

楕円型 CALOGERO-MOSER 模型の固有値、固有関数について

竹村 剛一 (横浜市大理)

ABSTRACT. 楕円型 Calogero-Moser 模型の固有値、固有関数を Bethe 仮設法を用いて調べると、Bethe 方程式が解ける場合には固有値、固有関数が三角極限で得られる三角的 Calogero-Sutherland 模型のものと正則につながっていることがわかる。

また、東大の小森氏との共同研究により、Kato-Rellich の摂動の理論などを適用できることから一般の場合で上記の摂動可能性が解った。

これにより A_{N-1} 型 Jacobi 多項式の楕円変形の 1 つの候補が実在する正則な関数として定義できる。

1. はじめに

楕円型 Calogero-Moser 模型とは、1 次元多体系の量子力学の模型であり、ハミルトニアンが

$$(1.1) \quad \mathcal{H}_E := \frac{1}{4\pi^2} \left(- \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2l(l+1) \sum_{1 \leq i < j \leq N} \wp(x_i - x_j) \right).$$

により与えられる模型である ([6])。ここで、 l は結合定数であり、 $\wp(x_i - x_j)$ は基本周期は $(1, \tau)$ であるような Weierstrass の $\wp$ 関数である。

この模型の大きな特色として、「可積分」な模型であることを挙げることができる。ここでの「可積分」の意味は、粒子数と同等の数だけ可換な微分作用素 (具体的な式は [3] などに書かれている) があるということで、解析力学における Liouville の意味での「古典可積分性」の量子論への対応物と思えるものである。q-変形された模型 (Ruijsenaars 模型 ([7])) や別のルート系に付随する模型での可積分性など、可積分性に関係した研究はいろいろな人によりなされている。

また、楕円型 Calogero-Moser 模型からパラメータに関して極限をとることで別の「可積分」な模型が得られることが知られている。例えば、楕円関数の 1 つの周期 τ について $\tau \rightarrow \sqrt{-1}\infty$ とすることによりハミルトニアンは三角的 Calogero-Sutherland 模型のものに移行することが知られている。 $p = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ と変数変換することにより $\tau \rightarrow \sqrt{-1}\infty$ は $p \rightarrow 0$ と対応する。

三角的 Calogero-Sutherland 模型については、ゲージ変換をすることにより、固有状態が Jack 多項式 (または Jacobi 多項式) と呼ばれる対称多項式によって記述され、固有値も Jack 多項式 (または Jacobi 多項

式)のパラメータを用いて書けることが知られている。なお、Jack 多項式を q -変形したものが Macdonald 多項式である。Macdonald 多項式や Jack 多項式については、内積値、Pieri formula、Cauchy formula、1 を代入したときの値、ある種の展開をしたときの係数の正值性など、いろいろと調べられている。

ところが、楕円型 Calogero-Moser 模型の固有状態についての研究はあまりなかった。Bethe 仮設法が一般の粒子数でも開発されてはいたが、そこで現れる方程式にはテータ関数が入っており、その解を具体的に書き下すのは絶望的なこともあり、あまり有名とはなっておらず、応用される機会もあまりなかった。

この報告の目的は、楕円型 Calogero-Moser 模型の固有状態を調べることにある。主なアイデアは、 p が 0 に近いときの固有状態は $p = 0$ で比較的良好にわかっている固有状態 (Jacobi 多項式によるもの) に近いものではないか、という考え方を正当化することである。 $p = 0$ の近くでの固有状態を、 $p = 0$ の固有状態を用いて p についての形式的巾級数として書いておき、 p の巾級数として固有状態となるべしという条件により、形式的巾級数の係数を得ることができる。しかし、この摂動論の方法で得られる巾級数の収束性は非自明である。実際に、 $H := -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \alpha x^4$ というハミルトニアンで $\alpha = 0$ のまわりでの展開の固有値、固有関数の収束半径は 0 となってしまう。

実は、楕円型 Calogero-Moser 模型においては、 $p = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ についての 0 のまわりでの摂動展開による固有値、固有関数の収束半径は 0 より大きくなることがわかるのである。別の言い方をすると、 $p = 0$ での三角的 Calogero-Sutherland 模型の固有値、固有関数に対して、 $|p|$ が十分小さいときには楕円型 Calogero-Moser 模型の固有値、固有関数が存在し、それを $p = 0$ と特殊化すると三角的な模型と p について正則につながっている、ということである。

当初は、Bethe 仮設法の手法により、特別ないくつかの場合 (例えば A_1 型で $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ のときと A_2 型で $l = 1$ のとき) に上述のことが成立することがわかっていたのであるが、その後、東大の小森氏との共同研究により、Kato-Rellich の理論に沿う議論を使うことにより一般の場合でも成立することがわかった。さらに、 p が 0 に近い場合には、上述の方法で得られる固有関数により、 L^2 空間におけるすべての固有関数が尽くされることもわかった。

この報告の構成であるが、2 章において、三角的 Calogero-Sutherland 模型の固有関数が A_{N-1} 型 Jacobi 多項式で書けることについて説明をしておく。楕円型 Calogero-Moser 模型を調べるときに後で実際に利用する。3 章において、量子力学における摂動論の計算のアルゴリズム (これについては少なくとも低次の項については量子力学のまともな教科書に載っている) について説明し、これが (少しの修正をすることで) 三角的 Calogero-Sutherland 模型を基にした楕円型 Calogero-Moser 模

型での固有値、固有関数の形式的巾級数としての計算に原理的にはあてはめることができることを述べる。4 章において、Bethe 仮設法を利用して楕円型 Calogero-Moser 模型の固有関数がどのように記述できるか、そして、三角的 Calogero-Sutherland 模型の固有関数とのつながりについて述べる。簡単のため主に A_1 の場合を扱うが一般の N に対する Bethe 仮設法については文献 [1, 2] が、物理的状态に対する議論については文献 [9] が参照となるであろう。5 章において、Kato-Rellich の理論に沿う形で 3 章において述べた形式的巾級数の収束性について説明する。詳しくは文献 [4] にて述べられていることである。

2. 三角的 CALOGERO-SUTHERLAND 模型と A_{N-1} 型 JACOBI 多項式

三角的 Calogero-Sutherland 模型とは、以下のハミルトニアンにより定義されている模型である。

$$(2.1) \quad \mathcal{H}_T := \frac{1}{4\pi^2} \left(- \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2l(l+1) \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{\sin^2(\pi(x_i - x_j))} \right).$$

以下において l は 2 以上の実数としておく。

$X_i := \exp(2\pi\sqrt{-1}x_i)$ とし、 $\mathcal{M}_N := \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) | \lambda_1 + \dots + \lambda_N = 0, i < j \Rightarrow \lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ という集合と定義しておく。(実はこれは A_{N-1} 型の dominant integral weight の集合と同一視できる。)

このハミルトニアンの固有関数を記述するために”基底状態” $\Delta(X)$ によりゲージ変換をする。以下のようにゲージ変換されたハミルトニアンを H_0 とおく。

$$H_0 := \Delta(X)(\mathcal{H}_T - e_0)\Delta(X)^{-1}$$

ここで、 e_0 は $H_0\Delta(X) = e_0\Delta(X)$ によって定まる定数であり、

$$(2.2) \quad \Delta(X) := ((X_1 X_2 \dots X_N)^{\frac{1-N}{2}} \prod_{i < j} (X_i - X_j))^{l+1}$$

である。

ゲージ変換と変数変換に伴い、 H_0 に付随する内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を次により自然に定めることができる。

(2.3)

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{N!} \left(\prod_{i=1}^N \oint_{|X_i|=1} \frac{dX_i}{2\pi\sqrt{-1}X_i} \right) \overline{\Delta(X)f(X_1, \dots, X_N)} \Delta(X)g(X_1, \dots, X_N),$$

ここで $\overline{X_i} = X_i^{-1}$ となっていることに注意しておく。

ゲージ変換された Calogero-Sutherland 模型のハミルトニアン固有関数は Jacobi 多項式 $J_\lambda(X)$ により与えられる ([8, 5])。つまり、

$$(2.4) \quad H_0 J_\lambda(X) = E_\lambda J_\lambda(X),$$

ここで、 $E_\lambda = (\lambda + (l+1)\rho|\lambda + (l+1)\rho) - (l+1)^2(\rho|\rho)$, $\rho = ((N-1)/2, (N-3)/2, \dots, (1-N)/2)$ である。

集合 $\mathcal{M}_N$ での半順序を $\lambda \succeq \mu \Leftrightarrow |\lambda| = |\mu|, \sum_{j=1}^i \lambda_j \geq \sum_{j=1}^i \mu_j$ ($i = 1, \dots, N$) として定める。

m_λ を $\lambda \in \mathcal{M}_N$ に付随した対称単項多項式、つまり $m_\lambda := \sum_{\mu \in S_N \cdot \lambda} X_1^{\mu_1} \dots X_N^{\mu_N}$ としておく。

ここで、Jacobi 多項式 J_λ のいくつかの性質について述べておく。

J_λ の m_λ についての展開は、

$$(2.5) \quad J_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} \tilde{c}_{\lambda, \mu} m_\mu,$$

という式で書ける。そして、ここでの定数 $\tilde{c}_{\lambda, \mu}$ はすべて正となることが知られている。

J_λ はさきほど定めた内積 (2.3) により直交している。つまり、ある正の実数 c_λ が存在し、

$$(2.6) \quad \langle J_\lambda(X), J_\mu(X) \rangle = \delta_{\lambda, \mu} c_\lambda,$$

となっている。ここでの正の実数 c_λ を具体的に記述する式が知られており、その式は Norm formula と呼ばれている。

そして、Jacobi 多項式は内積 (2.3) により定まる L^2 -空間の完全直交基底である。とくに、Jacobi 多項式で張られるベクトル空間は L^2 -空間の中で dense となっている。

3. 摂動論によるアルゴリズム

一般論として、あるベクトル空間 V と V 上の作用素 H_0 が与えられており、 V の一次独立なベクトルたち v_i は H_0 の固有ベクトルで固有値が E_i であるとする。また、簡単のため $i \neq j$ ならば $E_i \neq E_j$ であるとし、 V 上のノルム $(\cdot, \cdot)$ に関して $(v_i, v_j) = \delta_{i, j}$ が成立しているとする。このとき、 $H(p) := H_0 + pV_1 + p^2V_2 + \dots$ と表される V の作用素の固有値 $E_i(p)$, 固有ベクトル $v_i(p)$ を p に関する形式的巾級数として求めてみる。固有ベクトルとしては p に関する形式的巾級数として $(v_i(p), v_i(p)) = 1$ となるものを求める。 $\sum_{j'} d_{j, j'}^{(k)} v_{j'} := V_k v_j$, として係数 $d_{j, j'}^{(k)}$ をあらかじめ求めておく。

$$v_j(p) := v_j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j'} c_{j, j'}^{(k)} v_{j'} p^k, \quad E_j(p) := E_j + \sum_{k=1}^{\infty} E_j^{(k)} p^k$$

としたときに、 $c_{j,j'}^{\{k\}}, E_j^{\{k\}}$ を求めるのが当面の目標である。後の式のため、 $c_{j,j'}^{\{0\}} = \delta_{j,j'}$ とおいておく。そこで、

$$(3.1) \quad H(p)v_j(p) = E_j(p)v_j(p), \quad (v_j(p), v_j(p)) = 1.$$

とおいたとき、両辺を p の巾級数と思ったときの等号成立条件を調べる。 $v_j p^k$ の係数を比べることにより、次の式が出て来る。

$$(3.2) \quad c_{j,j'}^{\{k\}} = \frac{\sum_{k'=1}^k (\sum_{j''} c_{j,j''}^{\{k-k'\}} d_{j'',j'}^{\{k'\}}) - \sum_{k'=1}^{k-1} c_{j,j'}^{\{k-k'\}} E_j^{\{k'\}}}{E_j - E_{j'}}, \quad (j' \neq j)$$

$$(3.3) \quad c_{j,j}^{\{k\}} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{k'=1}^{k-1} \sum_{j'} c_{j,j'}^{\{k'\}} c_{j,j'}^{\{k-k'\}} \right),$$

$$(3.4) \quad E_j^{\{k\}} = \sum_{k'=1}^{k-1} \sum_{j'} c_{j,j'}^{\{k-k'\}} d_{j',j}^{\{k'\}} - \sum_{k'=1}^{k-1} c_{j,j}^{\{k-k'\}} E_j^{\{k'\}}.$$

これらの式より、 $c_{j,j'}^{\{k\}}$ や $E_j^{\{k\}}$ は k について recursive に決まっていくことがわかる。ゆえに、原理的には $c_{j,j'}^{\{k\}}$ や $E_j^{\{k\}}$ を求めるアルゴリズムがあるのである。

しかし、この計算での固有値 $E_i(p)$, 固有ベクトル $v_i(p)$ の収束性は明らかではない。

例として、 $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + 4x^2$ とおく。これの L^2 での固有関数は $e^{-x^2} H_n(x)$ と書け、固有値も全て相異なっていることがわかる。ここで、 $H_n(x)$ は n 次のエルミート関数である。そこで、 $H(p) = H_0 + px^4$ の固有値・固有関数を上で述べたアルゴリズムにより計算することは可能であるが、実は固有値の収束半径は 0 となることが知られているのである。

さて、上で述べたアルゴリズムと楕円型 Calogero-Moser 模型の関係を述べておく。 $p = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ としておき、 $T(p) := \Delta(X)^{-1} \mathcal{H}_E \Delta(X)$ ($\Delta(X)$ は三角的 Calogero-Sutherland 模型の基底状態 (2.2)) とすると、この作用素は $T(p) = H_0 + V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k p^k$ と展開することができる。ここで、 H_0 はゲージ変換した後の Calogero-Sutherland 模型のハミルトニアンであり、 V_0 は定数で摂動の計算に本質的な寄与をおこさないものである。 H_0 の固有関数 v_i として、Jacobi 多項式をとっておく。 $N = 2$ のときはこのままで摂動論のアルゴリズムとなるが、 $N \geq 3$ の場合は固有値の縮退のためにこのままではまずいのである。だが、 $T(p)$ と可換な高次の微分作用素との同時摂動を考えることにより、計算を正当化することができる。

さて、この方法で求めた楕円型 Calogero-Moser 模型の p についての形式的巾級数である固有値、固有関数については収束半径が 0 ではなく、十分小さな収束円内では本当に収束していることが示される。つ

まり、Jacobi 多項式に対し、(ゲージ変換した) 楕円型 Calogero-Moser 模型の固有関数であり $p \rightarrow 0$ とすると p について正則に Jacobi 多項式をつながっているものがあるのである。

以下の章の内容はこのことの正当化と関係している。

4. BETHE ANSATZ による方法

Bethe Ansatz と呼ばれる手法により楕円型 Calogero-Moser 模型の固有状態を調べる。ある形をした関数が楕円型 Calogero-Moser 模型のハミルトニアン¹の固有関数になるための条件は、有限個の変数がテータ関数を含むような方程式の解となっているということで記述されることが知られている。ここで現れる方程式が Bethe Ansatz 方程式と呼ばれるものである。これを一般の τ で具体的に解くのは不可能だと思えるが、三角極限 ($\tau \rightarrow \sqrt{-1}\infty$) をとったときの方程式については代数方程式となっているので解くのが可能な場合がある。三角極限をとったときの Bethe Ansatz 方程式の解を陰関数定理により τ の虚部が十分大きい場合の解に伸ばすことにより、 τ の虚部が十分大きいときにも三角極限をとったときの固有関数である Jacobi 多項式に正則につながる固有関数があるということがいえるのである。

まず、 A_1 型のときに上で述べたことを具体的に説明する。そして、後で一般の A_{N-1} の場合にどこに困難があるのかを説明する。

4.1. A_1 型での Bethe Ansatz による固有状態. A_1 型の場合は楕円型 Calogero-Moser 模型のハミルトニアンには x_1, x_2 という2つの変数が含まれているが、 $s := x_1 - x_2$ とおくことにより1変数化できる。このとき、ハミルトニアンは

$$(4.1) \quad \mathcal{H} = -\frac{d^2}{ds^2} + l(l+1)\wp(s).$$

と書き換えられる。とりあえずこれの固有関数を

$$(4.2) \quad \omega(s; t; m_1) := e^{\pi\sqrt{-1}m_1 s} \frac{\theta(s-t_1)\dots\theta(s-t_l)}{\theta(s)^l},$$

という形で見つける方針をとる。ここで m_1 というパラメータを差し込んである。どのような $(t_1, \dots, t_l)$ に対して $\omega(s; t; m_1)$ が $\mathcal{H}$ の固有関数となるかを調べる。結果は次の命題であるのだが、同等な命題は本質的には100年ほど前に得られている ([11])。

Proposition 4.1.

$$\Phi_\tau = e^{\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^l m_1 t_j} \prod_{1 \leq j \leq l} \theta(t_j)^{-2l} \prod_{1 \leq i < j \leq l} \theta(t_i - t_j)^2.$$

としたとき、 $\frac{\partial \Phi_\tau}{\partial t_i} \big|_{(t_1^0, \dots, t_l^0)} = 0$ ($1 \leq i \leq l$) を満たす $(t_1^0, \dots, t_l^0)$ に対して $\omega(s; t^0; m_1)$ は $\mathcal{H}$ の固有関数となっている。対応する固有値も $(t_1^0, \dots, t_l^0)$ と m_1 を用いて書くことができる。

$\omega_\tau(s; t^0; m_1)$ が $\mathcal{H}$ の固有関数となっていることがわかったが、これを物理的な固有状態とみなすのば不十分だと思われる。何故かという、0 と 1 で極をもつため、 $[0, 1]$ 区間において積分することにより得られるノルムが有限値となっていないのである。どのような m_1 について 0 と 1 で極が消える固有状態が構成できるかを述べる。

Proposition 4.2. m_1 が整数のとき、 $\omega_\tau(s; t^0; m_1) + (-1)^{l+1} \omega_\tau(-s; t^0; m_1)$ は実軸上にて極をもたない。

これからしばらくは三角極限をとった場合を考える。 m_1 を整数としておく。上で述べた Bethe Ansatz の手法は三角極限をとった場合にも成り立っているのであるが、 $m_1 \geq l+1$ をみたす m_1 について Bethe Ansatz 方程式がまともな (悪く退化していない) 解をもてば、ある 0 でない実数 C が存在して $\omega_{\sqrt{-1}\infty}(s; t^0; m_1) + (-1)^{l+1} \omega_{\sqrt{-1}\infty}(-s; t^0; m_1) = C J_{m_1-l-1}(e^{2\pi\sqrt{-1}s}) \sin(s)^{l+1}$ となることがわかる。ここで $J_{m_1-l-1}(X)$ は A_1 型 Jacobi 多項式 (実は一変数 Gegenbauer 多項式と同じもの) であり、 $\sin(s)^{l+1}$ は基底状態に対応する関数となっている。

また、もし三角極限での Bethe Ansatz 方程式の解から決まる Jacobi 行列の行列式が 0 でなければ陰関数定理により、同じ m_1 に対して $p(= \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau))$ が十分小さいような τ についても Bethe Ansatz 方程式が解 $t^{0,(\tau)} = (t_1^{0,(\tau)}, \dots, t_l^{0,(\tau)})$ が存在し、 $\omega_\tau(s; t^{0,(\tau)}; m_1) + (-1)^{l+1} \omega_\tau(-s; t^{0,(\tau)}; m_1)$ がノルムが有限値となる $\mathcal{H}$ の固有状態となっており、 $p = 0$ にて Jacobi 多項式と正則につながっていることがわかるのである。

次節にて、Bethe Ansatz 方程式がまともな (悪く退化していない) 解をもつかどうかを調べる。

4.2. A_1 型のときの Bethe Ansatz 方程式の解. 三角極限をとった場合の Bethe Ansatz 方程式の解を調べる。とりあえず、 $m_1 \geq l+1$ をみたす整数 m_1 をパラメータにもつ方程式の解についての情報を取り出したい。 $T_i = \exp(-2\pi\sqrt{-1}t_i)$ とすることにより、三角極限をとった場合の Bethe Ansatz 方程式は $\frac{\partial \Phi_{tri}}{\partial T_i} |_{(T_1^0, \dots, T_l^0)} = 0$ ($1 \leq i \leq l$) と書ける。ここで、

$$\Phi_{tri} = \prod_{j=1}^l T_j^{(-m_1+1)} (1 - T_j)^{-2l} \prod_{1 \leq i < j \leq l} (T_i - T_j)^2.$$

としている。

$$\sigma_i := \sum_{j_1 < \dots < j_i} T_{j_1}^0 \dots T_{j_i}^0, \quad \bar{\sigma}_i := \sum_{j_1 < \dots < j_i} (1 - T_{j_1}^0) \dots (1 - T_{j_i}^0).$$

としたとき、Varchenko により、別の動機 (Gaudin 模型での Bethe Ansatz 方程式の解を調べることにより Shapovalov form のある表示式を求めること) から Bethe Ansatz 方程式の解が調べられている。

Proposition 4.3. ([10])

$$\sigma_i = \binom{l}{i} \prod_{j=1}^i \frac{-m_1 + 1 + l - j}{-m_1 - j}, \quad \bar{\sigma}_i = \binom{l}{i} \prod_{j=1}^i \frac{l + j}{m_1 + j}.$$

さらに、分母と分子が0でないような m_1 について、*Bethe Ansatz* 方程式の解は入れ換えを除いてただ一つ存在する。

ここで

$$\delta := \prod_{1 \leq i < j \leq l} (T_i^0 - T_j^0)^2, \quad \text{Hess} := \det \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial T_i \partial T_j} (-\log \Phi) \right)_{i,j} \right) \Big|_{T=T^0}$$

としたとき、次が成立する。

Proposition 4.4. ([10])

$$\delta = \prod_{j=0}^{l-1} \frac{(j+1)^{j+1} (-m_1 + 1 + j)^j (-2l + j)^j}{(-m_1 - j - 1)^{2l-j-2}},$$

$$\text{Hess} = l! \prod_{j=0}^{l-1} \frac{(-m_1 - j - 1)^3}{(-m_1 + 1 + j)(-2l + j)}.$$

ここで、Hess を求めるためには Selberg 積分の具体式の漸近挙動を利用していることに注意しておく。

ゆえに、 $m_1 \notin \{0, \pm 1, \dots, \pm l\}$ ならば $\sigma_i, \bar{\sigma}_i (i = 1, \dots, l), \delta, \text{Hess}$ は有限値で0ではない。これで、考えたい *Bethe Ansatz* 方程式はまともな(悪く退化していない)解をもっていることがわかったのである。

4.3. A_{N-1} 型のための *Bethe Ansatz* 方程式. この節では、どのような方程式系の解が知りたいかを述べる。

粒子数 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ と結合定数 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定しておく。

$m := lN(N-1)/2$ とし、 $c: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ という関数を、単調非減少関数であり各 j ごとに決まる集合 $c^{-1}(j)$ の元の個数が $(N-j)l$ となっているものとして定める。

$$(4.3) \quad \Phi_{tri}(T_1, \dots, T_m) := \prod_{j=1}^m T_j^{-(\sum_{i=1}^{N-1} (m_i - 1) \Lambda_i, \alpha_{c(j)})} \prod_{c(j)=1} (1 - T_j)^{-lN}$$

$$\prod_{\substack{c(i)=c(j) \\ i < j}} (T_i - T_j)^2 \prod_{\substack{|c(i)-c(j)|=1 \\ i < j}} (T_i - T_j)^{-1},$$

という関数を導入しておく。ここで、 α_i は A_{N-1} 型ルート系の i 番目の単純ルートであり、 Λ_i は i 番目の基本ウェイトである。このとき、欲しい条件とは、大雑把には、すべてのルート α に対して $(\sum_{i=1}^{N-1} m_i \Lambda_i, \alpha) \notin \{0, \pm 1, \dots, \pm l\}$ となる整数たち $(m_1, \dots, m_{N-1})$ について $\Phi_{tri}(T_1, \dots, T_m)$

が非退化であるまともな臨界点をもつことである。つまり、 $\frac{\partial \Phi}{\partial T_i}|_{(T_1^0, \dots, T_m^0)} = 0$ をみだし、 $(T_1^0, \dots, T_m^0)$ での Hessian (2 階微分の行列の行列式) が 0 とはならず、 $(T_1^0, \dots, T_m^0)$ が $\Phi_{tri}(T_1, \dots, T_m)$ の零点や極にはならない点が存在する、ということである。

ここで述べた条件 $(+\alpha)$ が成立すれば、 $\sum_{i=1}^{N-1} m_i \Lambda_i$ が dominant integral weight のときには $\lambda = \sum_{i=1}^{N-1} (m_i - l - 1) \Lambda_i$ に対応する Jacobi 多項式 J_λ と正則につながるような楕円型の模型の固有関数が存在することがわかる。各 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し、無限個の dominant integral weight についてここでの条件が成立することはわかっている。

また、 $N = 2$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ のときと $N = 3$, $l = 1$ のときはすべての Jacobi 多項式 J_λ に対してそれと正則につながるような楕円型の模型の固有関数が存在することもわかっている。 $N = 2$ のときは前節の計算結果により、また、 $N = 3$, $l = 1$ のときにも具体的に方程式系 $\frac{\partial \Phi}{\partial T_i}|_{(T_1^0, \dots, T_3^0)} = 0$ を解くことにより正当化されている。一般の場合も方程式系の解のある程度具体的な式を得たいのだが、今のところわかっていない。

5. KATO-RELLICH の理論に沿った方法

5.1. まず、 L^2 空間において、ハミルトニアンについて楕円型 Calogero-Moser 模型を三角的な模型からの摂動をみたときに、それが正則な摂動になっていることを見る。 $p = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ としておき、 $\Delta(X)$ を $\mathcal{H}_T$ の基底状態 (2.2) としたとき、

$$(5.1) \quad W(p) := \Delta^{-1}(X)(\mathcal{H}_E + V_0 - \mathcal{H}_T)\Delta(X),$$

$$(5.2) \quad T(p) := \Delta^{-1}(X)(\mathcal{H}_E + V_0)\Delta(X).$$

と定義する。 V_0 は定数で $W(0) = 0$ となるように定められている。ここで、 $T(p) = H_0 + W(p)$ となっている。これから考える問題は、 H_0 の固有値、固有関数が $W(p)$ という摂動によりどのような性質をもって変化するか、ということを見ていく。

まず、次の補題が成り立つことに注意しておく。

Lemma 5.1. $W(p)$ は有界作用素であり、その作用素ノルムが $w_{\max}(p)$ という $w_{\max}(0) = 0$ となる連続関数で抑えられている。

$\sigma(T)$ を T のスペクトル全体の集合とする。まず、 H_0 の L^2 -空間での固有関数は Jacobi 多項式で与えられ、それが L^2 -空間での完全直交基底になることから、 $\sigma(H_0)$ が離散的なことがわかる。

さきほどの補題と、 H_0 の L^2 -空間での固有値、固有関数がすべてわかっていることから、Kato-Rellich の理論をなぞることにより次の定理が得られる。

Theorem 5.2. $l \in \mathbb{Q}_{\geq 2}$ とする。ある正の数 p_0 が存在し、 $-p_0 < p < p_0$ をみたす任意の p と任意の $\sigma(H_0)$ の元 a に対し、 H_0 の固有値 a をもつ

固有空間の次元と、 $T(p)$ の $|\zeta - a| < w_{\max}(p)$ をみたす ζ を固有値にもつ固有空間たちの直和の次元が等しい。また、 L^2 での $T(p)$ の固有値は円 $|\zeta - a| < w_{\max}(p)$ ($a \in \sigma(H_0)$) のどれかの内部に入っている。さらに、固有値、(L^2 の元と思ったときの) 固有関数は p について正則である。

これから先の議論のため、証明の概略を述べておく。

まず、レソルベントを考えることにする。 $(H_0 - \zeta)^{-1}$ は、Jacobi 多項式が L^2 -空間の基底になっていることを使い、 $(H_0 - \zeta)^{-1} \sum_{\lambda} c_{\lambda} J_{\lambda} = \sum_{\lambda} (E_{\lambda} - \zeta)^{-1} c_{\lambda} J_{\lambda}$ とすることで定義できる。

次に、 $(T(p) - \zeta)^{-1}$ であるが、 $p \rightarrow 0$ とすると $\|W(p)\| \rightarrow 0$ となることから以下のようにノイマン級数を用いることにより定義できる。

$$(5.3) \quad \begin{aligned} (T(p) - \zeta)^{-1} &= (1 + (H_0 - \zeta)^{-1} W(p))^{-1} (H_0 - \zeta)^{-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-(H_0 - \zeta)^{-1} W(p))^j (H_0 - \zeta)^{-1}. \end{aligned}$$

次に射影作用素を考えることにする。

Lemma 5.3. Γ_i を、スペクトル $\sigma(T)$ を積分路の上に通らない複素平面上の円周とする。

$$P_i := -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma_i} (T - \zeta)^{-1} d\zeta.$$

として P_i は射影作用素となっている。つまり、 $P_i^2 = P_i$ と $P_i P_j = P_j P_i$ が成立している。そして、 T の固有ベクトルが L^2 の直交基底ならば P_i は円周 Γ_i の内部にある固有値に対応する固有ベクトルたちの空間の直和への射影となっている。

また、次の補題たちが成立している。

Lemma 5.4. $a \in \sigma(H_0)$ に対し、固有値が a となる固有空間の次元は有限次元である。

Lemma 5.5. 有界作用素 P, Q に対して $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $\|P - Q\| < 1$ ならば $\text{rank } P = \text{rank } Q$ が成立する。

これらの補題を使って定理を出す道筋を示しておく。

まず、 $a \in \sigma(H_0)$ を固定しておき、 a を内部に含む適切な円周 Γ_a を考えておく。そして、Lemma 5.3 での T を H_0 とし積分路を Γ_a とすることにより射影を作る。すると、Lemma 5.4 よりこの射影の像は有限次元空間となることがわかる。次に、Lemma 5.5 より $-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma_a} (T(p) - \zeta)^{-1} d\zeta$ による像も有限次元空間となり、像の次元が $p = 0$ のものと等しいことがわかる。 $T(p)$ と射影作用素の“可換性”より、固有値問題を有限次元空間で考えることができ、定理の大半が出てくるのである。

5.2. 前節での結果により、 $T(p)$ の固有値のとりうる範囲や p についての正則性、そして固有関数が L^2 -空間に入っていることがわかったのであるが、固有関数が変数 $(x_1, \dots, x_N)$ について正則となっているか、高次の可換微分作用素との関係はどうなのか、固有関数が $p \rightarrow 0$ で Jacobi 多項式とつながっているか (ハミルトニアン の 縮退 の ため 自明 で は な い)、などは直ちにはでてこない。だが、実際には以下の定理は成立している。

Theorem 5.6. 以下において、 p は十分に小さいとしておく。

(i) $T(p)$ の L^2 -空間での固有関数で、高次の可換微分作用素についても固有関数となっており、変数 $(x_1, \dots, x_N)$ について実解析的となっているものが選べる。この固有関数は $p \rightarrow 0$ で Jacobi 多項式とつながっている。

(ii) 代数的な摂動論の計算で得られる形式的巾級数は収束する。

この定理を証明するために、以下の補題を使う。

Lemma 5.7. 高次の可換微分作用素の作用は対称な実解析的関数の空間 $C^\omega(T)^{S_N}$ 上で閉じている。ここで、 $T = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}/2\pi Q^\vee, \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ は A_{N-1} 型の Cartan 部分代数、 $Q^\vee (\simeq Q)$ は coroot 格子である。

Lemma 5.8. Jack 多項式を対称単項多項式 m_λ で展開したときの係数は非負である。つまり、 $J_\lambda = \sum_\nu c_{\lambda,\nu} m_\nu$ としたとき、 $c_{\lambda,\nu} \geq 0$ となっている。

また、Jack 多項式の Norm formula, Pieri formula, Cauchy formula (又は $J_\lambda(1, \dots, 1)$ の具体式) もテクニカルな箇所で使うことになる。

以下では、定理の証明の概略を述べる。

$$P_\Gamma(p) := -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\Gamma (T(p) - \zeta)^{-1} d\zeta,$$

とおいたとき、とりあえず $P_\Gamma(p)J_\lambda \in C^\omega(T)^{S_N}$ を示す。これは $W(p)J_\lambda \in C^\omega(T)^{S_N}$ を示すことに帰着されるのである。ここで Jack 多項式の性質をたくさん使うこととなり、一見複雑なテクニカルな計算が必要となっている。実際には、Jacobi 多項式を少し虚部に延ばした関数の値について上から優級数によりおさえこむということをするのである。

先ほどの命題が示された後では、話の設定空間を $C^\omega(T)^{S_N}$ の有限次元部分空間にすることができる。ここで、高次の可換微分作用素との compatibility により有限次元部分空間での同時対角化の話となってしまう、定理の (i) が得られる。(ii) は、(i) が得られていることと摂動の計算の一意性から得られる。

REFERENCES

- [1] Felder, Giovanni; Varchenko, Alexander: Integral representation of solutions of the elliptic Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard equations, Internat. Math. Res. Notices, no. 5, 221–233 (1995).

- [2] Felder, Giovanni; Varchenko, Alexander: Three formulae for eigenfunctions of integrable Schrödinger operator, *Compositio Math.* **107** no. 2, 143–175 (1997).
- [3] Hasegawa, Koji: Ruijsenaars' commuting difference operators as commuting transfer matrices. *Comm. Math. Phys.* **187** no. 2, 289–325 (1997).
- [4] Komori, Yasushi and Takemura, Kouichi: The perturbation of the quantum Calogero-Moser-Sutherland system and related results, preprint, *math.QA/0009244* (2000).
- [5] Macdonald, I. G.: Symmetric functions and Hall polynomials. Second edition. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1995).
- [6] Olshanetsky, M. A.; Perelomov, A. M.: Quantum integrable systems related to Lie algebras. *Phys. Rep.* **94** no. 6, 313–404 (1983).
- [7] Ruijsenaars, S. N. M.: Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities. *Comm. Math. Phys.* **110** no. 2, 191–213 (1987).
- [8] R. P. Stanley: Some combinatorial properties of Jack symmetric functions. *Adv. Math.*, **77** no. 1, 76–115 (1989).
- [9] Takemura, Kouichi: On the eigenstates of the elliptic Calogero-Moser model, preprint RIMS-1270, to appear in *Lett. Math. Phys.*, *math.QA/0002104* (2000).
- [10] Varchenko, Alexander: Critical points of the product of powers of linear functions and families of bases of singular vectors. *Compositio Math.* **97** no. 3, 385–401 (1995).
- [11] Whittaker, E. T. and Watson, G. N.: A course of modern analysis. Fourth edition. Cambridge University Press, New York (1962).

236-0016 横浜市金沢区瀬戸 22-2 横浜市立大学理学部数理科学科
E-mail address: takemura@math.yokohama-cu.ac.jp