

$GL_2(F_q)$ のある部分群による Hecke 環の構造

岡山理科大学

森 義之

1 諸定義

1.1 はじめに

p を奇素数とし、 q を p の冪乗とする。 $F(=F_q)$ を q 元体とし、 F の乗法群を $F^\times$ とする。群 G とその部分群 A をそれぞれ次のように定める。

$$G = GL_2(F), \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}; a, d \in F^\times \right\}$$

また $w = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ として G の部分群 H を $H = A \cup wA$ で定める。

このとき、部分群 A による Hecke 環 $\mathcal{H}(G, A)$ の構造を求め、その構造を用いて Hecke 環 $\mathcal{H}(G, H)$ の構造を求めることを目的とする。

1.2 $GL_2(F_q)$ の部分群 A について

G, A の位数は $|G| = q(q+1)(q-1)^2$, $|A| = (q-1)^2$ である。 G の左 A -剰余類を $G/A = \{gA; g \in G\}$ とすれば、位数は $|G/A| = |G|/|A| = q(q+1)$ である。

定理 1. $U = \{\begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix}; u \in F\}$, $w = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ とすると G は $G = UA \cup UwUA$ と分解でき、左 A -剰余類は

$$G/A = UA/A \cup UwUA/A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix} A; t \in F \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & v \\ & 1 \end{pmatrix} A; u, v \in F \right\}$$

となり、 G の両側 A -剰余類の集合 $A \backslash G/A = \{AgA; g \in G\}$ については次が成り立つ。

$$A \backslash G/A = \left\{ A, AwA, A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} A, Aw \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} A, A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix} A \ (t \in F) \right\}.$$

位数は $|A \backslash G/A| = q+4$ である。

以上のように分解された左 A -剰余類と両側 A -剰余類の関係は、

$$\begin{aligned} A &= A, AwA = wA, A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} A = \bigcup_{u \in F^\times} \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} A, Aw \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} A = \bigcup_{v \in F^\times} w \begin{pmatrix} 1 & v \\ & 1 \end{pmatrix} A, \\ A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix} A &= \bigcup_{u, v \in F^\times, uv=t} \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & v \\ & 1 \end{pmatrix} A \ (t \in F^\times), \end{aligned}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} wA = \bigcup_{u \in F^\times} \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} wA$$

となる。

ここで、 $\text{ind}(AgA) = |AgA/A|$ と定義すると、それぞれの両側剰余類に対して次のような値になる。

$$\begin{aligned} \text{ind}A &= 1, \text{ind}AwA = 1, \text{ind}A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} A = q - 1, \\ \text{ind}Aw \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} A &= q - 1, \text{ind}A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix} A = q - 1 \quad (t \in F). \end{aligned}$$

1.3 Hecke 環 $\mathcal{H}(G, A)$ の構成

まず $\mathbb{C}$ を複素数体とし、 $\mathbb{C}G$ を G の $\mathbb{C}$ 上の群環とする。 A に対し、 $e = e_A = |A|^{-1} \sum_{g \in A} g$ とすると e は $\mathbb{C}G$ の巾等元であり、 $ge = e = eg' \quad (\forall g, g' \in A)$ をみたす。

ここで $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, A) = e\mathbb{C}[G]e$ とすれば $\mathcal{H}(G, A)$ は e を単位元とする $\mathbb{C}G$ の部分線形環となる。これを G の A に関する Hecke 環と呼ぶ。

$D \in A \backslash G/A$ に対し $\varepsilon(D) \in \mathbb{C}G$ を

$$\varepsilon(D) := |A|^{-1} \sum_{g \in D} g$$

で定める。このとき $\{\varepsilon(D) : D \in A \backslash G/A\}$ は $\mathcal{H}$ の基底をなす。

補題 $D \in A \backslash G/A$ ならば

$$\varepsilon(D) = \text{ind}(D)ege \quad (\forall g \in D)$$

である。

ここで $u(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}$, とし、両側剰余類を次のように定める。

$$D_e = A, D_w = AwA, D_{u(1)} = Au(1)A, D_{wu(1)} = Awu(1)A, D_{u(1)wu(t)} = Au(1)wu(t)A \quad (t \in F).$$

これにより Hecke 環の基底は次のように書き表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon(D_e) &= e, \varepsilon(D_w) = ewe, \varepsilon(D_{u(1)}) = (q-1)eu(1)e, \varepsilon(D_{wu(1)}) = (q-1)ewu(1)e, \\ \varepsilon(D_{u(1)w}) &= (q-1)eu(1)we, \varepsilon(D_{u(1)wu(t)}) = (q-1)eu(1)wu(t)e \quad (t \in F^\times). \end{aligned}$$

2 Hecke環 $\mathcal{H}(G, A)$ の構造

2.1 Hecke環 $\mathcal{H}(G, A)$ の乗積表

乗積表を求めるには、実際に Hecke環の基底を掛け合わせればよい。

$\varepsilon(D_e) = e$ は単位元であるから $\varepsilon(D_e)\varepsilon(D_e) = \varepsilon(D_e)$ および $\varepsilon(D_e)\varepsilon(D_\alpha) = \varepsilon(D_\alpha)\varepsilon(D_e) = \varepsilon(D_\alpha)$ であることは明らかである。

その他の場合、例えば $\varepsilon(D_{u(1)})\varepsilon(D_{u(1)wu(t)})$ ($t \neq 0$) は次のように計算される。

$$\varepsilon(D_{u(1)})\varepsilon(D_{u(1)wu(t)}) = (q-1)^2 eu(1)eu(1)wu(t)e.$$

$$\begin{aligned} u(1)e &= |A|^{-1} \sum u(1) \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix} \\ &= |A|^{-1} \sum \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix} u(a^{-1}d). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(1)eu(1)wu(t) &= |A|^{-1} \sum \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix} u(a^{-1}d)u(1)wu(t) \\ &= |A|^{-1} \sum \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix} u(1+a^{-1}d)wu(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} eu(1)eu(1)wu(t)e &= |A|^{-1} \sum e \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix} u(1+a^{-1}d)wu(t)e \\ &= |A|^{-1} \sum_{a,d} eu(1+a^{-1}d)wu(t)e \\ &= \frac{q-1}{|A|} \sum_{c \in F^\times} eu(1+c)wu(t)e \\ &= \frac{1}{q-1} \{ ewu(t)e + \sum_{c \neq -1} eu(1+c)wu(t)e \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \varepsilon(D_{u(1)})\varepsilon(D_{u(1)wu(t)}) &= (q-1)ewu(1)e + (q-1) \sum_{c \in F^\times - \{-1\}} eu(1+c)wu(t)e \\ &= \varepsilon(D_{wu(1)}) + \sum_{c \in F^\times - \{-1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu((1+c)t)}) \\ &= \varepsilon(D_{wu(1)}) + \sum_{s \in F^\times - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(st)}). \end{aligned}$$

同様の計算で基底すべての積を計算し、まとめると表1のようになる。

2.2 誘導指標の既約分解

ここでは A から G へ誘導したときの誘導指標を導き、その既約分解を求める。

まず、 $A \ni h = \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}$ に対して、 A の既約指標を $\lambda \otimes \mu(h) = \lambda \otimes \mu \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix} = \lambda(a)\mu(d)$ と書き表す。この $\lambda \otimes \mu$ から誘導される G の指標を $\widetilde{\lambda \otimes \mu}$ とすると次の定理がわかる。

定理 2. $g \in G$ に対して、

(1) g が A の元と共役でない場合

$$\widetilde{\lambda \otimes \mu}(g) = 0$$

(2) g が $\begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix}$ の場合

$$\widetilde{\lambda \otimes \mu}(g) = q(q+1)\lambda \otimes \mu(g)$$

(3) g が $\begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}$ と共役の場合 ($a \neq d$)

$$\widetilde{\lambda \otimes \mu}(g) = \lambda \otimes \mu(g) + \mu \otimes \lambda(g)$$

である。

(証明) g が A の元と共役でない場合は明らか。

g が A の元と共役の場合

$$\widetilde{\lambda \otimes \mu}(g) = \frac{1}{|A|} \sum_{h \in G} \lambda \otimes \mu(h^{-1}gh)$$

である。また、 $h^{-1}gh \notin A$ ならば $\lambda \otimes \mu(h^{-1}gh) = 0$ より $h \in G$ のうち $h^{-1}gh \in A$ となる h を考えればよい。

$h = M^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, g = M^{-1} \begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix} M$ として実際に $h^{-1}gh$ を計算する。

$$\begin{aligned} h^{-1}gh &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} adx - bcy & bdx - bdy \\ -acx + acy & -bdx + ady \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより $h^{-1}gh \in A$ となるためには、 $x = y$ ならば $\forall h$ 、 $x \neq y$ ならば、 $h = M^{-1} \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}$ or $h =$

$M^{-1} \begin{pmatrix} & b \\ c & \end{pmatrix}$ の時に限る。

(i) $x = y$ のとき、

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda \otimes \mu}(g) &= \frac{1}{|A|} \sum_{h \in G} \lambda \otimes \mu(h^{-1}gh) \\ &= \frac{|G|}{|A|} \lambda \otimes \mu(g) \\ &= q(q+1)\lambda \otimes \mu(g) \end{aligned}$$

(ii) $x \neq y$ のとき、

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda \otimes \mu}(g) &= \frac{1}{|A|} \sum_{h \in G} \lambda \otimes \mu(h^{-1}gh) \\
&= \frac{1}{|A|} \left\{ \sum_{h=M^{-1}\left(\begin{smallmatrix} a & \\ & d \end{smallmatrix}\right)} \lambda \otimes \mu(h^{-1}gh) + \sum_{h=M^{-1}\left(\begin{smallmatrix} & b \\ c & \end{smallmatrix}\right)} \lambda \otimes \mu(h^{-1}gh) \right\} \\
&= \frac{(q-1)^2}{|A|} \left\{ \lambda \otimes \mu \left(\begin{smallmatrix} x & \\ & y \end{smallmatrix} \right) + \lambda \otimes \mu \left(\begin{smallmatrix} y & \\ & x \end{smallmatrix} \right) \right\} \\
&= \lambda \otimes \mu(g) + \mu \otimes \lambda(g). //
\end{aligned}$$

この誘導指標の内積を計算する。

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \widetilde{\lambda \otimes \mu}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \widetilde{\lambda \otimes \mu}(g) \overline{\widetilde{\lambda \otimes \mu}(g)} \\
&= \frac{1}{|G|} \left\{ \sum_{a \in F^\times} q^2(q+1)^2 \lambda(a) \mu(a) \bar{\lambda}(a) \bar{\mu}(a) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a, b \in F^\times, a \neq b} \frac{q(q+1)}{2} (\lambda(a) \mu(b) + \lambda(b) \mu(a)) (\bar{\lambda}(a) \bar{\mu}(b) + \bar{\lambda}(b) \bar{\mu}(a)) \right\} \\
&= \frac{q(q+1)}{|G|} \left\{ \sum_{a \in F^\times} q(q+1) |\lambda(a)|^2 |\mu(a)|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a, b \in F^\times, a \neq b} \frac{1}{2} (|\lambda(a)|^2 |\mu(b)|^2 + |\lambda(b)|^2 |\mu(a)|^2 \right. \\
&\quad \left. + \lambda(a) \bar{\lambda}(b) \mu(b) \bar{\mu}(a) + \lambda(b) \mu(a) \bar{\lambda}(a) \bar{\mu}(b)) \right\} \\
&= \frac{q(q+1)}{|G|} \left\{ \sum_{a \in F^\times} q(q+1) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a \in F^\times} \sum_{b \in F^\times, b \neq a} \frac{1}{2} (2 + \lambda(a) \bar{\lambda}(b) \mu(b) \bar{\mu}(a) + \lambda(b) \mu(a) \bar{\lambda}(a) \bar{\mu}(b)) \right\} \\
&= \frac{q(q+1)}{|G|} \left\{ q(q+1)(q-1) + (q-1)(q-2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{a \in F^\times} \lambda(a) \bar{\mu}(a) \sum_{b \in F^\times, b \neq a} \bar{\lambda}(b) \mu(b) + \frac{1}{2} \sum_{a \in F^\times} \mu(a) \bar{\lambda}(a) \sum_{b \in F^\times, b \neq a} \lambda(b) \bar{\mu}(b) \right\} \\
&= \frac{q(q+1)}{|G|} \left\{ (q-1)(q^2 + 2q - 2) + \sum_{a \in F^\times} \lambda(a) \bar{\mu}(a) \left(\sum_{b \in F^\times} \bar{\lambda}(b) \mu(b) - \bar{\lambda}(a) \mu(a) \right) \right\} \\
&= \frac{q(q+1)}{|G|} \left\{ (q-1)(q^2 + 2q - 2) - (q-1) + \sum_{a \in F^\times} \lambda(a) \bar{\mu}(a) \sum_{b \in F^\times} \bar{\lambda}(b) \mu(b) \right\} \\
&= \begin{cases} q+4 & (\lambda = \mu) \\ q+3 & (\lambda \neq \mu) \end{cases}
\end{aligned}$$

定理3. ρ を $F^\times$ の生成元とする。 $\varepsilon = \exp(\frac{2\pi}{q-1})$ と置き、次のように写像を定める。

$$\lambda(\rho^i) = \chi(\rho^i)^k = \varepsilon^{ki}, \mu(\rho^i) = \chi(\rho^i)^l = \varepsilon^{li}, \varphi(\rho^i) = \varepsilon^{mi}, \psi(\rho^i) = \varepsilon^{ni}$$

このとき誘導指標の既約分解は次のようになる。

$k = l$ の場合

$$\widetilde{\lambda \otimes \lambda} = \widetilde{\chi^k \otimes \chi^k} = \chi_{L_k(1)} + 2\chi_{R_k(q)} + \chi_{R_{k+\frac{q-1}{2}}(q)} + \chi_{X_{m,2k-m}(q+1)} + \chi_{Y_n(q-1)}$$

ただし、 $0 \leq m < k', 2k' < m < k' + \frac{q-1}{2}$, $n = 2k' + \alpha(q-1)$ ($0 \leq \alpha \leq q, \alpha \neq k', k' + \frac{q+1}{2}$) なおかつ $n = n'q \pmod{q^2-1}$ となる n, n' の一方。 ($k' = k \pmod{\frac{q-1}{2}}$)

この条件を満たす m, n の個数はそれぞれ $|\{m\}| = \frac{q-3}{2}, |\{n\}| = \frac{q-1}{2}$ である。

$k \neq l, k+l = 2\beta$ の場合

$$\widetilde{\lambda \otimes \mu} = \widetilde{\chi^k \otimes \chi^l} = \chi_{R_\alpha(q)} + \chi_{R_{\alpha+\frac{q-1}{2}}(q)} + 2\chi_{X_{k,l}(q+1)} + \chi_{X_{m,2\alpha-m}(q+1)} + \chi_{Y_n(q-1)}$$

ただし、 $0 \leq m < \beta, 2\beta < m < \beta + \frac{q-1}{2}, m \neq \min\{k, l\}$, $n = 2\beta + \alpha(q-1)$ ($0 \leq \alpha \leq q, \alpha \neq \beta, \beta + \frac{q+1}{2}$)
なおかつ $n = n'q \pmod{q^2-1}$ となる n, n' の一方。

この条件を満たす m, n の個数はそれぞれ $|\{m\}| = \frac{q-5}{2}, |\{n\}| = \frac{q-1}{2}$ である。

$k \neq l, k+l = 2\beta+1$ の場合

$$\widetilde{\lambda \otimes \mu} = \widetilde{\chi^k \otimes \chi^l} = 2\chi_{X_{k,l}(q+1)} + \chi_{X_{m,2\alpha-m+1}(q+1)} + \chi_{Y_n(q-1)}$$

ただし、 $0 \leq m \leq \beta, 2(\beta+1) \leq m \leq \beta + \frac{q-1}{2}, m \neq \min\{k, l\}$, $n = 2\beta + \alpha(q-1)$ ($0 \leq \alpha \leq q$) で $n = n'q \pmod{q^2-1}$ となる n, n' の一方。

この条件を満たす m, n の個数はそれぞれ $|\{m\}| = \frac{q-3}{2}, |\{n\}| = \frac{q+1}{2}$ である。

(証明) 誘導指標と既約指標の内積を計算する。

$$\begin{aligned} (\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{L_m(1)}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \widetilde{\lambda \otimes \mu}(g) \overline{\chi_{L_m(1)}(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \left\{ \sum_{a \in F^\times} q(q+1) \lambda(a) \mu(a) \overline{\varphi(a)} \overline{\varphi(a)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{a, b \in F^\times, a \neq b} \frac{q(q+1)}{2} (\lambda(a) \mu(b) + \lambda(b) \mu(a)) \overline{\varphi(a)} \overline{\varphi(b)} \right\} \\ &= \frac{1}{|G|} \left\{ \sum_{i=0}^{q-2} q(q+1) \lambda(\rho^i) \mu(\rho^i) \overline{\varphi(\rho^i)} \overline{\varphi(\rho^i)} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{q-2} \sum_{j=0, j \neq i}^{q-2} \frac{q(q+1)}{2} \left(\lambda(\rho^i) \mu(\rho^j) \overline{\varphi}(\rho^i) \overline{\varphi}(\rho^j) + \lambda(\rho^j) \mu(\rho^i) \overline{\varphi}(\rho^i) \overline{\varphi}(\rho^j) \right) \Bigg\} \\
& = \frac{q(q+1)}{|G|} \left\{ \sum_{i=0}^{q-2} \varepsilon^{(k+l-2m)i} + \sum_{i=0}^{q-2} \sum_{j=0, j \neq i}^{q-2} \frac{1}{2} (\varepsilon^{(k-m)i+(l-m)j} + \varepsilon^{(l-m)i+(k-m)j}) \right\}
\end{aligned}$$

$k = l = m$ のとき、

$$(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{L_m(1)}) = \frac{q(q+1)}{|G|} \{(q-1) + (q-1)(q-2)\} = 1$$

$k \neq m$ or $l \neq m$ のとき、

$$(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{L_m(1)}) = \frac{q(q+1)}{|G|} \left\{ \sum_{i=0}^{q-2} \varepsilon^{(k+l-2m)i} + \sum_{i=0}^{q-2} -\varepsilon^{(k-m)i+(l-m)i} \right\} = 0$$

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{R_m(q)}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \widetilde{\lambda \otimes \mu}(g) \overline{\chi_{R_m(q)}}(g) \\
&= \frac{1}{|G|} \left\{ \sum_{a \in F^\times} q(q+1) \lambda(a) \mu(a) q \overline{\varphi}(a) \overline{\varphi}(a) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a, b \in F^\times, a \neq b} \frac{q(q+1)}{2} (\lambda(a) \mu(b) + \lambda(b) \mu(a)) \overline{\varphi}(a) \overline{\varphi}(b) \right\} \\
&= \frac{q(q+1)}{|G|} \left\{ \sum_{i=0}^{q-2} q \varepsilon^{(k+l-2m)i} + \sum_{i=0}^{q-2} \sum_{j=0, j \neq i}^{q-2} \frac{1}{2} (\varepsilon^{(k-m)i+(l-m)j} + \varepsilon^{(l-m)i+(k-m)j}) \right\}
\end{aligned}$$

$k = l = m$ のとき、

$$(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{R_m(q)}) = \frac{q(q+1)}{|G|} \{q(q-1) + (q-1)(q-2)\} = 2$$

$k \neq m$ or $l \neq m$ かつ $k+l \not\equiv 2m \pmod{q-1}$ のとき、

$$(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{R_m(q)}) = \frac{q(q+1)}{|G|} \left\{ \sum_{i=0}^{q-2} q \varepsilon^{(k+l-2m)i} + \sum_{i=0}^{q-2} -\varepsilon^{(k-m)i+(l-m)i} \right\} = 0$$

$k \neq m, l \neq m$ かつ $k+l \equiv 2m \pmod{q-1}$ のとき、

$$(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{R_m(q)}) = \frac{q(q+1)}{|G|} \sum_{i=0}^{q-2} (q-1) \varepsilon^{(k+l-2m)i} = 1$$

$$(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{X_{m,n}(q+1)}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \widetilde{\lambda \otimes \mu}(g) \overline{\chi_{X_{m,n}(q+1)}}(g)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|G|} \left\{ \sum_{a \in F^\times} q(q+1)\lambda(a)\mu(a)(q+1)\overline{\varphi}(a)\overline{\psi}(a) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a,b \in F^\times, a \neq b} \frac{q(q+1)}{2} \left(\lambda(a)\mu(b) + \lambda(b)\mu(a) \right) \left(\overline{\varphi}(a)\overline{\psi}(b) + \overline{\psi}(a)\overline{\varphi}(b) \right) \right\} \\
&= \frac{q(q+1)}{|G|} \left\{ \sum_{i=0}^{q-2} (q+1)\varepsilon^{(k+l-m-n)i} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{q-2} \sum_{j=0, j \neq i}^{q-2} \frac{1}{2} (\varepsilon^{(k-m)i+(l-n)j} + \varepsilon^{(k-n)i+(l-m)j} + \varepsilon^{(l-m)i+(k-n)j} + \varepsilon^{(l-n)i+(k-m)j}) \right\}
\end{aligned}$$

$k = m, l = n (k < l)$ or $k = n, l = m (l < k)$ のとき、

$$(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{X_{m,n}(q+1)}) = \frac{q(q+1)}{|G|} \{(q+1)(q-1) + (q-1)(q-3)\} = 2$$

上記以外で $k+l = m+n \pmod{q-1}$ のとき、

$$(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{X_{m,n}(q+1)}) = \frac{q(q+1)}{|G|} \{(q+1)(q-1) - 2(q-1)\} = 1$$

$k+l \neq m+n \pmod{q-1}$ のとき、

$$(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{X_{m,n}(q+1)}) = 0$$

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{Y_m(q-1)}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \widetilde{\lambda \otimes \mu}(g) \overline{\chi_{Y_m(q-1)}}(g) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{a \in F^\times} q(q+1)\lambda(a)\mu(a)(q-1)\overline{\varphi}(a) \\
&= \frac{1}{q-1} \sum_{i=0}^{q-2} \varepsilon^{(k+l-m)i}
\end{aligned}$$

$k+l-m = 0 \pmod{q-1}$ のとき、

$$(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{Y_m(q-1)}) = 1$$

$k+l-m \neq 0 \pmod{q-1}$ のとき、

$$(\widetilde{\lambda \otimes \mu}, \chi_{Y_m(q-1)}) = 0$$

ただし、 m は $0 \leq m \leq q^2 - 2, q+1 \nmid m$, さらに $m = m'q \pmod{q^2 - 1}$ となる m, m' の一方。 //

3 $\mathcal{H}(G, A)$ と $\mathcal{H}(G, H)$ の関係

$GL_2(F_q)$ の部分群 $H = A \cup wA$ から構成される Hecke 環 $\mathcal{H}(G, H)$ の乗積表を $\mathcal{H}(G, A)$ の乗積表から求める。

まず両側 H -剰余類の集合 $H \backslash G / H$ は次のように書くことができる。

$$H \backslash G / H = \left\{ H, H \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} H, H \begin{pmatrix} 1 & k \\ & 1 \end{pmatrix} H \ (k \in F_+^\times - \{1\}), H \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} H \right\}$$

ただし $F_+^\times = \{\rho^l; 0 \leq l \leq (q-3)/2\}$. そこで、

$$D_e^H = H, D_1^H = H \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} H, D_k^H = H \begin{pmatrix} 1 & k \\ & 1 \end{pmatrix} H \ (k \in F_+^\times - \{1\}), D_{-1}^H = H \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} H,$$

と置いてやると $H = A \cup wA$ より次の関係がわかる。

$$D_e^H = D_e \cup D_w, D_1^H = D_{u(1)} \cup D_{u(1)w} \cup D_{wu(1)} \cup D_{u(1)wu(1)},$$

$$D_k^H = D_{u(1)wu(\frac{1}{1-k})} \cup D_{u(1)wu(\frac{k}{k-1})}, D_{-1}^H = D_{u(1)wu(\frac{1}{2})}.$$

そこで $D^H \in H \backslash G / H$ に対し $\varepsilon(D^H) \in \mathbb{C}G$ を

$$\varepsilon(D^H) = |H|^{-1} \sum_{g \in D^H} g$$

で定めと $\mathcal{H}(G, H)$ の基底をなすことがわかる。これにより $\mathcal{H}(G, H)$ の基底と $\mathcal{H}(G, A)$ の基底には次のような関係があることが容易にわかる。

$$\varepsilon(D_e^H) = \frac{1}{2} \{ \varepsilon(D_e) + \varepsilon(D_w) \}, \varepsilon(D_1^H) = \frac{1}{2} \{ \varepsilon(D_{u(1)}) + \varepsilon(D_{u(1)w}) + \varepsilon(D_{wu(1)}) + \varepsilon(D_{u(1)wu(1)}) \},$$

$$\varepsilon(D_k^H) = \frac{1}{2} \{ \varepsilon(D_{u(1)wu(\frac{1}{1-k})}) + \varepsilon(D_{u(1)wu(\frac{k}{k-1})}) \}, \varepsilon(D_{-1}^H) = \frac{1}{2} \varepsilon(D_{u(1)wu(\frac{1}{2})}).$$

この関係を用いれば、 $\mathcal{H}(G, H)$ の乗積表は比較的簡単に求める事ができる。(表2)

$\mathcal{H}(G, A)$ の乗積表

表1

	$\varepsilon(D_e)$	$\varepsilon(D_w)$	$\varepsilon(D_{u(1)})$	$\varepsilon(D_{wu(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)w})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(t)})$
$\varepsilon(D_e)$	$\varepsilon(D_e)$	$\varepsilon(D_w)$	$\varepsilon(D_{u(1)})$	$\varepsilon(D_{wu(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)w})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(t)})$
$\varepsilon(D_w)$	$\varepsilon(D_w)$	$\varepsilon(D_e)$	$\varepsilon(D_{wu(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)w})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(t)})$
$\varepsilon(D_{u(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)w})$	$(q-1)\varepsilon(D_e) + (q-2)\varepsilon(D_{u(1)})$	$\sum_{x \in F^x} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$(q-1)\varepsilon(D_w) + (q-2)\varepsilon(D_{u(1)w})$	$\varepsilon(D_{wu(1)}) + \sum_{x \in F^x - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$\varepsilon(D_{wu(1)}) + \sum_{x \in F^x - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$
$\varepsilon(D_{wu(1)})$	$\varepsilon(D_{wu(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(1)})$	$(q-1)\varepsilon(D_w) + (q-2)\varepsilon(D_{wu(1)})$	$\sum_{x \in F^x - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$(q-1)\varepsilon(D_e) + (q-2)\varepsilon(D_{u(1)wu(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)}) + \sum_{x \in F^x - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$\varepsilon(D_{u(1)}) + \sum_{x \in F^x - \{1, t\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x(1-t))})$
$\varepsilon(D_{u(1)w})$	$\varepsilon(D_{u(1)w})$	$\varepsilon(D_{u(1)})$	$\sum_{x \in F^x} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$(q-1)\varepsilon(D_e) + (q-2)\varepsilon(D_{u(1)})$	$\varepsilon(D_{wu(1)}) + \sum_{x \in F^x - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$(q-1)\varepsilon(D_w) + (q-2)\varepsilon(D_{u(1)w})$	$\varepsilon(D_{wu(1)}) + \sum_{x \in F^x - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x(1-t))})$
$\varepsilon(D_{u(1)wu(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(1)})$	$\varepsilon(D_{wu(1)w})$	$\varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{x \in F^x - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$(q-1)\varepsilon(D_e) + (q-2)\varepsilon(D_{wu(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)}) + \sum_{x \in F^x - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$(q-1)\varepsilon(D_e) + (q-2)\varepsilon(D_{u(1)wu(1)})$	$\varepsilon(D_{u(1)}) + \sum_{x \in F^x - \{1, t\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$
$\varepsilon(D_{u(1)wu(s)})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(s)})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(1-s)})$	$\varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{x \in F^x - \{s\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$\varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{x \in F^x - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x(1-s))})$	$\varepsilon(D_{u(1)}) + \sum_{x \in F^x - \{1, s\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$\varepsilon(D_{u(1)}) + \sum_{x \in F^x - \{1, s\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$[M]$
$[M]$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(\frac{1}{2})})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(s)})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(\frac{1}{2}})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(s)})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(1-s)})$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(t)})$	$(t \neq \frac{1}{2}, s, 1-s)$
$\varepsilon(D_{u(1)wu(\frac{1}{2})})$	$(q-1)\varepsilon(D_e) + \sum_{c \in F^x - \{1, \frac{1}{2}\}} \varepsilon(D_{u(1)wu((c-1)(c-\frac{1}{2})^{-1}(c(t-1)+\frac{1}{2})))$	$\varepsilon(D_{u(1)wu(1-s)})$	$\varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{x \in F^x - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$\varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{x \in F^x - \{1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$\varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{x \in F^x - \{1, s\}} \varepsilon(D_{u(1)wu(x)})$	$\varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{x \in F^x - \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1-t)-1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu((c-1)(c-\frac{1}{2})^{-1}(c(t-1)+\frac{1}{2})))$	$\varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{x \in F^x - \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1-t)-1\}} \varepsilon(D_{u(1)wu((c-1)(c-\frac{1}{2})^{-1}(c(t-1)+\frac{1}{2})))$
$\varepsilon(D_{u(1)wu(s)})$	$\varepsilon(D_{u(1)}) + \varepsilon(D_{wu(1)w}) + \sum_{c \in F^x - \{1, s, 2s\}} \varepsilon(D_{u(1)wu((c-s)^{-1}(s-\frac{1}{2}c)))$	$\varepsilon(D_{u(1)w}) + \varepsilon(D_{u(1)wu(1-s)})$	$(q-1)\varepsilon(D_e) + \varepsilon(D_{wu(1)}) + \varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{c \in F^x - \{1, s, s(1-s)^{-1}\}} \varepsilon(D_{u(1)wu((c-1)(c-s)^{-1}(c(s-1)+s)))$	$\varepsilon(D_{u(1)}) + \varepsilon(D_{wu(1)}) + \varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{c \in F^x - \{1, s\}} \varepsilon(D_{u(1)wu((c-1)(c-s)^{-1}(c(s-1)+s)))$	$\varepsilon(D_{u(1)}) + \varepsilon(D_{wu(1)}) + \varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{c \in F^x - \{1, s\}} \varepsilon(D_{u(1)wu((c-1)(c-s)^{-1}(c(s-1)+s)))$	$\varepsilon(D_{u(1)}) + \varepsilon(D_{wu(1)}) + \varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{c \in F^x - \{1, s, s(1-s)^{-1}\}} \varepsilon(D_{u(1)wu((c-1)(c-s)^{-1}(c(s-1)+s)))$	$\varepsilon(D_{u(1)}) + \varepsilon(D_{wu(1)}) + \varepsilon(D_{u(1)w}) + \sum_{c \in F^x - \{1, s, s(1-s)^{-1}\}} \varepsilon(D_{u(1)wu((c-1)(c-s)^{-1}(c(s-1)+s)))$

$\mathcal{H}(G, H)$ の乗積表

$\varepsilon(D_e^H)$	$\varepsilon(D_1^H)$	$\varepsilon(D_{-1}^H)$	$\varepsilon(D_k^H)$ ($k = \rho^{2j}$)	$\varepsilon(D_k^H)$ ($k = \rho^{2j+1}$)
$\varepsilon(D_e^H)$	$\varepsilon(D_1^H)$	$\varepsilon(D_{-1}^H)$	$\varepsilon(D_k^H)$	$\varepsilon(D_k^H)$
$\varepsilon(D_1^H)$	$2(q-1)\varepsilon(D_e^H) + (q-1)\varepsilon(D_1^H) + 4\varepsilon(D_{-1}^H) + 4 \sum_{\alpha \in F_+^{\times} - \{1\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$	$\varepsilon(D_1^H) + 2 \sum_{\alpha \in F_+^{\times} - \{1\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$	$2\varepsilon(D_1^H) + 2\varepsilon(D_{-1}^H/k) + 4\varepsilon(D_{-1}^H) + 4 \sum_{\alpha \in F_+^{\times} - \{1, k\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$	$\leftarrow$
$\varepsilon(D_{-1}^H)$	*	$\frac{q-1}{2}\varepsilon(D_e^H) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in F_+^{\times} - \{1\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$	$\varepsilon(D_1^H) + 2\varepsilon(D_{-1}^H) + \sum_{\alpha \in F_+^{\times} - \{1, k, \sqrt{k}\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$	$\varepsilon(D_1^H) + \sum_{\alpha \in F_+^{\times} - \{1, k\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$
$\varepsilon(D_1^H)$	*	*	[N]	[N]

[N-1] $\varepsilon(D_k^H)\varepsilon(D_k^H)$

- (i) $k^2 + 6k + 1 = \rho^{2j+1}$ のとき. $\varepsilon(D_k^H)\varepsilon(D_k^H) = (q-1)\varepsilon(D_e^H) + \varepsilon(D_1^H) + \sum_{\alpha \in F^{\times} - \{1, k, 1/k\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$
- (ii) $k^2 + 6k + 1 = \rho^{2j}$ のとき. $\varepsilon(D_k^H)\varepsilon(D_k^H) = (q-1)\varepsilon(D_e^H) + \varepsilon(D_1^H) + 4\varepsilon(D_{-1}^H) + \sum_{\alpha \in F^{\times} - \{1, k, 1/k, k, k'\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$
- (iii) $k^2 + 6k + 1 = 0$ のとき. $\varepsilon(D_k^H)\varepsilon(D_k^H) = (q-1)\varepsilon(D_e^H) + \varepsilon(D_1^H) + 2\varepsilon(D_{-1}^H) + \sum_{\alpha \in F^{\times} - \{1, k, 1/k, k''\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$

[N-2] $\varepsilon(D_l^H)\varepsilon(D_k^H)$ ($k \neq l$)

- (i) $(k+1)^2(l+1)^2 - 16kl = \rho^{2i+1}$ のとき. $\varepsilon(D_l^H)\varepsilon(D_k^H) = 2\varepsilon(D_e^H) + \sum_{\alpha \in F^{\times} - \{1, k, l, kl\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$
- (ii) $(k+1)^2(l+1)^2 - 16kl = \rho^{2i}$ のとき. $\varepsilon(D_l^H)\varepsilon(D_k^H) = 2\varepsilon(D_e^H) + 2\varepsilon(D_{-1}^H) + \sum_{\alpha \in F^{\times} - \{1, k, l, kl, l', l''\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$
- (iii) $(k+1)^2(l+1)^2 - 16kl = 0$ のとき. $\varepsilon(D_l^H)\varepsilon(D_k^H) = 2\varepsilon(D_e^H) + \varepsilon(D_{-1}^H) + \sum_{\alpha \in F^{\times} - \{1, k, l, kl, l'''\}} \varepsilon(D_\alpha^H)$

ただし, $k' = \frac{(k+1)^2 + (k-1)\rho^j}{4k}$, $k'' = \frac{(k+1)^2 - (k-1)\rho^j}{4k}$, $k''' = \frac{(k+1)^2}{4k}$, $l' = \frac{(k+1)(l+1) + \rho^j}{4}$, $l'' = \frac{(k+1)(l+1) - \rho^j}{4k}$, $l''' = \frac{(k+1)(l+1)}{4k}$,

$$\gamma = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2}, \delta = \frac{(\alpha+1)(\alpha-k)}{(\alpha-1)(\alpha+k)}, \mu = \frac{k(\alpha-1)^2}{(k\alpha-1)(\alpha-k)}, \nu = \frac{(l-\alpha)(k-\alpha)}{(\alpha-kl)(\alpha-1)}.$$