_1 := w_1 w_1^*$, $s_l := s_1^l$, $\gamma := (w_0 w_1 w_1^*)^2$, とおくとき、

$$\begin{cases} t_k\ (\alpha_1) = \alpha_1 - kb, \\ t_k\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 + k\alpha_1 - \frac{k^2}{2}b, \\ t_k\ (\Lambda_1) = \Lambda_1, \end{cases} \quad \begin{cases} s_l\ (\alpha_1) = \alpha_1 - 2la, \\ s_l\ (\Lambda_0) = \Lambda_0, \\ s_l\ (\Lambda_1) = \Lambda_1 + 2l\alpha_1 - 2l^2 a, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^p\ (\alpha_1) = \alpha_1, \\ \gamma^p\ (\Lambda_0) = \Lambda_0 - pa, \\ \gamma^p\ (\Lambda_1) = \Lambda_1 + pb, \end{cases}$$

を得、次が成立。

$$t_{k_1} \cdot t_{k_2} = t_{k_1+k_2}, \quad s_{l_1} \cdot s_{l_2} = s_{l_1+l_2}, \quad s_l \cdot t_k = \gamma^{2kl} t_k \cdot s_l, \quad \gamma \text{ は中心元}$$

そして、さらに $\widetilde{H}_R = \{\gamma^p s_l t_k \mid p, l, k \in \mathbb{Z}\}$, $\widetilde{W}_R = \{\gamma^p s_l t_k,\ \gamma^p s_l t_k w_1 \mid p, l, k \in \mathbb{Z}\}$, であり、この場合、 $\widehat{H} = \mathbb{Z}\frac{1}{2}\alpha_0 \oplus \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_1^*$, $\widehat{P} = \{n\alpha_1 + 2m_1\Lambda_0 + m_2\Lambda_1 + rb \mid n, m_1, m_2 \in \mathbb{Z},\ m_1 > 0,\ n^2 + 4m_1 r = 0\}$ より、次を得る。

命題 $\lambda = -n\alpha_1 + 2m_1\Lambda_0 + m_2\Lambda_1 + rb$, $(n^2 + 4m_1 r = 0)$,
$z = -x\alpha_1' + \tau_1 b' + \tau_2 a' - u_1\Lambda_0' - u_2\Lambda_1'$ に対し,

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta}_\lambda &= exp\ 2\pi\sqrt{-1}(2m_1u_1 + m_2u_2) \times \sum_{p\in\mathbb{Z}} exp\ 2\pi\sqrt{-1}p(2m_1\tau_2 - m_2\tau_1) \\ &\quad \times \sum_{k\in\frac{n}{2m_1}+\mathbb{Z}} exp 2\pi\sqrt{-1}[2(m_1k + m_2l)x + m_1k^2\tau_1 + 4m_1kl\tau_2 + 2m_2l^2\tau_2] \\ &= \widehat{\Theta}_{2n,2m_1,2m_2}(x, x, \frac{\tau_1}{2}, \tau_2, u_1, u_2) \end{aligned}$$

8 Appendix

marking 付き楕円型ルート系 (R, G) に elliptic diagram $\Gamma_{R,G}$ を以下のように対応させる。

(1) Γ をアフィンルート系 $(R_{af}, F/G)$ に対する Dynkin diagram とする, i.e.

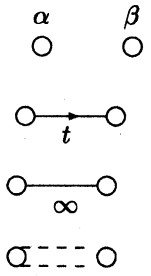
(a) 頂点集合 $|\Gamma| = \{\alpha_0, \cdots, \alpha_l\}$

(b) 各頂点は以下の (4) の規則で結ばれる。

(2) 各頂点 $\alpha_i \in |\Gamma|$ の exponent は $m_i := \frac{I_R(\alpha_i,\alpha_i)}{2k(\alpha_i)} n_i$ ここで、 $k(\alpha) := inf\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha + na \in R\}$, n_i は, $b := \sum_{i=0}^{l} n_i\alpha_i \in rad(I)$ $(n_0 = 1$ とできる$)$ の係数。

(3) $m_{max} := max\{m_0, \cdots, m_l\}$, $|\Gamma_m| := \{\alpha_i \in |\Gamma| \mid m_i = m_{max}\}$,
$|\Gamma_m^*| := \{\alpha_i + k(\alpha_i)a \mid \alpha_i \in |\Gamma|\}$ とおく。

(4) $\Gamma_{R,G}$ の頂点集合は $|\Gamma_{R,G}| = |\Gamma| \cup |\Gamma_m^*|$ であり, 各頂点 α, $\beta \in |\Gamma_{R,G}|$ は次の規則で結ばれる。



if $I(\alpha, \beta^\vee) = I(\beta, \alpha^\vee) = 0$

if $I(\alpha, \beta^\vee) = -t$, $I(\beta, \alpha^\vee) = -1$ $(t = 1, 2, 3)$

if $I(\alpha, \beta^\vee) = I(\beta, \alpha^\vee) = -2$

if $I(\alpha, \beta^\vee) = I(\beta, \alpha^\vee) = 2$

定義 (Coxeter 変換)
$c \in W_R$ が (R, G) の Coxeter 変換であるとは、 (R, G) の elliptic diagram $\Gamma_{R,G}$ を用いて、

$c = \prod_{\alpha \in \Gamma_{R,G}} w_\alpha$ と定義, ただし w_α と w_{α^*} は常に隣り合うようにする。このとき、c の W_R の中の conjugacy class は積の順の取り方によらない。

補題 ([4])
(1) c は有限位数となる。（正確には $c^{l_{max}+1} = 1$, $l_{max} := \{\Gamma_{R,G}$ から $\Gamma_m \cup \Gamma_m^*$ を除いた残りの最大連結成分の頂点数. })
(2) c の固有値の集合 $= \{exp(2\pi\sqrt{-1}\frac{m_i}{m_{max}}) \mid i = 0, \cdots, l\} \cup \{1\}$, 但しここで, $0 < m_1 \leq \cdots \leq m_l = m_{max}$ は exponent と呼ばれる整数。

補題 ([4]) $\widetilde{K}$ は $\tilde{c}^{l_{max}+1}$ により生成される無限巡回群。(ここで $\tilde{c}$ は、Coxeter 変換の定義において w_α を $\widetilde{w_\alpha}$ に置き換えたもの。)

同様にして次を得る。
補題 $\widehat{K}$ は $\hat{c}^{l_{max}+1}$ により生成される無限巡回群。

参考文献

[1] V. Kac *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 1985

[2] V. Kac, A. Raina *Bombay Lectures on Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebra*, World Scientific, 1987

[3] D. Mumford *Tata Lectures on Theta I*, Progress in Mathematics Vol. 28, Birkhäuser Boston (1983)

[4] K. Saito *Extended affine root system I*, Publ. RIMS, Kyoto Univ.,21 (1985), 75-179

[5] K. Saito *Extended affine root system II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ.,26 (1990), 15-78

[6] K. Saito and T. Takebayashi *Extended affine root system III*, Publ. RIMS, Kyoto Univ.,33 (1997), 301-329

[7] I. Satake *Automorphisms of the Extended Affine Root System and Modular Property for the Flat Theta Invariants*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. , 31 (1995), 1-32

[8] I. Satake *Flat Structure and the Prepotential for the Elliptic Root System of Type $D_4^{(1,1)}$*, Topological Field theory, Primitive Forms and Related Topics, Progress in Mathematics Vol. 160 (1998), 427-452

[9] T. Takebayashi *The theta function associated to the elliptic root system*, to appear in Journal of algebra