表現論シンポジウム講演集, 2000
pp.33-44

2次表現のモジュライ

中本 和典
(京都大学大学院理学研究科)
nakamoto@kusm.kyoto-u.ac.jp

1 序

今回は表現のモジュライのお話.

インパクトのあるように, 自分の結果を見出しにすると,

「2次表現は5種類に分類される」

「各種類別に2次表現を集めたものは, 代数多様体 (スキーム) と思える」

となります. この2つのキャッチフレーズで「ああ, あいつの言いたいことは要するにそういうことか」と思って頂ければ幸いです.

ここでいう表現とは, 群や半群やモノイドなどの表現なのですが, 特定の群や半群やモノイドを指定しているわけではありません. 群やモノイドには何の条件も課さずに, 群やモノイドの表現一般に共通する性質を取り出そうというのが, ここでのスタンスです.

Γ を群, 半群もしくはモノイドとします. Γ の2次表現を考察の対象にしましょう. さて, Γ の2次表現はどのぐらいあるのでしょうか. かりに Γ の2次表現のある族を見つけたとしましょう. その族はいくつかのパラメーターで指定されているものとします. では, そのパラメーター表示は果たして "自然" なものなのでしょうか. パラメーターの値の "近い" 表現はやはり "近い" ものなのでしょうか. パラメーター表示の仕方はそれが唯一なのでしょうか.

実は, Γ の2次表現を (各種類別ごとに) 並べる標準的な方法があり, 並べたものには自然に代数多様体 (正確にはスキーム) の構造を入れること

ができる, ということを紹介するのが今回のお話です. Γ の 2 次表現を標準的に並べたもの, それが表現のモジュライです.

Γ の表現のモジュライがどんな形をしているかは, ここではとても紹介できない (できるわけがない) のですが, いちおう Γ の表現を標準的に並べたものを考えてもよいと保証されているわけです. 表現のモジュライの性質から Γ の表現の性質がわかることもあります. 例えば, Γ の表現のモジュライが特異点のないきれいな状況だと (相当に良い状況), Γ の有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の表現が p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ 上の表現に持ち上がることがわかります.

表現論にとっても, 表現論以外の例えば代数幾何にとっても, 表現のモジュライは意味のある対象だと思われます. (少なくとも構成者の筆者は思う.) 表現のモジュライの構成する際に, 代数幾何的な手法を使うのですが, そのとき, 普段は $\mathbb{C}$ 上や $\mathbb{C}$ 以外の体上, もしくは局所環上でしか表現を考えなかったかもしれませんが, 一般の可換環上で表現を考える必要性が出てきます. 一般の可換環上の表現, さらには, スキーム上の表現を考えることは自然であると思われます. そういった理由から, 以下の話では, 一般の可換環上の Γ の表現を考えることにしましょう. 可換環 R を任意にして, Γ の R 上の表現一般に共通する性質を調べていこう, これが筆者のとる立場です.

Γ の R 上の 2 次表現は, だいたい 5 種類に分類され, 各種類ごとに性質が異なってくると思われます. 厳密に言うと, 5 種類といっても, 幾つか違う種類のものが混じったような 2 次表現がありますので, 基本的なパターンとして 2 次表現が 5 種類に分類される, といったほうがより正確です. その 5 種類とは, 次の通りです.

(1) 絶対既約表現
(2) Borel 鋳型表現
(3) 半単純鋳型表現
(4) 巾単鋳型表現
(5) スカラー鋳型表現

このうち巾単鋳型表現は, 標数 2 の場合とそうでない場合に著しく性質が異なるので, 5 種類と数えるところ 6 種類と数えたほうが良いかもしれません. 5 つのタイプごとに性質が異なるので, それらは同時に扱うことができませんが, 各タイプの表現を集めてくると表現のモジュライを構成することができます. 各タイプの厳密な定義は次節で改めて解説します.

今回のお話では, 2 次表現に限定しましたが, 一般に 3 次以上の表現についてもモジュライが存在する場合があります. 例えば, 絶対既約表現の

モジュライは各次数で定義されます．詳しくは，次節以降，特に補足では詳しく述べましたのでご覧下さい．

2 本編: 可換環上の2次表現

Γを群，半群もしくはモノイドとします．Rを(1を含む)可換環とします．Γが群のとき，群準同型$\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}_n(R)$を$\Gamma$の$R$上の$n$次表現といいます．$\Gamma$が半群もしくはモノイドのとき，半群(モノイド)としての準同型$\rho : \Gamma \to \mathrm{M}_n(R)$のことを$\Gamma$の$R$上の$n$次表現といいます．ただし，$\mathrm{M}_n(R)$は乗法に関しモノイドとみなします．

Definition 2.1 ρ, ρ'をΓのR上のn次表現とします．ρとρ'が同値であるとは，あるR-代数同型$\sigma : \mathrm{M}_n(R) \to \mathrm{M}_n(R)$が存在して，$\sigma(\rho(\gamma)) = \rho'(\gamma)$が各$\gamma \in \Gamma$に対して成り立つときをいいます．

Rが体や局所環のときには，Skolem-Noetherの定理が成り立ち，R-代数同型$\sigma : \mathrm{M}_n(R) \to \mathrm{M}_n(R)$は適当な$P \in \mathrm{GL}_n(R)$で$\sigma(\cdot) = P^{-1} \cdot P$と表されます．ですから上の2つの表現の同値の定義は通常の定義の自然な拡張といえます．

さて，前節でも言いましたように，2次表現は5種類に分類されます．その分類の仕方ですが，$\rho(\Gamma)$で生成されるR-代数$R[\rho(\Gamma)] \subseteq \mathrm{M}_n(R)$で分類するというものです．ただ，$\mathrm{M}_n(R)$の$R$-部分代数$R[\rho(\Gamma)]$といってもいくらでも可能性が出てきますので，なるべく扱いやすいものだけを取り扱うことにします．そこで，$\mathrm{M}_n(R)$の“良い”クラスのR-部分代数を定義して，それを鋳型(mold)と呼ぶことにします．

Definition 2.2 Rを可換環とします．行列環$\mathrm{M}_n(R)$のR部分代数AがR上の次数nの鋳型(mold)であるとは，Aおよび$\mathrm{M}_n(R)/A$がR射影加群であるときをいいます．各素イデアル$\wp \in \mathrm{Spec}R$に対して$A_\wp$が階数rの$R_\wp$自由加群のとき，Aの階数をrと定めます．

群もしくはモノイドΓの可換環R上のn次表現ρが次数nの鋳型Aをもつとは，$R[\rho(\Gamma)] = A$となるときをいいます．

Remark 2.3 鋳型(mold)という呼び名は，$\mathrm{M}_n(R)$の部分代数Aを，$\mathrm{M}_n(R)$という板(?)に何か(人形とか舟形とか)型どったものに見立てて，その型

どおりの表現を集めてこようというイメージでつけました. ただ命名者のセンスが悪いのか, 講演の際にあまり良い反応は返ってきません.

$n=2$ のとき, $\mathrm{M}_2(R)$ に含まれるような鋳型 A はどのくらいあるでしょうか. 実は基本的には 5 種類あって, その 5 種類の鋳型に対して表現が 5 種類に分類されるのです. その 5 種類の鋳型とは,

(1)	$A=\mathrm{M}_2(R)$	$\to$ 絶対既約表現
(2)	A は階数 3 の鋳型	$\to$ Borel 鋳型表現
(3)	A は階数 2 の半単純な鋳型	$\to$ 半単純鋳型表現
(4)	A は階数 2 の半単純でない鋳型	$\to$ 巾単鋳型表現
(5)	A は階数 1 の鋳型	$\to$ スカラー鋳型表現

となります. そしてそれぞれのタイプの表現を集めてくるとモジュライが構成されるわけです.

Example 2.4 $R=\mathbb{C}$ としましょう. $\mathbb{C}$ 上の代数 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ の中に含まれる鋳型 A とは, 単に $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ の部分代数のことです. A は次元によって分類されますが, 2 次元代数だけ, 半単純代数と半単純でない代数に分かれます. そのため丁度 5 種類あるわけです. 3 次元部分代数の例としては, 上半三角行列のなす部分代数があります (Borel 鋳型の名前の由来はここから来ている). 2 次元半単純代数の例としては $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq \beta)$ の生成する部分代数があり, 半単純でない 2 次元代数の例としては $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の生成する部分代数があります.

Example 2.5 再び $R=\mathbb{C}$ とします. Υ_m を階数 m の自由モノイドとします (m 個の元で生成され m 個の元の間に何の関係もないモノイド). Υ_m の $\mathbb{C}$ 上の 2 次表現を考えることは, m 個の 2 次正方行列の組を考えることに他なりません. そこで, $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m=\mathrm{M}_2(\mathbb{C})\times\cdots\times\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ (m 個) を考えることにします. $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m$ に群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ の作用を $(A_1,\ldots,A_m)\mapsto(P^{-1}A_1P,\ldots,P^{-1}A_mP)$ で決めます. 但し, $(A_1,\ldots,A_m)\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m$, $P\in\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ とします. $(A_1,\ldots,A_m)$ と $(P^{-1}A_1P,\ldots,P^{-1}A_mP)$ は Υ_m の同値な表現に対応してますので, 丁度 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m$ の $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ による軌道が表

現の同値類に対応します. ところで, 2 次表現は 5 種類に分類され, それぞれのタイプでモジュライがつくれることから, $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m$ に関して

$$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m_{(1)} \sqcup \mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m_{(2)} \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m_{(5)}$$

という 5 つの subvariety への分割があり, 各 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m_{(i)}$ は連結複素多様体 (特異点なし) で, $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m_{(i)} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m_{(i)}/\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ は幾何学的商と呼ばれる "良い" 商となります. $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m_{(i)}$ は各鋳型 (i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ を生成するような $(A_1, \ldots, A_m)$ を集めてきたものです. $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m_{(i)}/\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ は特異点のない連結複素多様体となり, これが Υ_m の各タイプの 2 次表現のモジュライです. (Borel 鋳型に対応する $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m_{(2)}$ 及び $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^m_{(2)}/\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ については鳥居 猛氏との共同研究があります [2].)

では, 絶対既約表現から順に 5 種類の表現について説明していきましょう.

I. 絶対既約表現

2 次だけじゃなく, 一般の次数に対しても絶対既約表現のモジュライが存在します.

Definition 2.6 ρ を Γ の R 上の n 次表現とします. ρ が絶対既約表現とは, $R[\rho(\Gamma)] = \mathrm{M}_n(R)$ のときをいいます. この定義は, 各素イデアル $\wp \in \mathrm{Spec}R$ に対して, $\Gamma \xrightarrow{\rho} \mathrm{M}_n(R) \to \mathrm{M}_n(R_\wp/\wp R_\wp)$ が通常の意味で絶対既約であることと同値です.

正確な statement は補足で述べることにして, ここではラフに定理を主張します.

Theorem 2.7 Γ の n 次絶対既約表現について, その同値類をあつめてきたものは, 代数幾何的な対象 (スキーム) となります. しかも同値類の並べ方は標準的で, ある種の普遍的性質をもっています. 表現のモジュライは, 整数係数の多項式たちの零点として記述されます.

モジュライを構成する段階で得られる副産物を紹介しましょう.

Theorem 2.8 ρ, ρ' を Γ の R 上の n 次絶対既約表現とします. ρ と ρ' が同値であるための必要十分条件は $\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) = \mathrm{tr}(\rho'(\gamma))$ が各 $\gamma \in \Gamma$ に対して成立することです.

II. Borel 鋳型表現

この場合も一般の次数についてモジュライが存在します.

Definition 2.9 $A \subseteq \mathrm{M}_n(R)$ がBorel鋳型であるとは, ある $f_1, f_2, \ldots, f_r \in R$ で $R = Rf_1 + Rf_2 + \cdots + Rf_r$ となるものと, $P_{f_i} \in \mathrm{GL}_n(R_{f_i})$ が存在して, 各 i について $P_{f_i}^{-1}(A \otimes_R R_{f_i})P_{f_i}$ が $\mathrm{M}_n(R_{f_i})$ の上半三角行列全体からなる部分代数となるときをいいます. $n = 2$ のときは, A が Borel 鋳型になることと階数 3 の鋳型であることは同値です.

Definition 2.10 Γ の R 上の n 次表現 ρ が Borel 鋳型表現とは, $R[\rho(\Gamma)]$ が Borel 鋳型になるときをいいます.

Theorem 2.11 Γ の n 次 Borel 鋳型表現の同値類を集めてきたものはスキームになります. すなわちモジュライが存在します.

III. 半単純鋳型表現

Definition 2.12 $A \in \mathrm{M}_2(R)$ が半単純鋳型であるとは, 階数 2 の鋳型であり, 各素イデアル $\wp \in \mathrm{Spec}R$ に対して, ある行列 $X \in A$ が存在して, $\mathrm{tr}(X)^2 - 4\det(X)$ が $R_\wp$ の元として可逆となるときをいいます. Γ の R 上の 2 次表現 ρ が半単純鋳型表現であるとは, $R[\rho(\Gamma)]$ が半単純鋳型であるときをいいます.

Remark 2.13 $X \in \mathrm{M}_2(R)$ に対して, $\mathrm{tr}(X)^2 - 4\det(X)$ は X の固有多項式の判別式です. R が体のとき, $\mathrm{tr}(X)^2 - 4\det(X) \neq 0$ であることと X がスカラー行列でない半単純行列であることは同値になります.

Theorem 2.14 Γ の半単純鋳型 2 次表現の同値類を集めてきたものは, スキームになります. したがってモジュライが存在します.

半単純鋳型表現のモジュライを構成する際に得られる副産物を紹介しましょう.

Theorem 2.15 R を局所環とします. ρ, ρ' を Γ の R 上の半単純鋳型 2 次表現とします. このとき, ρ と ρ' が同値であるための必要十分条件は, $\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) = \mathrm{tr}(\rho'(\gamma))$ 及び $\det(\rho(\gamma)) = \det(\rho'(\gamma))$ が各 $\gamma \in \Gamma$ に対して成り立つことです.

IV. 巾単鋳型表現

この鋳型だけは, 標数 2 のときがまだうまく処理できていないので不完全な報告しかできません. そのため IV では R は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の代数であると仮定します.

Definition 2.16 $A \in \mathrm{M}_2(R)$ が巾単鋳型であるとは, 階数 2 の鋳型であり, 各行列 $X \in A$ に対して, $\mathrm{tr}(X)^2 - 4\det(X) = 0$ が成り立つときをいいます. Γ の R 上の 2 次表現 ρ が巾単鋳型表現であるとは, $R[\rho(\Gamma)]$ が巾単鋳型であるときをいいます.

Theorem 2.17 Γ の巾単 2 次表現の同値類を集めてきたものはスキームになる. 但しモジュライは $\mathbb{Z}[1/2]$ 係数の多項式たちの零点として記述される. (巾単以外の鋳型の場合はモジュライは整数係数の多項式たちの零点として記述される.)

V. スカラー鋳型表現

一番簡単な場合です.

Definition 2.18 $A \in \mathrm{M}_2(R)$ がスカラー鋳型とは, 階数 1 の鋳型であるときをいう. Γ の R 上の 2 次表現 ρ がスカラー鋳型表現であるとは, $R[\rho(\Gamma)]$ がスカラー鋳型であるときをいいます.

スカラー鋳型表現の集合と 1 次元表現の集合は同一視できるので, スカラー鋳型表現のモジュライは存在します.

3 例: $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の 2 次絶対既約表現のモジュライ

抽象論に走りつづけるのもあまり面白くないので, 具体例を紹介します. ここでは $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の 2 次絶対既約表現のモジュライについて紹介しましょう.

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の元

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えると,

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^3, \alpha^4 = e \rangle = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

という表示を与えることがわかります. すると, 自由積 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ からの全射

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

があります. さらに全射 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ を考えましょう. このような群たちに対し, 2 次絶対既約表現のモジュライを $\mathrm{Ch}_2(-)_{air}$ という記号であらわすことにします. 簡単のため $\mathbb{Z}[1/6,\zeta_{12}]$ 上で考えることにします (ζ_{12} は 1 の原始 12 乗根). (本来は $\mathbb{Z}$ 上で考えるべきであろうが, いたずらに複雑になるだけなのでやめました.) このとき,

Theorem 3.1 $\mathrm{Ch}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})_{air}$ の既約成分はすべて 1 次元となり, 90 本のアファイン有理曲線となります. (90 本ある) 各既約成分は連結成分にもなっており, $\mathrm{Ch}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})_{air}$ は $\mathbb{Z}[1/6,\zeta_{12}]$ 上のスキームとして smooth になります.

$\mathrm{Ch}_2(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))_{air}$ は $\mathrm{Ch}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})_{air}$ の開かつ閉なる部分スキームであり, 90 本のうちの 24 本のアファイン有理曲線となります.

さらに $\mathrm{Ch}_2(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}))_{air}$ は $\mathrm{Ch}_2(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))_{air}$ の開かつ閉なる部分スキームであり, 24 本のうちの半分の 12 本のアファイン有理曲線となります.

全射準同型を通して, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ の 2 次絶対既約表現は, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の 2 次絶対既約表現を導き, $\mathrm{Ch}_2(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}))_{air}$ は $\mathrm{Ch}_2(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))_{air}$ の部分集合だと思えますし, 同様に $\mathrm{Ch}_2(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))_{air}$ は $\mathrm{Ch}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})_{air}$ の部分集合だと思えます. 上の定理は, すこし計算しないといけませんが, 容易に証明できます. 証明は演習問題としておきましょう.

Remark 3.2 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の標準的な 2 次絶対既約表現を ρ_{can} とします. すなわち包含写像 $\rho_{can} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/6,\zeta_{12}])$ のことです. ρ_{can} を含む $\mathrm{Ch}_2(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))_{air}$ の既約成分を Ch_{can} とすると,

$$\mathrm{Ch}_{can} \cong \{t : t^2 - 3 \neq 0\} \subseteq \mathbb{A}^1$$

となります. Ch_{can} をパラメーター空間として 2 次絶対既約表現としては

$$\mathrm{tr}(\sigma(\alpha)) = 0, \mathrm{tr}(\sigma(\beta)) = 1, \det(\sigma(\alpha)) = 1, \det(\sigma(\beta)) = 1, \mathrm{tr}(\sigma(\alpha\beta)) = t$$

となる族です. ρ_{can} は $t = -2$ の場合にあたります. 以上から, ρ_{can} は 1 次元分だけ変形し得ることがわかります.

上の定理から次の系を得ます.

Corollary 3.3 $\mathrm{Ch}_2(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))_{air}$ は $\mathbb{Z}[1/6]$ 上のスキームとして, smooth です. とくに, p を $2,3$ でない素数とすると, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の $\mathbb{F}_p$ 上の 2 次絶対既約表現は $\mathbb{Z}_p$ 上の絶対既約表現に持ち上がります. (すなわち, $\mathbb{Z}_p$ 上の絶対既約表現があって, reduction すると $\mathbb{F}_p$ 上の元の 2 次絶対既約表現が得られます.)

4 補足

本編では, 可換環上の表現しか取り扱ってこなかったが, この補足で一般のスキーム上の表現について言及しておく. 本編では述べなかった, モジュライの正確な意味についても言及する.

Definition 4.1 X をスキームとする. Γ を群もしくはモノイドとする. Γ の X 上の n 次表現とは, 群準同型 (もしくはモノイド準同型) $\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}_n(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ (もしくは $\rho : \Gamma \to \mathrm{M}_n(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$) のことをいう.

Definition 4.2 ρ, ρ' を群もしくはモノイド Γ のスキーム X 上の n 次表現とする. ρ, ρ' が同値である (もしくは $\rho \sim \rho'$) とは, ある $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 代数同型 $\sigma : \mathrm{M}_n(\Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \to \mathrm{M}_n(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ が存在して, $\sigma(\rho(\gamma)) = \rho'(\gamma)$ が各 $\gamma \in \Gamma$ に対して成り立つときをいう. ρ, ρ' が局所同値である (もしくは $\rho \sim_{loc} \rho'$) とは, ある開被覆 $X = \cup_{i \in I} U_i$ が存在して, 各 $i \in I$ に対して ρ_{U_i}, ρ'_{U_i} が同値であるときをいう.

Definition 4.3 X をスキームとする. $\mathcal{O}_X$ 代数の部分層 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_X)$ が次数 n の鋳型 (mold) とは, $\mathcal{A}$ が $\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_X)$ の subbundle となるときをいう. X 上の次数 n の mold $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が局所同値であるとは, 各点 $x \in X$ に対して近傍 $U_x \ni x$ と $P_x \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_x))$ が存在して, $P_x^{-1} \mathcal{A} \mid_{U_x} P_x = \mathcal{B} \mid_{U_x} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_X \mid_{U_x})$ が成り立つときをいう. 群もしくはモノイド Γ の X 上の n 次表現 ρ が鋳型 $\mathcal{A}$ をもつとは, $\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_X)$ の $\mathcal{O}_X$ 代数の部分層 $\mathcal{O}_X[\rho(\Gamma)]$ が $\mathcal{A}$ に一致するときをいう.

I. 絶対既約表現

Definition 4.4 ρ をスキーム X 上の Γ の n 次表現とする. ρ が絶対既約表現とは, $\mathcal{O}_X[\rho(\Gamma)] = \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_X)$ が成り立つときをいう.

Theorem 4.5 [$n=2$ のときは K. Saito[6], n が一般のときは [5]] スキームの圏から集合の圏への反変関手

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{EqAIR}_n(\Gamma) & : & (\mathbf{Sch}) & \to & (\mathbf{Sets}) \\ & & X & \mapsto & \{\rho: X \text{ 上の } \Gamma \text{ の } n \text{ 次絶対既約表現 }\}/\sim \end{array}$$

に関して粗モジュライ $\mathrm{Ch}_n(\Gamma)_{\mathrm{a.i.r.}}$ が存在する. すなわち, ある $\mathbb{Z}$ 上の分離的スキーム $\mathrm{Ch}_n(\Gamma)_{\mathrm{a.i.r.}}$ と自然変換 $\tau: \mathrm{EqAIR}_n(\Gamma) \to h_{\mathrm{Ch}_n(\Gamma)_{\mathrm{a.i.r.}}}$ が存在して, 次が成り立つ.

(i) 代数的閉体 Ω に対して, τ は同型 $\tau_\Omega : \mathrm{EqAIR}_n(\Gamma)(\Omega) \xrightarrow{\sim} h_{\mathrm{Ch}_n(\Gamma)_{\mathrm{a.i.r.}}}(\Omega)$ を導く.

(ii) 任意のスキーム Z に対して,

$$\tau : \mathrm{Hom}(\mathrm{EqAIR}_n(\Gamma), h_Z) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(h_{\mathrm{Ch}_n(\Gamma)_{\mathrm{a.i.r.}}}, h_Z)$$

は同型である.

ここで $h_Z(\cdot) = \mathrm{Hom}(\cdot, Z)$ とする. Γ が有限生成群のときは, 粗モジュライ $\mathrm{Ch}_n(\Gamma)_{\mathrm{a.i.r.}}$ は $\mathbb{Z}$ 上有限生成型となる.

Theorem 4.6 ρ, ρ' を X 上の Γ の n 次絶対既約表現とする. ρ と ρ' が同値であるための必要十分条件は, $\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) = \mathrm{tr}(\rho'(\gamma))$ が各 $\gamma \in \Gamma$ で成立することである.

II. Borel mold

Definition 4.7 $\mathcal{B}_n \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ を上半三角行列全体からなる $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ 上の鋳型とする. スキーム X 上の鋳型 $\mathcal{A}$ が Borel 鋳型 (Borel mold) であるとは, $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X$ が局所同値であるときをいう. X 上の表現 ρ が Borel 鋳型をもつとは, $\mathcal{O}_X[\rho(\Gamma)]$ が Borel 鋳型であるときをいう.

Theorem 4.8 [4] スキームの圏から集合の圏への反変関手

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{EqB}_n(\Gamma) & : & (\mathbf{Sch}) & \to & (\mathbf{Sets}) \\ & & X & \mapsto & \{\rho: X \text{ 上の } \Gamma \text{ の } n \text{ 次 Borel 鋳型表現 }\}/\sim \end{array}$$

(正確には Zariski 位相に関して層化した関手) は $\mathbb{Z}$ 上の分離的スキーム $\mathrm{Ch}_n(\Gamma)_B$ によって表現可能である. Γ が有限生成群のとき, $\mathrm{Ch}_n(\Gamma)_B$ は $\mathbb{Z}$ 上有限生成型となる.

III. semi-simple mold

Definition 4.9 スキーム X 上の次数 2 の鋳型 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathcal{O}_X)$ が半単純鋳型 (semi-simple mold) であるとは, $\mathcal{A}$ が $\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_X)$ の階数 2 の subbundle であり, 各点 $x \in X$ においてある $P_x \in \mathcal{A}_x$ が存在して, $\mathrm{tr}(P_x)^2 - 4\det(P_x)$ が $\mathcal{O}_{X,x}$ の元として可逆であるときをいう.

スキーム X 上の 2 次表現 ρ が半単純鋳型 (semi-simple mold) をもつとは, $\mathcal{O}_X[\rho(\Gamma)]$ が半単純鋳型であるときをいう.

Theorem 4.10 [3] スキームの圏から集合の圏への反変関手

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{EqSS}_2(\Gamma) & : & (\mathbf{Sch}) & \to & (\mathbf{Sets}) \\ & & X & \mapsto & \{\rho : X \text{ 上の } \Gamma \text{ の 2 次半単純鋳型表現 }\}/\sim \end{array}$$

(正確には Zariski 位相に関して層化した関手) は $\mathbb{Z}$ 上の分離的スキーム $\mathrm{Ch}_2(\Gamma)_{ss}$ によって表現可能である. 特に Γ が有限生成群のとき, $\mathrm{Ch}_2(\Gamma)_{ss}$ は, $\mathbb{Z}$ 上有限生成型となる.

Theorem 4.11 ρ, ρ' を X 上の Γ の 2 次半単純鋳型表現とする. ρ と ρ' が局所同値であるための必要十分条件は, $\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) = \mathrm{tr}(\rho'(\gamma))$ 及び $\det(\rho(\gamma)) = \det(\rho'(\gamma))$ が各 $\gamma \in \Gamma$ で成立することである.

IV. unipotent mold

現段階で標数 2 の場合については攻略中なので, この IV だけ X を $\mathbb{Z}[1/2]$ 上のスキームとする.

Definition 4.12 $\mathbb{Z}[1/2]$ 上のスキーム X 上の鋳型 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathcal{O}_X)$ が巾単鋳型 (unipotent mold) であるとは, $\mathcal{A}$ が $\mathrm{M}_2(\mathcal{O}_X)$ の階数 2 の subbundle であり, 各開集合 U 上の任意の切断 $s \in \mathcal{A}(U)$ について $\mathrm{tr}(s)^2 - 4\det(s) = 0$ が成立するときをいう.

X 上の 2 次表現 ρ が巾単鋳型をもつとは, $\mathcal{O}_X[\rho(\Gamma)]$ が巾単鋳型であるときをいう.

Theorem 4.13 [3] $\mathbb{Z}[1/2]$ 上のスキームの圏から集合の圏への反変関手

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{EqU}_2(\Gamma) & : & (\mathbf{Sch}/\mathbb{Z}[1/2]) & \to & (\mathbf{Sets}) \\ & & X & \mapsto & \{\rho : X \text{ 上の } \Gamma \text{ の 2 次巾単鋳型表現 }\}/\sim \end{array}$$

(正確には Zariski 位相に関して層化した関手) は $\mathbb{Z}[1/2]$ 上の分離的スキーム $\mathrm{Ch}_2(\Gamma)_u$ によって表現可能である. 特に Γ が有限生成群のとき, $\mathrm{Ch}_2(\Gamma)_u$ は, $\mathbb{Z}[1/2]$ 上有限生成型となる.

V. scalar mold

Definition 4.14 スキーム X 上の鋳型 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_X)$ がスカラー鋳型 (scalar mold) であるとは, $\mathcal{A}$ が $\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_X)$ の階数 1 の subbunlde であるときをいう. X 上の表現 ρ がスカラー鋳型をもつとは, $\mathcal{O}_X[\rho(\Gamma)]$ がスカラー鋳型であるときをいう.

スカラー鋳型のモジュライは, 1 次元表現のモジュライに他ならない.

参考文献

[1] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 14, Springer-Verlag, 1972.

[2] K. Nakamoto, T. Torii, *Topology of the moduli of representations with Borel mold*, in preparation.

[3] K. Nakamoto, *The moduli of representations of degree* 2, in preparation.

[4] ———, *The moduli of representations with Borel mold*, in preparation.

[5] ———, *Representation varieties and character varieties*, Publications of RIMS **36** (2000), no. 2, 159–189.

[6] K. Saito, *Representation Varieties of a Finitely Generated Group into SL_2 or GL_2*, Preprint RIMS-958, December 1993.