表現論シンポジウム講演集, 2000
pp.122-124

The integral representations of harmonic polynomials in the case of real rank 1

呉大学 社会情報　　和田 涼子

$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ を classical な real rank 1 の実半単純 Lie 環とする (つまり $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{so}(p,1)$, $\mathfrak{su}(p,1)$, $\mathfrak{sp}(p,1)$, $p \in \mathbf{N}$. ただし $p \geq 2$ とする). $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ の Cartan 分解 $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{k}_{\mathbf{R}} \oplus \mathfrak{p}_{\mathbf{R}}$ の複素化を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とし、K, $K_{\mathbf{R}}$ を各々 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_{\mathbf{R}}$ の adjoint 群とする. $\mathfrak{p}$ 上の K 不変な多項式のなす環は 1 つの元で生成される. その生成元を P とする. ここで

$$\mathfrak{p} = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ {}^t x & 0 \end{pmatrix} \in M(p+1, \mathbf{C}) \ ; \ x \in \mathbf{C}^p \right\}, \qquad P(X) = {}^t x x \ \ (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{so}(p,1)),$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ {}^t y & 0 \end{pmatrix} \in M(p+1, \mathbf{C}) \ ; \ x, y \in \mathbf{C}^p \right\}, \quad P(X) = {}^t x y \ \ (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{su}(p,1)),$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & w \\ {}^t y & 0 & {}^t w & 0 \\ 0 & z & 0 & -y \\ {}^t z & 0 & -{}^t x & 0 \end{pmatrix} \in M(2p+2, \mathbf{C}) \ ; \ x, y, z, w \in \mathbf{C}^p \right\},$$
$$P(X) = {}^t x y + {}^t z w \ \ (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{sp}(p,1)).$$

S_n を $\mathfrak{p}$ 上の n 次同次多項式の空間とし、$\mathfrak{p}$ 上の n 次同次調和多項式の空間を $\mathcal{H}_n = \{f \in S_n \ ; \ (\partial P)f = 0\}$ で表す. $\mathfrak{N} = \{X \in \mathfrak{p} \ ; \ P(X) = 0\}$, $\Sigma_{\mathbf{R}} = \{X \in \mathfrak{p}_{\mathbf{R}} : P(X) = 1\}$ とおく. 特に $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{so}(p,1)$ の時は $\mathcal{H}_n$ は $\mathbf{C}^p$ 上の n 次同次調和多項式の空間、$\mathfrak{p}$ における $K_{\mathbf{R}}$-orbit は $SO(p)$-orbit と同一視でき、調和多項式の $SO(p)$-orbit 上の積分表示はよく知られている.

本講演の目的は、任意の $K_{\mathbf{R}}$-orbit 上での $\mathcal{H}_n$ の元の積分表示を求めることである ($\mathfrak{so}(p,1)$ の場合は [1], [4], [5], [8] 等で既に示されている).

$\mathcal{H}_n = \bigoplus_{k=0}^{N(n)} \mathcal{H}_{n,k}$ を $K_{\mathbf{R}}$-既約分解とする. ここで

$$N(n) = \begin{cases} 0 & (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{so}(p,1)), \\ n & (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{su}(p,1)), \\ \left[\frac{n}{2}\right] & (\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{sp}(p,1)). \end{cases}$$

$Z_0 \in \Sigma_{\mathbf{R}}$ を固定し $K_0 \subset K_{\mathbf{R}}$ を Z_0 の isotropy 群とする. このとき

$$\begin{cases} H_{n,k}(gX) = H_{n,k}(X) & {}^\forall g \in K_0, \ {}^\forall X \in \mathfrak{p} \\ H_{n,k}(Z_0) = 1 \end{cases}$$

をみたす $H_{n,k} \in \mathcal{H}_{n,k}$ がただ 1 つ存在する. ${}^\forall X, {}^\forall Y \in \mathfrak{p}$ に対して

$$\tilde{H}_{n,k}(X, Y) = \dim \mathcal{H}_{n,k} \int_{K_{\mathbf{R}}} H_{n,k}(gX) \overline{H_{n,k}(gY)} dg$$

と定義すると ${}^\forall Y \in \mathfrak{p}$ に対して $\tilde{H}_{n,k}(\ ,Y) \in \mathcal{H}_{n,k}$ であり、次の定理が成り立つ.

<u>定理</u>　${}^\forall f \in \mathcal{H}_{n,k}, {}^\forall X, {}^\forall X_0 \in \mathfrak{p}$ に対して

$$(*)\qquad \dim \mathcal{H}_{n,k} \int_{K_{\mathbf{R}}} f(gX_0)\tilde{H}_{m,l}(X, gX_0)dg$$
$$= \delta_{n,m}\delta_{k,l}\tilde{H}_{n,k}(X_0, X_0)f(X).$$

$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{so}(p,1)$ のときは $(*)$ は $\mathbf{C}^p$ 上の古典的な調和多項式の積分公式として知られており、$\tilde{H}_{n,k}$ は Legendre の多項式になる．しかし $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{su}(p,1), \mathfrak{sp}(p,1)$ の場合は再生核の具体的な形は知られていない．以下では、$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{su}(p,1), \mathfrak{sp}(p,1)$ の場合の再生核 $\tilde{H}_{n,k}$ を具体的に構成する．

1) $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{su}(p,1)$ のとき $E_0 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ {}^te_2 & 0 \end{pmatrix}$ とする．$X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ {}^ty & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ {}^t\beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$ に対して、

$$\tilde{K}_{n,k}(X,Y) = ({}^tx\overline{\alpha})^k({}^ty\overline{\beta})^{n-k}$$

と定義すると $Y \in \mathfrak{N}$ のとき $\tilde{K}_{n,k}(\ ,Y)$ は $\mathcal{H}_n$ の元になる．$\mathcal{H}_{n,k}$ を $\{\tilde{K}_{n,k}(\ ,Y)\ ;\ Y \in \mathfrak{N}\}$ で張られる $\mathcal{H}_n$ の部分空間とすると、$\mathcal{H}_n = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{H}_{n,k}$ は $K_{\mathbf{R}}$-既約分解になることが知られている．さらに、$X, Y \in \mathfrak{p}$ に対して

$$\tilde{H}_{n,k}(X,Y) = \begin{pmatrix} n+p-2 \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k+p-2 \\ k \end{pmatrix}^{-1} \dim \mathcal{H}_{n,k} \int_{K_{\mathbf{R}}} \tilde{K}_{n,k}(X, gE_0)\overline{\tilde{K}_{n,k}(Y, gE_0)}dg$$

と定義すると $\tilde{H}_{n,k}(\ ,Y)$ は $\mathcal{H}_{n,k}$ の元で $(*)$ をみたす.

2) $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{sp}(p,1)$ のとき

$$\tilde{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -{}^te_1 & 0 \end{pmatrix},\quad E_0 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & {}^te_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -{}^te_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$$

とする.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & w \\ {}^ty & 0 & {}^tw & 0 \\ 0 & z & 0 & -y \\ {}^tz & 0 & -{}^tx & 0 \end{pmatrix},\quad Y = \begin{pmatrix} 0 & x' & 0 & w' \\ {}^ty' & 0 & {}^tw' & 0 \\ 0 & z' & 0 & -y' \\ {}^tz' & 0 & -{}^tx' & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$$

に対して

$$\tilde{K}_m(X,Y) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2m} \tfrac{(2p+m-1)!}{m!(2p-1)!} \textstyle\int_{K_{\mathbf{R}}} (\mathrm{Tr}\,{}^t(g\tilde{E}_1)\overline{Y})^m(\mathrm{Tr}\,{}^tX\overline{g\tilde{E}_1})^m dg,$$
$$K_2(X,Y) = ({}^tx\overline{x'} + {}^tz\overline{z'})({}^ty\overline{y'} + {}^tw\overline{w'}) + ({}^tx\overline{w'} - {}^tz\overline{y'})({}^ty\overline{z'} - {}^tw\overline{x'}),$$
$$\tilde{K}_{n,k}(X,Y) = \tilde{K}_{n-2}(X,Y)K_2(X,Y)^k$$

とおくと $Y \in \mathfrak{N}$ のとき $\tilde{K}_{n,k}(\ ,Y) \in \mathcal{H}_n$ となる．$\mathcal{H}_{n,k}$ を $\{\tilde{K}_{n,k}(\ ,Y)\ ;\ Y \in \mathfrak{N}\}$ で張られる $\mathcal{H}_n$ の部分空間とすると、$\mathcal{H}_n = \bigoplus_{k=0}^{[n/2]} \mathcal{H}_{n,k}$ は $K_{\mathbf{R}}$-既約分解になる．さらに X, $Y \in \mathfrak{p}$ に対して

$$\tilde{H}_{n,k}(X,Y) = \binom{n+2p-2}{k}\binom{k+2p-3}{k}^{-1} \dim \mathcal{H}_{n,k} \int_{K_{\mathbf{R}}} \tilde{K}_{n,k}(X, gE_0)\overline{\tilde{K}_{n,k}(Y, gE_0)}dg$$

と定義すると $\tilde{H}_{n,k}(\ ,Y) \in \mathcal{H}_{n,k}$ で、(*) をみたす．

References

[1] K. Ii, *On a Bargmann-type transform and a Hilbert space of holomorphic functions*, Tôhoku Math. J., **38** (1986), 57–69.

[2] K. Koike and I. Terada, *Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n*, J. Algebra, **107** (1987), 466–511.

[3] B. Kostant and S. Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Amer. J. Math., **93** (1971), 753–809.

[4] C. Müller, *Spherical Harmonics*, Lecture Notes in Math., **17** (1966), Springer-Verlag.

[5] R. Wada, *Holomorphic functions on the complex sphere*, Tokyo J. Math., **11** (1988), 205–218.

[6] R. Wada, *The integral representations of harmonic polynomials in the case of* $\mathfrak{su}(p,1)$, Tokyo J. Math., **21** (1998), 233–245.

[7] R. Wada, *The integral representations of harmonic polynomials in the case of* $\mathfrak{sp}(p,1)$, Tokyo J. Math., **22** (1999), 353–373.

[8] R. Wada and M. Morimoto, *A uniqueness set for the differential operator* $\Delta_z + \lambda^2$, Tokyo J. Math., **10** (1987), 93–105.