表現論シンポジウム講演集, 2000
pp.62-66

Topological representation of the Iwahori-Hecke algebra

—— Monodromy representations associated with a Selberg type integral

三町 勝久 (東工大・理)
Katsuhisa Mimachi Tokyo Institute of Technology

Gaussの超幾何函数ならびに超幾何微分方程式に付随したモノドロミーの研究は古典的なものであるにも拘らず、現在でも新たな視点を獲得しながら進化・発展している。

本講演では、Gaussの超幾何函数の多変数化

$$\int \prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} (t_i - z_j)^{\lambda_j} \prod_{1\le i<j\le m} (t_i - t_j)^{g}\, dt_1 \cdots dt_m \qquad (*)$$

に付随するモノドロミーを考察する。その際、パラメータ λ_j と g に関し

(1) $\lambda_j = -\frac{g}{2}$ であるか　　(2) $\lambda_j \neq -\frac{g}{2}$ であるか

によって、状況は著じるしく異なることが分かる。(2)がgenericな状況であるのに対して(1)はspecialな状況と言ってよい。そして、その特殊性により、(1)の場合、(*)に付随するモノドロミー表現としてIwahori-Hecke代数の表現が把えられるのである。

もう少し具体的に述べると次のようになる。

つまり Iwahori-Hecke algebra $H(S_m)$ を

生成元が $T_1, \cdots, T_{m-1}$,

関係式が $\begin{cases} T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} & (1 \leq i \leq m-2) \\ T_i T_j = T_j T_i & , |i-j| \geq 2 \\ (T_i - 1)(T_i + q) = 0 \end{cases}$

なる $\mathbb{C}$-algebra とする。ただし, q は複素数とする.

ここで更に $q(1-q^2)(1-q^3) \cdots (1-q^m) \neq 0$ のとき

$\mathbb{C}$-algebra としての同型

$$H(S_m) \simeq \mathbb{C} S_m$$

が知られており したがって, この場合の Iwahori-Hecke algebra の表現論は 対称群 S_m の表現論で制御出来る。特に, 既約表現は Young 図形でパラメトライズされる。

一方, 函数 (*) に付随するモノドロミーを調べることは, (*) を

twisted cohomology H^m と

twisted homology H_m との

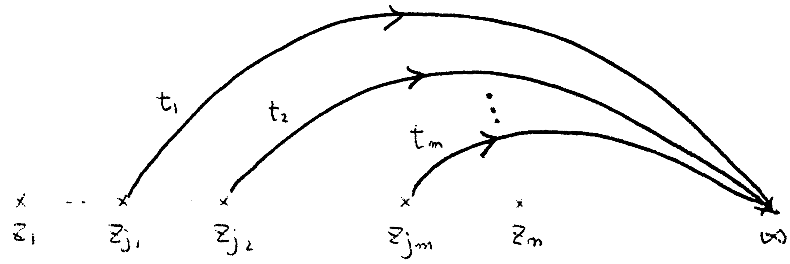
pairing と見做すことにすれば, 結局は twisted homology を調べることに帰着される。

以下, 条件 (1) を課した場合の考察に限定する。

このとき,

特に $1 \leqq j_1 < \cdots < j_m \leqq n$ として，homology H_m の元 $\gamma_{j_1\cdots j_m}$ を

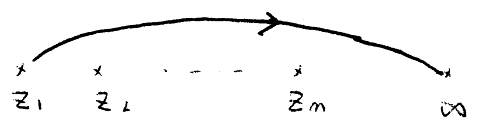
$\gamma_{j_1\cdots j_m}$ =



と定義すれば，このような $\gamma_{j_1\cdots j_m}$ の個数は $\binom{n}{m}$ である。しかし、これらの元は free ではなく，$\binom{n}{m-1}$ 個の線型関係式を有する。易しい場合に説明しておくと次のようになる。

<u>例</u> $m=1$ つまり $(*)$ が一重積分である場合を考える。これは丁度 Appell の F_1 や Lauricella の F_D の場合に相当しているのだが，γ_j として

γ_1 =



γ_2 =

⋮

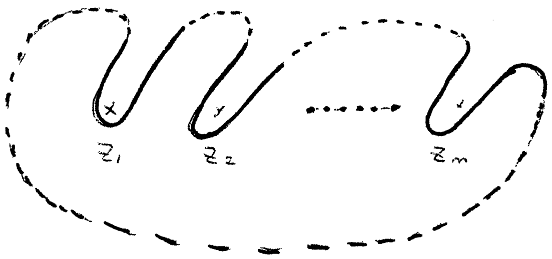
γ_n =

を考えると一次関係式

$$\gamma_1 + q\gamma_2 + \cdots + q^{m-1}\gamma_m = 0$$

が導かれる。ここで $q = \exp(-\frac{g}{2})$ としている。

(∵)



および Cauchy の積分定理より。

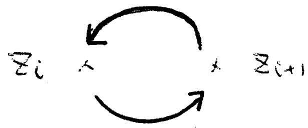
（一次式の導出 および 例の説明 の終り） //

さて、一般に線型空間

$$\sum_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n} \mathbb{C}\gamma_{j_1\cdots j_m}$$

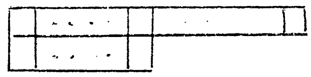
の上には z_i と z_{i+1} とを時計回りに半回転する

τ_i :



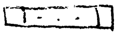
という組み紐群の点配置空間への作用から誘導される組み紐群の作用がある。そして、特に注目すべきことは、この組み紐群の表現が、Iwahori-Hecke 代数の表現にもなっているという点である。更に、この表現が既約な表現であることも確められ、次が示される。

定理

$$\sum_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n} \mathbb{C}\,\gamma_{j_1\cdots j_m} =$$  $\begin{matrix} n-m \\ m \end{matrix}$ でパラメトライズされる既約な $H(S_n)$ module.

但し $q=\exp(-\hbar/2)$

ここで、次元は $\binom{n}{m}-\binom{n}{m-1}$ である.

以上(*)におけるパラメータが条件(1)をみたすときのモノドロミーの性質を調べたのであるが、条件(2)をみたす場合にどうなるかというと、$\gamma_{j_1\cdots j_m}$, $j_1<\cdots<j_m$ はもはや、組み紐群の表現としても閉じなくなり、その表現が閉じるためには $\gamma_{j_1\cdots j_m}$ $j_1\le\cdots\le j_m$ という元の集合を考える必要が生じる(添字の等しいものも許すと言っている)。しかし、$\gamma_{j_1\cdots j_m}$, $j_1\le\cdots\le j_m$ という元で生成される空間に生じる組み紐群の表現は丁度 $U_q(gl(2))$ の表現  に付随するR-行列が表現行列になっているようなものである。

以上