表現論シンポジウム講演集, 2000
pp.67-71

(k,l) 条件をみたす A 型 Iwahori-Hecke 代数の既約指標について—— Cummins-King 公式の紹介

山根宏之（大阪大学理学研究科）

本論説の内容はすでに下記の論文によって得られていることを最近、第一著者に教えてもらいました。したがって本論説は survey talk です。

[CK] Cummins C. and King R. C., An algorithm for calculating characters of Hecke algebras $H_n(q)$ of type A_{n-1} when q is a root of unity, Communications in Algebra, 21(12), 4425-4437 (1993)

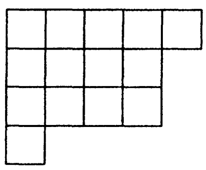
本論説の用語は著者独特のものにさせていただきます。

本論説では q は常に固定された零でない複素数を表す。$l(q) := \mathrm{Card}\{1+q+\cdots+q^{i-1} | i \in \mathbf{N}\}$ とおく。特に $l(1)=\infty$ である。$l(q)$ を l とも書く。$\mathbf{C}$-代数 $H_n(q)$ を生成元 $g_1,\ldots,g_{n-1}$ と関係式

$$(g_i-q)(g_i+1)=0,\ g_ig_{i+1}g_i=g_{i+1}g_ig_{i+1},\ g_ig_j=g_jg_i\ (|i-j|\geq 2) \tag{1.1}$$

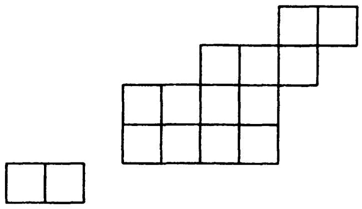
で定義する。$H_n(q)$ は A_{n-1} 型 Iwahori-Hecke 代数と呼ばれる。

非負整数の無限列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ が *partition* であるとは $\mathrm{Card}\{i|\lambda_i<\lambda_{i+1}\}=0$ および $\mathrm{Card}\{i|\lambda_i>0\}<\infty$ をみたすときにいう。partition λ が $\lambda_a=0$ をみたすとき λ を有限列 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{a-1})$ でもあらわす。$\ell(\lambda):=\mathrm{Card}\{i|\lambda_i>0\}$ および $|\lambda|:=\lambda_1+\cdots+\lambda_{\ell(\lambda)}$ とおく。$|\lambda|=n$ であるとき λ を n の partition とよぶ。λ の conjugation λ' を $\lambda'_i=\mathrm{Card}\{j|\lambda_j\geq i\}$ によって定義する。partition λ とその Young diagram を同一視する。



$(5,4,4,1)$

partitions μ, λ が $\forall i$ にたいして $\mu_i\leq\lambda_i$ をみたすとき $\mu\subset\lambda$ とかく。そのとき skew diagram を λ/μ であらわす。$|\lambda/\mu|:=|\lambda|-|\mu|$ とおく。$\lambda=\lambda/(0)$ に注意する。



$(9,8,7,7,2)/(7,5,3,3)$

DEFINITION 1.1. partitions λ, μ を $\mu \subset \lambda$ となるものとする。$r(\lambda/\mu) := \mathrm{Card}\{i | \lambda_i > \mu_i\}$, $c(\lambda/\mu) := r(\lambda'/\mu')$, $cc(\lambda/\mu) := \mathrm{Card}\{i | \lambda_{i+1} \leq \mu_i < \lambda_i\}$ とおく。$r(\lambda/\mu)$, $c(\lambda/\mu)$, $cc(\lambda/\mu)$ はそれぞれ λ/μ の行の数、列の数、連結成分の数である。

Λ を partitions の集合とする。Λ_n を n の partitions の集合とする。

$\nu \subset \mu \subset \lambda$ および $|\mu/\nu| = |\lambda/\mu| = 1$ をみたす 3 つの partitions ν, μ, λ にたいして

$$d(\nu, \mu, \lambda) = \mu_i - \lambda_j + j - i$$

とおく。ここで i, j はそろぞれ $\mu_i - \nu_i = 1$, $\lambda_j - \mu_j = 1$ をみたすものである。$|d(\nu, \mu, \lambda)| \geq 2$ であるとき partition $S_{\nu,\lambda}(\mu)$ を $|S_{\nu,\lambda}(\mu)| = |\mu|$, $\nu \subset S_{\nu,\lambda}(\mu) \subset \lambda$ および $S_{\nu,\lambda}(\mu) \neq \mu$ をみたすものとする。

自然数 k を $1 \leq k < l$ となるものとする。partition λ が (k,l)-partition であるとは $\ell(\lambda) \leq k$ および $\lambda_1 - \lambda_k + k \leq l$ をみたすときにいう。$\Lambda^{(k,l)}$ を (k,l)-partitions の集合とする。$\Lambda_n^{(k,l)} := \Lambda^{(k,l)} \cap \Lambda_n$ とおく。

$\lambda \supset \mu$ である $\mu, \lambda \in \Lambda$ の組 (λ, μ) を (k,l)-skew diagram pair とよぶ。(k,l)-skew diagram pair (λ, μ) にたいして $\lambda^{(i)} \in \Lambda_{i+|\mu|}^{(k,l)}$ $(0 \leq i \leq |\lambda/\mu|)$ である列

$$(\mu = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \ldots \subset \lambda^{(|\lambda/\mu|)} = \lambda)$$

を (k,l)-standard tableau とよぶ。$\mathrm{STab}^{(k,l)}(\lambda, \mu)$ を (k,l)-skew diagram pair (λ, μ) の (k,l)-standard tableaux の集合とする。$\mathrm{STab}^{(k,l)}(\lambda) = \mathrm{STab}^{(k,l)}(\lambda, (0))$ とおく。

$m \in \mathbf{Z}$ にたいして

$$\{m\}_q := \begin{cases} 1 + q + \cdots + q^{m-1} & \text{if } m > 0, \\ 0 & \text{if } m = 0, \\ -(q^{-1} + q^{-2} + \cdots + q^{m}) & \text{if } m < 0. \end{cases}$$

とおく。$1 \leq |d| < l$ である $d \in \mathbf{Z}$ にたいして

$$\mathbf{b}_d(q) := -\{d\}_q^{-1}, \qquad \mathbf{c}_d(q) := \frac{\sqrt{\{d+1\}_q}\sqrt{\{-d+1\}_q}}{\sqrt{\{d\}_q}\sqrt{\{-d\}_q}}$$

とおく。

[W]より次の定理が従う。

THEOREM 1.2 [W, Theorem 2.2 and Corollary 2.5]. $1 \leq k < l = l(q)$とする。

(i) (λ, μ)を$|\lambda/\mu| = n$である(k,l)-skew diagram pairとする。$V_{\lambda,\mu}^{(k,l)}$を$\{v_t \mid t \in \mathrm{STab}^{(k,l)}(\lambda,\mu)\}$を基底とする$\mathbf{C}$-vector spaceとする。このとき次をみたす表現$\pi_{\lambda,\mu}^{(k,l)} : H_n(q) \to \mathrm{End}(V_{\lambda,\mu}^{(k,l)})$が一意的に存在する。

$$\pi_{\lambda,\mu}^{(k,l)}(g_i)v_t = \begin{cases} \mathbf{b}_{d_i(t)}(q)v_t & \text{if } \mathrm{Card}\,\mathrm{STab}^{(k,l)}(\lambda^{(i+1)}, \lambda^{(i-1)}) = 1, \\ \mathbf{b}_{d_i(t)}(q)v_t + \mathbf{c}_{d_i(t)}(q)v_{s_i(t)} & \text{if } \mathrm{Card}\,\mathrm{STab}^{(k,l)}(\lambda^{(i+1)}, \lambda^{(i-1)}) = 2 \end{cases}$$

ここで$1 \leq i \leq n-1$, $t = (\mu = \lambda^{(0)} \subset \cdots \subset \lambda^{(n)} = \lambda) \in \mathrm{STab}^{(k,l)}(\lambda,\mu)$, $d_i(t) = d(\lambda^{(i-1)}, \lambda^{(i)}, \lambda^{(i+1)})$, $s_i(t) = (\mu = \lambda^{(0)} \subset \cdots \subset \lambda^{(i-1)} \subset S_{\lambda^{(i-1)},\lambda^{(i+1)}}(\lambda^{(i)}) \subset \lambda^{(i+1)} \subset \cdots \subset \lambda^{(n)} = \lambda)$ である。

(ii) $\lambda \in \Lambda_n^{(k,l)}$, $\pi_\lambda^{(k,l)} := \pi_{\lambda,o}^{(k,l)}$とする。このとき$\pi_\lambda^{(k,l)}$は既約である。$\pi_\mu^{(j,l)}$と$\pi_\lambda^{(k,l)}$が同値である必要十分条件は$\mu = \lambda$である。

(k,l)-skew diagram pair (λ,μ)にたいして

$$\omega(\lambda,\mu,k,l) := \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda_1 - \mu_k + k \leq l, \\ 1 & \text{if } \lambda_1 - \mu_k + k - 1 = l, \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく。

skew diagram λ/μが border stripであるとはそれが連結（すなわち$cc(\lambda/\mu) = 1$）であって2×2の箱の blockを含まないときにいう。skew diagram λ/μが broken border stripであるとはそれが2×2の箱の blockを含まないときにいう。（連結でなくてもよい。）

以下は著者の非標準的な用語である。

DEFINITION 1.3. (k,l)-skew diagram pair (λ,μ)が(k,l)-tame broken border strip pair（(k,l)-TBBSPと略す。）であるとはλ/μがbroken border stripであり$\omega(\lambda,\mu,k,l) \leq 1$であるときにいう。$(k,l)$-TBBSP (λ,μ)が(k,l)-extreme border strip pair（(k,l)-EBSPと略す。）であるとは$|\lambda/\mu| = l$であるときにいう。(k,l)-TBBSP (λ,μ)が(k,l)-moderate broken border strip pair（(k,l)-MBBSPと略す。）であるとは(k,l)-EBSPでないときにいう。

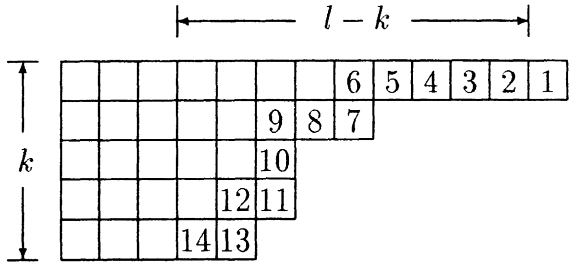
下の図では$k = 5$, $l = 14$, $\mu = (7,5,5,4,3)$, $\lambda = (13,8,6,6,5)$とおき、次のことがわかる。

1) λ/μは数字$1, \ldots, 14$が書かれた箱からなるbroken border stripである。

2) (λ,μ)は$(5,14)$-EBSPである。

3) νが$\mu \subset \nu \subset \lambda$である partitionであり1が書かれた箱が$\nu/\mu$に属さないとき$(\nu,\mu)$は$(5,14)$-MBBSPである。

4) νが$\mu \subset \nu \subset \lambda$および$|\mu| \neq |\nu| \neq |\lambda|$である partitionであり 1と14が書かれた2つの箱がν/μに属すとき(ν,μ)は$(5,14)$-MBBSPである。



(k,l)-skew diagram pair (λ,μ)の(k,l)-coreをつぎのようにして定義する。((k,l)-coreも(k,l)-skew diagram pairである。)

1) (λ,ν)が(k,l)-EBSP となる$\mu\subset\nu\subset\lambda$である (k,l)-partition νが存在するとき(ν,μ)の(k,l)-coreは (λ,ν)の(k,l)-coreである。

2) 1)がなりたたないとき (λ,μ)それ自身が(λ,μ) の(k,l)-coreである。

(k,l)-skew diagram pair (λ,μ)が (k,l)-generalized strip pairであるとは$|\lambda/\mu|\neq 0$でありその(k,l)-coreが(μ,μ)または (k,l)-MBBSPであるときにいう。 (λ,μ)が(k,l)-generalized strip pairであり(ν,μ) が(λ,μ)の(k,l)-coreであるとき

$$wt^{(k,l)}(\lambda,\mu):=\begin{cases} -(-1)^{m(k-1)}\{l-k\}_q & \text{if } \nu=\mu,\\ (-1)^{m(k-1)}(-1)^{r_{co}-cc_{co}-\omega_{co}}q^{c_{co}-cc_{co}}(q-1)^{cc_{co}-1-\omega_{co}} & \text{if } \nu\neq\mu,\end{cases}$$

とおく。ここで$m=|\lambda/\nu|/l$, $c_{co}=c(\nu/\mu)$, $r_{co}=r(\nu/\mu)$, $cc_{co}=cc(\nu/\mu)$, $\omega_{co}=\omega(\nu,\mu,k,l)$である。

nを自然数とする。$\lambda\in\Lambda_n^{(k,l)}$と$\mu\in\Lambda_n$ にたいして(k,l)-partitionsの列

$$U=((0)=\lambda^{(0)}\subset\lambda^{(1)}\subset\cdots\subset\lambda^{(\ell(\mu))}=\lambda)$$

がshape λ, weight μの (k,l)-generalized strip pair tableauであるとは、各$1\leq i\leq\ell(\mu)$にたいして$(\lambda^{(i)},\lambda^{(i-1)})$が$|\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}|=\mu_i$である$(k,l)$-generalized strip pairであるときにいう。shape λ, weight μの(k,l)-generalized strip pair tableau $U=((0)=\lambda^{(0)}\subset\cdots\subset\lambda^{(\ell(\mu))}=\lambda)$にたいして

$$wt^{(k,l)}(U):=\prod_{i=1}^{\ell(\mu)}wt^{(k,l)}(\lambda^{(i)},\lambda^{(i-1)}),$$

とおく。

S_nをn次の対称群とする。$s_i:=(i,i+1)\in S_n$を基本互換とする。

各$1\leq i<j\leq n$にたいして

$$G_{ij}:=g_ig_{i+1}\cdots g_{j-1}\in H_n(q),\quad \tau_{ij}:=s_is_{i+1}\cdots s_{j-1}\in S_n$$

とおく。各$1\leq i\leq n$にたいして$G_{ii}:=1\in H_n(q)$, $\tau_{ii}:=1\in S_n$とおく。$w\in S_n$が$\tau_{i_nn}\tau_{i_{n-1}n-1}\cdots\tau_{i_11}$ であるとき(これはreduced expressionである。)

$$T_w:=G_{i_nn}G_{i_{n-1}n-1}\cdots G_{i_11}\in H_n(q). \tag{1.2}$$

とおく。$\{T_w | w \in S_n\}$ は $H_n(q)$ の基底である。$\mu \in \Lambda_n$ にたいして

$$\gamma_\mu = \tau_{1,\mu_1}\tau_{\mu_1+1,\mu_1+\mu_2}\cdots\tau_{\mu_1+\cdots+\mu_{\ell(\mu)-1}+1,\mu_1+\cdots+\mu_{\ell(\mu)}} \in S_n.$$

とおく。

$\lambda \in \Lambda_n^{(k,l)}$ にたいして $\chi_\lambda^{(k,l)} : H_n(q) \to \mathbf{C}$ を $\pi_\lambda^{(k,l)}$ の指標とする。

[CK] よりつぎの定理がしたがう。

THEOREM 1.4 [CK, Theorem 3.2]. $n \in \mathbf{N}$, $\lambda \in \Lambda_n^{(k,l)}$, $\mu \in \Lambda_n$ とする。このときつぎの式がなりたつ。

$$\chi_\lambda^{(k,l)}(T_{\gamma_\mu}) = \sum_U wt^{(k,l)}(U), \tag{1.3}$$

ここで和はすべてのshape λ, weight μの (k,l)-generalized strip pair tableaux U ついてとられる。

Example 1.5. $k=4$, $l=6$, $\lambda=(7,6,6,6) \in \Lambda_{25}^{(4,6)}$, $\mu=(15,6,4) \in \Lambda_{25}$ とする。

$$\begin{aligned}
&\chi_\lambda^{(4,6)}(T_{\gamma_\mu}) \\
&= (-1)^{2\cdot3}(-1)^{2-1-0}q^{2-1}(q-1)^{1-1-0}\cdot(-(-1)^{1\cdot3})(1+q) \\
&\quad \cdot(-1)^{0\cdot3}(-1)^{4-2-0}q^{2-2}(q-1)^{2-1-0} + (-1)^{2\cdot3}(-1)^{3-1-0}q^{1-1}(q-1)^{1-1-0} \\
&\quad \cdot(-(-1)^{1\cdot3})(1+q)\cdot(-1)^{0\cdot3}(-1)^{3-2-1}q^{3-2}(q-1)^{2-1-1} \\
&= -q(1+q)(q-1)+(1+q)q \\
&= -q^3+q^2+2q = 3q\,.
\end{aligned}$$

$a0$	$a0$	$a1$	$a2$	$b1$	$b1$	$c0$
$a0$	$a1$	$a1$	$a2$	$b1$	$c0$	
$a1$	$a1$	$a2$	$a2$	$b1$	$c0$	
$a1$	$a2$	$a2$	$b1$	$b1$	$c0$	

$a0$	$a1$	$a1$	$a2$	$a2$	$b1$	$c0$
$a0$	$a1$	$a2$	$a2$	$b1$	$b1$	
$a0$	$a1$	$a2$	$b1$	$b1$	$c0$	
$a1$	$a1$	$a2$	$b1$	$c0$	$c0$	

References

[CK] C. Cummins and R. C. King, An algorithm for calculating characters of Hecke algebras $H_n(q)$ of type A_{n-1} when q is a root of unity, Comm. Algebra, 21(12), 4425-4437 (1993)

[W] H. Wenzl, Hecke algebras of type A_n and subfactors, *Invent. Math.* **92** (1988), 349-383.