

## 可解り一群の表現論

近畿大学九州工学部

藤 原 英 徳

1950年代初頭の Mackey 理論をうけて、Dixmier が巾零り一群のユニタリ表現に関する一連の仕事を始めたのは50年代後半であった。その視点は指標を中心に据えた解析的なものであり、Pukanzsky, Duflo, Pedersen 等に受け継がれていく。他方60年代初頭 Kirillov は Dixmier が得た一連の結果を Mackey 理論の視点からより代数的・幾何的に解釈し、画期的な軌道の方法の着想を得た。62年に発表された Kirillov の論文は大きな反響を呼び、Auslander-Kostant による I 型可解り一群のユニタリ双対の決定、Pukanzsky による非 I 型可解り一群に対する軌道の方法の拡張等が得られた70年代前半多くの人々が可解り一群の表現論を研究していた。

その後も今に至るまで可解り一群のユニタリ表現の研究は軌道の方法により行われている。その歩みは既約表現の構成から始まり、双対位相の決定、繫絡作用素の構成、単項表現の研究またそれと双対的に既約表現の部分群への制限の研究へと進んでいる。

ただ残念ながら一般的な可解り一環は半単純一環と比べて代数的構造が決定的に不足している。また例えばその包絡環の中心も、有益な元を含むにはしばしばあまりに小さい。可解り一群に対しては、対称空間のようなある構造をもった幾何学的対象物の変換群という視点も、コンパクト部分群を利用しようという目論見も成立しないのが普通である。

唯一有効な証明法は数学的帰納法であり、せっかく証明しえた定理もその意味するところをいま一つ有機的に把握しづらい感覚が残ることは否めない。現在世界的にこの分野の研究者が多くないのは、恐らくこの辺りに理由があるのであろう。ことに Corwin, Pedersen の早すぎる逝去はこの分野にとって計り知れない損失である。

無論逆説的に言えば、この分野の最先端で活躍するにあたって、膨大な予備知識を必要としないであろうし、帰納法の内側に押し込められた事実の仕組をかいま見る時の喜びは何物にもかえがたい。約半世紀にわたる歩みの過程で、指数型可解り一群、とりわけ巾零り一群のユニタリ表現に関しては多くの知見が蓄積されており、さらなる展望を切り開くべき若い研究者の登場が待望されている。筆者の稚拙な筆がこの分野の面白さを若い人にどれだけ伝えうるかはなはだ疑問であるが、巾零り一群の単項表現を中心にこの分野の現状を概説してみたい。以下に述べる諸結果の証明は殆どの場合群の次元に関する帰納法によるが、詳細は参考文献に譲りたい。

## § 1. 指数型可解リー群

$\mathfrak{g}$  を  $n$  次元実可解リー環とし、その複素化  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  のイデアル列

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}, \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_j = j \ (0 \leq j \leq n)$$

を考える。このとき各  $\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ) 上への  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の随伴表現に応じて  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  上の線形形式  $\lambda_j$  が生じる。

定義 1.  $\lambda_j$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ) を  $\mathfrak{g}$  に制限したものを  $\mathfrak{g}$  のルートと呼び、 $\mathfrak{g}$  が零でない純虚数値をとるルートをもたないとき、 $\mathfrak{g}$  は指数型であるという。

基底の間の零でない括弧積を表示することにより、指数型でない典型的な可解リー環を二つあげておく。

例 1. 平面の運動群のリー環:  $\mathfrak{g}_3 = \langle T, P, Q \rangle_{\mathbb{R}}; [T, P] = -Q, [T, Q] = P$ 。

例 2. Diamond algebra:  $\mathfrak{g}_4 = \langle T, P, Q, Z \rangle_{\mathbb{R}}; [T, P] = -Q, [T, Q] = P, [P, Q] = Z$ 。

定義 2.  $G$  を連結、単連結な (有限次元実) 可解リー群、 $\mathfrak{g}$  をそのリー環とする。指数写像  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  が全射であるとき、 $G$  は指数型であるという。

定理 1.1. (Dixmier [13], Saito [42])  $G$  を連結、単連結な可解リー群、 $\mathfrak{g}$  をそのリー環とすると、次の (1) ~ (6) は同値である。

- (1)  $G$  は指数型である。
- (2) 指数写像  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  は単射である。
- (3) 指数写像  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  は微分同相写像である。
- (4)  $\mathfrak{g}$  は指数型である。
- (5)  $\mathfrak{g}$  の任意のルートは、 $\lambda$  を  $\mathfrak{g}$  上の実線形形式として、 $X \mapsto \lambda(X)(1 + i\alpha)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) の形である。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ 。
- (6)  $\mathfrak{g}$  は上記の例における  $\mathfrak{g}_3$  または  $\mathfrak{g}_4$  に同型な部分リー環を含まない。

この定理より、指数型可解リー群の連結部分群および正規連結部分群による商リー群はやはり指数型である。以下において我々は指数型可解リー群のみを扱うことにしよう。まず基本的な誘導表現の構成を復習しておく。

$G$  を指数型可解リー群、 $H$  をその連結部分群とし、 $G$  のモジュラー関数を  $\Delta_G$  で表し、 $H$  上  $\Delta_{H,G} = \Delta_H / \Delta_G$  とおく。 $G$  上の連続関数  $\psi: G \rightarrow \mathbb{C}$  で関係式

$$\psi(gh) = \Delta_{H,G}(h)\psi(g) \ (g \in G, h \in H)$$

を満たし、mod  $H$  でコンパクトな台をもつものからなる空間上には  $G$ -不変な正値線形形式  $v_{G,H}$  が定数倍を除いて一意的に存在する。記法

$$v_{G,H}(\psi) = \oint_{G/H} \psi(g) dv_{G,H}(g)$$

を用いよう。

さて  $H$  のユニタリ表現  $\rho$  が与えられたとき、 $\rho$  のヒルベルト空間  $\mathcal{H}_\rho$  に値をとる  $G$  上の連続関数  $F$  で関係式

$$F(gh) = \Delta_{H,G}^{1/2}(h) \rho(h)^{-1}(F(g)) \quad (g \in G, h \in H)$$

を満たし、mod  $H$  でコンパクトな台をもつものからなる空間をノルム

$$\|F\| = \left( v_{G,H}(\|F\|^2) \right)^{1/2} = \left( \oint_{G/H} \|F(g)\|^2 dv_{G,H}(g) \right)^{1/2}$$

により完備化して得られるヒルベルト空間を考える。この空間には  $G$  が左移動で作用し、 $v_{G,H}$  の  $G$ -不変性より  $G$  のユニタリ表現が得られる。これを  $\rho$  からの誘導表現と呼び、 $\text{ind}_G^H \rho$  で表す。1次元ユニタリ指標からの誘導表現を特に単項表現と呼ぶ。

## § 2. 軌道の方法

この節では、Kirillov [27] の創始による軌道の方法を、リー環  $\mathfrak{g}$  をもつ指数型可解リー群  $G = \exp \mathfrak{g}$  に対して解説する。 $G$  の既約ユニタリ表現の同値類の集合を  $\hat{G}$  で表し、 $G$  のユニタリ双対と呼ぶ。以下において、 $\hat{G}$  の元はそれを代表する  $G$  の既約ユニタリ表現としばしば同一視される。 $\mathfrak{g}$  の双対ベクトル空間を  $\mathfrak{g}^*$  で表す。 $G$  はそのリー環  $\mathfrak{g}$  に随伴表現で作用し、その反傾表現（余随伴表現）により  $\mathfrak{g}^*$  に作用する。つまり、 $g \in G, \ell \in \mathfrak{g}^*$  に対し  $(g \cdot \ell)(X) = \ell(g^{-1} \cdot X) \quad (\forall X \in \mathfrak{g})$  である。軌道の方法は  $\hat{G}$  を  $G$  の余随伴軌道の空間  $\mathfrak{g}^*/G$  により実現するものである。

$\ell \in \mathfrak{g}^*$  に対し、 $\mathfrak{g}$  上の交代双一次形式  $B_\ell$  を  $B_\ell(X, Y) = \ell([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$  で定義する。 $\mathfrak{g}$  の任意の部分ベクトル空間  $\mathfrak{a}$  に対し、 $\mathfrak{a}' = \{X \in \mathfrak{g} : B_\ell(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{a}\}$  とおき、 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'$  となるとき、 $\mathfrak{a}$  を  $\ell$  における等方的部分空間と呼ぶ。このとき、 $\mathfrak{a}$  が  $\ell$  における極大等方的部分空間  $\Leftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'$  かつ  $2 \dim \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}'$ 。

定義 3.  $\mathfrak{g}$  の部分リー環  $\mathfrak{h}$  が  $\ell \in \mathfrak{g}^*$  における極大等方的部分空間であるとき、 $\mathfrak{h}$  を  $\ell$  における  $\mathfrak{g}$  の実 polarization と呼ぶ。 $\mathfrak{g}$  の部分リー環で、 $\ell \in \mathfrak{g}^*$  における等方的部分空間となっているものの集合を  $S(\ell, \mathfrak{g})$  で、 $\ell$  における  $\mathfrak{g}$  の実 polarization の集合を  $M(\ell, \mathfrak{g})$  で表す。

$\mathfrak{h} \in S(\ell, \mathfrak{g})$  に対し、 $\chi_\ell(\exp X) = e^{f(X)} \quad (X \in \mathfrak{h})$  は  $G$  の連結閉部分群  $H = \exp \mathfrak{h}$  のユニタリ指標を与え、 $G$  の単項表現  $\rho(\ell, \mathfrak{h}, G) = \text{ind}_H^G \chi_\ell$  が構成される。 $\rho(\ell, \mathfrak{h}, G)$  が既約となるような  $\mathfrak{h} \in S(\ell, \mathfrak{g})$  の集合を  $I(\ell, \mathfrak{g})$  で表す。 $I(\ell, \mathfrak{g})$  の元を特徴づける Pukanszky

条件を述べよう。

**命題 2.1.** (Pukanszky [40])  $\ell \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{h} \in S(\ell, \mathfrak{g})$  とし、 $H = \exp \mathfrak{h}$  とする。このとき次の (1) ~ (3) は同値である。

- (1)  $H \cdot \ell = \ell + \mathfrak{h}^\perp$ 、ただし  $\mathfrak{h}^\perp = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* : \lambda|_{\mathfrak{h}} = 0\}$ 。
- (2)  $\mathfrak{h} \in M(\ell, \mathfrak{g})$  かつ  $\ell + \mathfrak{h}^\perp \subset G \cdot \ell$ 。
- (3) 任意の  $\lambda \in \mathfrak{h}^\perp$  に対し、 $\mathfrak{h} \in M(\ell + \lambda, \mathfrak{g})$ 。

註 1.  $G$  が巾零ならば、 $M(\ell, \mathfrak{g})$  の任意の元は Pukanszky 条件を満たす。

**定理 2.1.** (Bernat [6], Pukanszky [40], Takenouchi [43])  $\ell \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{h} \in S(\ell, \mathfrak{g})$  とする。

- (1)  $I(\ell, \mathfrak{g}) \neq \emptyset$ 。
- (2)  $\mathfrak{h} \in I(\ell, \mathfrak{g}) \Leftrightarrow \mathfrak{h}$  が Pukanszky 条件を満たす。
- (3)  $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(\ell, \mathfrak{g})$  ならば  $\rho(\ell, \mathfrak{h}_1, G) \cong \rho(\ell, \mathfrak{h}_2, G)$  (ユニタリ同値)。
- (4) (1)、(3) より写像  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_G : \mathfrak{g}^* \rightarrow \hat{G}$  が定義され、 $\hat{\rho}$  は全射である。
- (5)  $\ell_1, \ell_2 \in \mathfrak{g}^*$  に対し、 $\hat{\rho}(\ell_1) = \hat{\rho}(\ell_2) \Leftrightarrow G \cdot \ell_1 = G \cdot \ell_2$ 。したがって全単射 (Kirillov 写像)  $\theta_G : \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$  を得る。

今軌道空間  $\mathfrak{g}^*/G$  に商位相を入れ、ユニタリ双対  $\hat{G}$  には行列要素のコンパクト一様収束で与えられる Fell 位相を入れる。

**定理 2.2.** (Ludwig [28])  $\theta_G : \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$  は同相写像である。

### § 3. 誘導と制限

Frobenius の相互律にも見られるように、表現の誘導と制限の間には強い双対性が存在している。この節では表現の既約分解についてその辺りの状況を眺めてみよう。指数型可解リー群  $G = \exp \mathfrak{g}$  の連結閉部分群  $H = \exp \mathfrak{h}$  のユニタリ指標  $\chi$  から誘導された単項表現  $\tau = \text{ind}_H^G \chi$  の既約分解を考える。まず  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$  となる  $f \in \mathfrak{g}^*$  が存在し  $\chi = \chi_f$  となる。このとき Pukanszky 条件からもわかるとおり、軌道の方法を用いて  $\tau$  の既約分解を記述するならば、 $\mathfrak{g}^*$  におけるアフィン空間  $\Gamma_f = f + \mathfrak{h}^\perp$  と交わる  $G$ -軌道およびそこに含まれる  $H$ -軌道が問題となる。 $\Gamma_f$  においてルベーク測度に同値な有限測度  $\tilde{\mu}$  をとり、それを  $\mathfrak{g}^*$  上の測度とみなそう。Kirillov 写像によるその像を  $\mu = (\hat{\rho}_G)_*(\tilde{\mu})$  とおく。最後に、 $\pi \in \hat{G}$  に対し対応する余随伴軌道を  $\Omega(\pi)$  で表し、つまり  $\Omega(\pi) = (\hat{\rho}_G)^{-1}(\pi)$ 、 $\Gamma_f \cap \Omega(\pi)$  に含まれる  $H$ -軌道の個数を  $m(\pi)$  で表す。このとき  $\hat{G}$  上の測度  $\mu$  と関数  $m(\pi)$  が単項表現  $\tau$  の既約分解を与える。

定理 3.1. (cf. [18])  $\tau \cong \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\mu(\pi)$ .

次に表現の部分群への制限を既約分解するため、 $K = \exp \mathfrak{k}$  を  $G$  の任意の連結閉部分群とする。 $\pi \in \hat{G}$  の余随伴軌道  $\Omega(\pi)$  上には  $G$ -不変測度が存在することが容易に解るが、それに同値な有限測度  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{\pi}$  を  $\Omega(\pi)$  上で考え、これを  $\mathfrak{g}^*$  上の測度とみなそう。 $p: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{k}^*$  を制限写像とし  $\gamma = (\hat{\rho}_K \circ p)_*(\tilde{\gamma})$  とおく。さらに  $\sigma \in \hat{K}$  の余随伴軌道  $\omega(\sigma) = (\hat{\rho}_K)^{-1}(\sigma) \subset \mathfrak{k}^*$  を考え、 $\Omega(\pi) \cap p^{-1}(\omega(\sigma))$  に含まれる  $K$ -軌道の個数を  $n_{\pi}(\sigma)$  で表す。このとき  $\hat{K}$  上の測度  $\gamma$  と関数  $n_{\pi}(\sigma)$  が  $\pi \in \hat{G}$  の  $K$  への制限  $\pi|_K$  の既約分解を与える。

定理 3.2. (cf. [19])  $\pi|_K \cong \int_{\hat{K}}^{\oplus} n_{\pi}(\sigma) d\gamma(\sigma)$ .

応用として表現のテンソル積の既約分解を記しておく。 $\pi_j$  ( $j=1, 2$ ) を  $G$  の 2 つの既約表現とする。それらの外部クロネッカー積  $\pi_1 \times \pi_2$  は直積  $G \times G$  の既約表現で対応する余随伴軌道は  $(\Omega(\pi_1), \Omega(\pi_2)) \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$  である。群  $G$  を  $G \times G$  の対角成分からなる部分群と同一視し、 $\pi_1 \times \pi_2$  をそこに制限すれば  $\pi_1$  と  $\pi_2$  のテンソル積  $\pi_1 \otimes \pi_2$  を得る。

系 1.  $p: \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  を制限写像とする。 $\gamma = (\hat{\rho}_G \circ p)_*(\tilde{\gamma}_{\pi_1 \times \pi_2})$  とおき、 $\pi \in \hat{G}$  に対し  $(\Omega(\pi_1), \Omega(\pi_2)) \cap p^{-1}(\Omega(\pi))$  に含まれる  $G$ -軌道の個数を  $m(\pi)$  で表す。すると

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \cong \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\gamma(\pi).$$

定理 3.1 を少し一般化して、 $\sigma \in \hat{K}$  からの誘導表現  $\text{ind}_K^G \sigma$  を分解しよう。 $\mathfrak{g}^*$  の部分多様体  $p^{-1}(\omega(\sigma))$  には  $\omega(\sigma)$  の  $K$ -不変測度と  $\mathfrak{k}^{\perp}$  のルベーク測度から決まる測度  $\hat{\mu}$  がある。 $\hat{\mu}$  に同値な  $\mathfrak{g}^*$  上の有限測度  $\tilde{\mu}$  をとり、 $\mu = (\hat{\rho}_G)_*(\tilde{\mu})$  とおく。このとき  $\hat{G}$  上の測度  $\mu$  と定理 3.2 において定義された関数  $\hat{G} \ni \pi \mapsto n_{\pi}(\sigma)$  が誘導表現  $\text{ind}_H^G \sigma$  の既約分解を与える。

定理 3.3. (cf. [19])  $\text{ind}_H^G \sigma \cong \int_{\hat{G}}^{\oplus} n_{\pi}(\sigma) \pi d\mu(\pi)$ .

定理 3.2 と 定理 3.3 より、次を確認することができる。

系 2. 上述した状況において Frobenius の相互律が成り立つ。

以下  $G = \exp \mathfrak{g}$  は巾零リ一群とし、定理 3.1 の単項表現  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$  の周辺に話題

を限ることにしよう。

#### § 4. プランシュレル公式

$G$  のユニタリ表現  $\pi$  に対し、そのヒルベルト空間（常に可算性を仮定）を  $\mathcal{H}_\pi$  で表す。関数  $G \ni g \mapsto \pi(g)v \in \mathcal{H}_\pi$  が  $C^\infty$  となるとき、 $v \in \mathcal{H}_\pi$  は  $\pi$  の  $C^\infty$ -ベクトルと呼ばれる。その全体を  $\mathcal{H}_\pi^\infty$  で表すと、 $\mathcal{H}_\pi^\infty$  は  $\mathcal{H}_\pi$  の稠密な部分空間であり、その上に  $\mathfrak{g}$  の表現  $d\pi$  が指数写像を利用して得られる：

$$d\pi(X)v = \frac{d}{dt} \pi(\exp(tX))v \Big|_{t=0} \quad (X \in \mathfrak{g}, v \in \mathcal{H}_\pi^\infty).$$

$\pi$  の微分表現  $d\pi$  は  $\mathfrak{g}$  の複素包絡環  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の表現に一意的に拡張され、 $\{X_j\}_{1 \leq j \leq n}$  を  $\mathfrak{g}$  の基底とすると、半ノルムの族

$$\|d\pi(X^\alpha)v\| = \|d\pi(X_1)^{\alpha_1} \cdots d\pi(X_n)^{\alpha_n}v\| \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$$

により、 $\mathcal{H}_\pi^\infty$  はフレシェ空間となる。 $\mathcal{H}_\pi^\infty$  の反双対空間を  $\mathcal{H}_\pi^{\infty*}$  と記し、その元を  $\pi$  の一般ベクトルと呼ぶことにする。 $\mathcal{H}_\pi^{\infty*}$  は  $\mathcal{H}_\pi^\infty$  の反双対空間と同一視され、 $\langle a, b \rangle$  で  $a \in \mathcal{H}_\pi^{\infty*}$  の  $b \in \mathcal{H}_\pi^\infty$  における値を表す。 $G$  や  $\mathfrak{g}$  の作用は双対性により  $\mathcal{H}_\pi^{\infty*}$  に拡張されるが、 $G$  上コンパクトな台をもつ  $C^\infty$ -関数の空間を  $\mathcal{D}(G)$  で表すとき、任意の  $\phi \in \mathcal{D}(G)$  に対し  $\pi(\phi)\mathcal{H}_\pi^{\infty*} \subset \mathcal{H}_\pi^{\infty*}$  が成り立つ。ただし、 $\pi(\phi)$  は  $G$  の左ハール測度  $dg$  を用いて

$$\pi(\phi) = \int_G \phi(g)\pi(g)dg$$

により定義される作用素である。詳しくは [7]、[8]、[38] を参照されたい。

さて巾零リー群  $G = \exp \mathfrak{g}$  の既約ユニタリ表現  $\pi$  を考える。定理 2.1 よりある  $\ell \in \mathfrak{g}^*$  とその点における  $\mathfrak{g}$  の実 polarization  $\mathfrak{b}$  が存在し、 $\pi$  は単項表現  $\rho(\ell, \mathfrak{b}, G)$  として実現される。容易に分かるように  $\mathfrak{g}$  には

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{f}_0 \subset \mathfrak{f}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{f}_d = \mathfrak{g}, \quad \dim \mathfrak{f}_{j+1}/\mathfrak{f}_j = 1 \quad (0 \leq j \leq d-1)$$

となる部分リー環の列が存在し、ベクトル  $\tilde{X}_j \in \mathfrak{f}_{j+1} \setminus \mathfrak{f}_j$  ( $0 \leq j \leq d-1$ ) を抜き出して写像

$$\Phi: \mathbb{R}^d \times B \ni (t, b) \mapsto \left( \prod_{j=d}^1 \exp(t_j X_j) \right) b \in G, \quad t = (t_1, \dots, t_d), \quad B = \exp \mathfrak{b}$$

を作ると  $\Phi$  は微分同相写像となる。この  $\Phi$  により等質空間  $G/H$  は  $\mathbb{R}^d$  と同一視され、既約表現  $\pi$  は  $L^2(\mathbb{R}^d)$  に実現されることとなる。次の事実は巾零リー群の表現論にとって基本的である。

**定理 4.1.** (cf. [11]) 上記の状況において  $\mathcal{H}_\pi^\infty$  は急減少関数の空間  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  と一致し、 $d\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$  は  $\mathbb{R}^d$  上の多項式係数の線形微分作用素の全体と一致する。

この定理の状況で  $\pi$  の一般ベクトルは  $\mathbb{R}^d$  上の緩い超関数に他ならない。 $G$  の閉

部分群  $K$  とその指標  $\chi: K \rightarrow \mathbb{C}^*$  に対し

$$(\mathcal{H}_\pi^\infty)^{K, \chi} = \{a \in \mathcal{H}_\pi^\infty : \pi(k)a = \chi(k)a, \forall k \in K\}$$

とおく。

さて単項表現  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$  に関し、 $G$  の単位元  $e$  におけるディラック測度

$$\delta_\tau: \mathcal{H}_\tau^\infty \ni \psi \rightarrow \overline{\psi(e)} \in \mathbb{C}$$

を考えると、 $\delta_\tau \in (\mathcal{H}_\tau^\infty)^{H, \chi_f}$ 。簡単のため、 $\tau$  の既約分解 (定理 3.1) における重複度  $m(\pi)$  は至る所有限であるとしよう。Penney [37] によれば  $\tau$  の既約分解に応じて一般ベクトル  $\delta_\tau$  も分解される：

$$\delta_\tau = \int_{\hat{G}}^\oplus \sum_{k=1}^{m(\pi)} a_\pi^k d\mu(\pi), \quad (4-1)$$

ここで  $a_\pi^k \in (\mathcal{H}_\pi^\infty)^{H, \chi_f}$  ( $1 \leq k \leq m(\pi)$ )。  $H$  上の左ハール測度  $dh$  を用いて、任意の  $\phi \in \mathcal{D}(G)$  に対し

$$\phi_H^f(g) = \int_H \phi(gh) \chi_f(h) dh \quad (g \in G)$$

とおくと  $\phi_H^f \in \mathcal{H}_\tau^\infty$ 。  $\tau(\phi)$  の定義に用いる  $G$  上の左ハール測度  $dg$ 、  $\mathcal{H}_\tau$  にノルムを与える  $v_{G,H}$  を  $v_{G,H} = dg/dh$  が成り立つように調整しておく、任意の  $\phi \in \mathcal{D}(G)$  に対し

$$\phi_H^f(e) = \langle \tau(\phi) \delta_\tau, \delta_\tau \rangle$$

が成立し、(4-1) より

$$\phi_H^f(e) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\mu(\pi) \quad (4-2)$$

単項表現  $\tau$  に対するプランシュレル公式と呼ばれる公式 (4-1) または (4-2) に現われる一般ベクトル  $a_\pi^k$  の具体的な形を知るために、 $\pi \in \hat{G}$  を任意に固定した  $\ell \in \Omega(\pi)$  における実 polarisation  $\mathbf{b} \in M(\ell, \mathfrak{g})$  を用いて  $\rho(\ell, \mathbf{b}, G)$  として実現する。定理 3.1 より  $\Gamma_\tau \cap \Omega(\pi)$  に含まれる  $H$ -軌道を  $C_1, \dots, C_{m(\pi)}$  とし、 $1 \leq k \leq m(\pi)$  に対し  $g_k \cdot \ell \in C_k$  なる  $g_k \in G$  をとる。

**定理 4.2.** (cf. [17]) 等質空間  $H/H \cap g_k B g_k^{-1}$  上の不変測度を  $d_k h$  とし、

$$a_\pi^k: \mathcal{H}_\pi^\infty \ni \psi \rightarrow \int_{H/H \cap g_k B g_k^{-1}} \overline{\psi(hg_k)} \chi_f(h) d_k h \quad (1 \leq k \leq m(\pi))$$

とおくと  $(\mathcal{H}_\pi^\infty)^{H, \chi_f}$  に属する  $m(\pi)$  個の一次独立な一般ベクトルが得られ、これらを適当に正規化したものは公式 (4-2) を満たす。

註 2. 単項表現  $\tau$  の分解 (定理 3.1) における重複度  $m(\pi)$  については、一様には有界であるかまたは一様に  $\infty$  である。後者の場合のプランシュレル公式については、公式 (4-1) における和を作用素のトレースで置き換える方法 (cf. [20], [33]) と、一般ベクトルの形は変えないで和を積分で置き換える方法 (cf. [3]) が知られている。また Lipsman の一連の仕事等、非巾零群に対する考察も行われているが、一般ベク

トルの記述に現われる積分の収束を示すのが難しい (cf. [12], [23], [30])。

## § 5. 不変微分作用素

$H$  のユニタリ指標  $\chi_f$  に付随した  $G/H$  上の直線束  $\Xi$  を考え、 $\Xi$  上の  $G$ -不変微分作用素環  $D_\tau(G/H)$  を調べよう。 $\mathfrak{h}$  の基底  $\{Y_j\}_{1 \leq j \leq d}$  ( $d = \dim \mathfrak{h}$ ) を一組固定し、複素包絡環  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の部分ベクトル空間

$$\mathfrak{a}_\tau = \sum_{j=1}^d \mathbb{C}(Y_j + i\tau(Y_j))$$

により生成される  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の左イデアルを  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$  で表す。今

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) = \{A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) : [A, Y] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$$

とおけば、 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の元を  $G$  上の左不変微分作用素とみなすとき、 $D_\tau(G/H)$  は多元環として  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$  に同型である。 $D_\tau(G/H)$  の本格的な研究は Corwin-Greenleaf [10] に始まる。

**定理 5.1.** (cf. [10])  $\tau$  がその分解 (定理 3.1) において有限重複度をもつならば、多元環  $D_\tau(G/H)$  は可換である。

**予想 1.** (可換性予想)  $\tau$  が有限重複度をもつ  $\Leftrightarrow D_\tau(G/H)$  が可換。

**予想 2.** (多項式予想)  $\tau$  が有限重複度をもつならば、 $D_\tau(G/H)$  は  $\Gamma_\tau$  上の  $H$ -不変な多項式の作る多元環  $\mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$  と同型である。

**註 3.** 予想 1 は以前 Duflo [16] により、普遍的な枠組で問いかけられた問題の巾着な場合に他ならない。

以下において Corwin-Greenleaf [10] によるこの 2 つの予想を扱う。まずこの節では  $\tau$  が有限重複度をもつと仮定し、 $\tau$  に対するプランシュレル公式を用いて多項式予想を調べてみよう。 $\phi \in \mathcal{Q}(G)$  に対し、公式 (4.2) より

$$\phi_H^f(g) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi_g) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\mu(\pi) \quad (\forall g \in G),$$

ただし  $\phi_g$  は  $\phi_g(x) = \phi(gx)$  ( $\forall x \in G$ ) で与えられる  $\mathcal{Q}(G)$  の元である。この左辺に  $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  を右から作用させると簡単な計算により

$$(X\phi_H^f)(g) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi) a_\pi^k, d\pi(\bar{X}) a_\pi^k \rangle d\mu(\pi). \quad (5-1)$$

**定理 5.2.** (cf. [22]) 測度  $\mu$  に関し  $\hat{G}$  上ほとんど至る所  $a_\pi^k$  ( $1 \leq k \leq m(\pi)$ ) は  $\overline{\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)}$  の同時固有超関数である。

この結果を用いて、任意の  $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$  に対し、 $\Gamma_\tau$  上至る所定義された関数  $P_X$  を以下のようにして構成できる： $\ell \in \Gamma_\tau$  が  $\Omega(\pi)$  に含まれる  $H$ -軌道  $C_k$  に属するとき、

$$d\pi(\bar{X})a_\pi^k = \overline{P_X(\ell)}a_\pi^k。$$

明らかに関数  $P_X$  は  $H$ -不変であり、さらに  $\Gamma_\tau$  上の有理関数に拡張されることが解る。 $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$  ならば  $P_X \equiv 0$  であり、公式 (5-1) より準同型写像

$$D_\tau(G/H) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) / \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau \ni [X] \mapsto P_X$$

は単射である。したがって予想 2 を確かめるには、

(1) 関数  $P_X$  は  $\Gamma_\tau$  上の多項式関数に拡張される；

(2) (1) の下で準同型写像  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) / \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau \ni [X] \mapsto P_X \in C[\Gamma_\tau]^H$  は全射である；

の 2 点を示せばよい。この方針に沿って幾つかの特別な場合に予想 2 は成立することが確かめられている (cf. [4], [21])。

一般的な形で関数  $P_X$  の計算式を得ることは可能であろうか？ いずれにしても予想 2 の妥当性は筆者にとっていまだに霧の中である。

## § 6. 可換性予想の証明

この節では最近筆者が思いついた予想 1 の 1 つの証明方法について概説する。前半は Baklouti 氏との、後半は Lion、Magneron、Mehdi 諸氏との共同研究である。 $\mathfrak{g}$  の組成列

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

を固定し、 $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i \neq \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{i-1}$  となる添数  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) の集合を  $\mathcal{I} = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_d\}$  ( $d = \dim \mathfrak{h}$ ) とし、 $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \mathcal{I} = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_p\}$  ( $p = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ) とおく。このとき、 $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{f}_r = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{j_r}$  ( $1 \leq r \leq p$ ) により  $\mathfrak{g}$  の部分リ-環の列

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{f}_0 \subset \mathfrak{f}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{f}_{p-1} \subset \mathfrak{f}_p = \mathfrak{g} \quad (\dim \mathfrak{f}_r / \mathfrak{f}_{r-1} = 1)$$

が得られ、他方  $\mathfrak{h}_0 = \{0\}$ ,  $\mathfrak{h}_s = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{i_s}$  ( $1 \leq s \leq d$ ) とおいて  $\mathfrak{h}$  のイデアル列

$$\{0\} = \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{h}_{d-1} \subset \mathfrak{h}_d = \mathfrak{h} \quad (\dim \mathfrak{h}_s = s)$$

が得られる。 $Y_s \in \mathfrak{h}_s \setminus \mathfrak{h}_{s-1}$  ( $1 \leq s \leq d$ ) と  $X_r \in \mathfrak{f}_r \setminus \mathfrak{f}_{r-1}$  ( $1 \leq r \leq p$ ) を取り出して  $\mathfrak{h}$  に関する  $\mathfrak{g}$  のマルツェフ基底を作る。最後に  $K_j = \exp \mathfrak{f}_{j_j}$  及び  $\tau_j = \text{ind}_H^{K_j} \chi_f$  ( $0 \leq j \leq p$ ) とおくとき

$$\mathbb{C} = D_{\tau_0}(K_0/H) \subset D_{\tau_1}(K_1/H) \subset \cdots \subset D_{\tau_{p-1}}(K_{p-1}/H) \subset D_{\tau_p}(K_p/H) = D_\tau(G/H)。$$

さて  $\tau$  の既約分解における重複度は一様に  $\infty$  であると仮定し、 $D_\tau(G/H)$  が非可換となることを見よう。このとき、 $\tau_{j_0-1}$  の既約分解における重複度は一様に有界であるが、 $\tau_{j_0}$  の既約分解における重複度は一様に  $\infty$  であるような添数  $j_0$  ( $1 \leq j_0 \leq p$ ) が存在する。

**定理 6.1.** (cf. Greenleaf [26], Fujiwara-Lion-Mehdi [24]) 上記の状況においてももしも

$D_{\tau_{j_0-1}}(K_{j_0-1}/H) \neq D_{\tau_{j_0}}(K_{j_0}/H)$  ならば  $D_{\tau_{j_0}}(K_{j_0}/H)$  は非可換である。

一般に  $V$  を有限次元実ベクトル空間とし、連結巾零リー群  $K$  の  $V$  上への巾単表現、 $0 \neq x \in V$  を  $K$ -不変ベクトルとすると、次の事実が容易に分かる。任意の  $K$ -軌道  $\Omega \subset V$  に対し以下の2つの場合のいずれか一方のみが生じる。 $\Omega + \mathbb{R}x \subset \Omega$  であるか、任意の  $v \in \Omega$  について  $(v + \mathbb{R}x) \cap \Omega = \{v\}$ 。それぞれの場合に応じて軌道  $\Omega$  は  $x$ -方向に飽和である、または非飽和であるという。この事実を余随伴表現に適用し、 $\tau_j$  ( $1 \leq j \leq p$ ) の既約分解における重複度が  $H$ -軌道の個数で与えられることを考慮すると、 $\Gamma_{j_0} = \{\ell \in \mathfrak{f}_{j_0}^* : \ell|_{\mathfrak{h}} = f|_{\mathfrak{h}}\}$  においてほとんど至る所  $K_{j_0}$ -軌道は  $\mathfrak{f}_{j_0-1}^\perp$ -方向に飽和であるが  $H$ -軌道は非飽和である。

すべての事情を勘案して次の主張を示すのが妥当であろう。

主張.  $\Gamma_j$  においてほとんど至る所  $H$ -軌道が  $\mathfrak{f}_{j-1}^\perp$ -方向に飽和であるとき、そのときに限り  $D_{\tau_j}(K_j/H) = D_{\tau_{j-1}}(K_{j-1}/H)$  ( $\tau$  の既約分解における重複度が一様に有界であるとき、この主張は Corwin-Greenleaf [10] の主要結果に他ならない)。

$n-1$  次元以下の巾零リー群に対して主張は正しいと仮定し、 $G$  に対して主張を確立しよう。そこで  $j=n$  としてよい。もし  $d = \dim \mathfrak{h} = 1$  ならば、対  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は簡約であり、 $\mathfrak{g}$  における  $\mathfrak{h}$  の補空間  $\mathfrak{m}$  で  $\text{ad } \mathfrak{h}$ -不変なものが存在する。このときは対称化写像  $\beta: S(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の  $S(\mathfrak{m})$  への制限を用いて主張を示すことができる。残念ながら、一般に  $\beta$  の利用は核  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$  の存在に邪魔されて困難である。そこで今一度  $\dim \mathfrak{h}$  に関する帰納法を用いよう。記号を簡単にするため、 $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_{d-1}$ ,  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{f}_{p-1}$ ,  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ ,  $G' = \exp \mathfrak{g}'$ ,  $\tau' = \text{ind}_{H'}^G \chi_f$ ,  $\tau'' = \text{ind}_{H'}^{G'} \chi_f$  とおく。

主張の証明における難点は、 $\Gamma_\tau$  においてほとんど至る所  $H$ -軌道が  $(\mathfrak{g})^\perp$ -方向に非飽和であるとき  $D_\tau(G/H) \neq D_{\tau_{p-1}}(G'/H)$  を示すこと、すなわち新しい元の存在を示すことである。そこでこの難点の処理にのみ触れておこう。 $H$ -軌道に関する仮定より、 $\Gamma_{\tau'}$  においてほとんど至る所  $H'$ -軌道が  $(\mathfrak{g}')^\perp$ -方向に非飽和であり、帰納法の仮定より  $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau')$  で  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_{\tau'}$  に属さないものが存在する。 $W$  を少し修正して  $W \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$  としてよい。ここで  $\text{ad } Y_d$  は  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau')$  に微分として作用するが、この作用が十分な余裕をもつときは  $\text{ad } Y_d$  を繰り返し  $W$  に作用させ、得られる元を代数的に組み合わせることにより次を得る。

命題 6.1. (cf. Baklouti-Fujiwara [2]) もし  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}', \tau'') \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}', \tau_{p-1})$  ならば  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$  は  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}') + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$  に含まれない。

証明すべき主張を考慮すると、命題 6.1 における条件  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}', \tau'') \not\subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}', \tau_{p-1})$  は一般的な  $\ell \in \Gamma_\tau$  における双線形形式  $B_\ell$  から導かれるシンプレクティック構造に関して  $Y_d \in \mathfrak{h}$  がその相手方を見つけうることを意味している。そこで我々に最後に残った  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}', \tau'') = \mathcal{U}(\mathfrak{g}', \tau_{p-1})$  となる場合には、 $\mathfrak{h}_{d-1} \cap \mathfrak{g}' \neq \mathfrak{h}_d \cap \mathfrak{g}'$  が一般的な  $\ell \in \Gamma_\tau$  において成り立っている。処理の手掛かりを得るため、 $\tau_{p-1}$  の既約分解における重複度が一様に有界であると一時的に仮定してみると、可換性予想が成立するとすれば条件  $[Y_d, W] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$  は自動的に満たされることが分かる。

$T(\Gamma_\tau) = \{m_1 < m_2 < \dots < m_q\}$  を一般的な  $\ell \in \Gamma_\tau$  において  $\mathfrak{g}_{k-1} \cap \mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{g}'$  となる添数  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) の集合とする。Corwin-Greenleaf [10] より  $\Gamma_\tau$ -中心元からなる系  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q\}$  が存在する。すなわち各  $\sigma_j$  ( $1 \leq j \leq q$ ) は添数  $m_j$  に応じて構成される  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m_j}) \setminus \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{m_j-1})$  の元で、一般的な  $\ell \in \Gamma_\tau$  において  $d\hat{\rho}(\ell)(\sigma_j)$  がスカラーとなるようなものである。さて我々の状況においては  $i_d = m_k$  となるある  $k$  ( $1 \leq k \leq q$ ) が存在し、 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  の主反自己同型写像を  $\gamma$  で表すと；

**命題 6.2.** (Fujiwara-Lion-Magneron-Mehdi)  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{i_d-1})\mathfrak{a}_\tau$  を法として  $\gamma(\sigma_1), \dots, \gamma(\sigma_k)$  及び  $Y_d$  の間に  $Y_d$  を実質的に含むような多項式関係が存在する。

$\tau$  に対するプランシュレル公式より  $[V, \gamma(\sigma_j)] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$  ( $1 \leq j \leq q$ ) が  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  任意の元  $V$  について成り立ち、命題 6.2 より結局  $[W, Y_d] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$  がいえる。こうして新しい元  $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$  の存在が分かる。話をまとめよう。

**定理 6.2.** 上記主張が成立する。

**系 3.** 可換性予想が成立する。

## 参考文献

- [1] L. Auslander and B. Kostant, Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Invent. math. 14 (1971), 255-354.
- [2] A. Baklouti et H. Fujiwara, Opérateurs différentiels associés à certaines représentations unitaires d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Prépublication.
- [3] A. Baklouti and J. Ludwig, The Penney-Fujiwara Plancherel formula for nilpotent Lie groups, J. Math. Kyoto Univ. 40 (2000), 1-11.
- [4] A. Baklouti and J. Ludwig, Invariant differential operators on certain nilpotent homogeneous

spaces, to appear in Monatsheft für Math..

- [5] Y. Benoist, Espaces symétriques exponentiels, Thèse de 3e cycle, Univ. de Paris VII, 1983.
- [6] P. Bernat et al., Représentations des Groupes de Lie Résolubles, Dunod, Paris, 1972.
- [7] P. Bonnet, Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire, J. Func. Anal. 55 (1984), 220-246
- [8] P. Cartier, Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie, Lect. Notes in Math. Springer 514 (1975), 20-34.
- [9] L. Corwin, F. P. Greenleaf and G. Grélaud, Direct integral decomposition and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. 304 (1987), 549-583.
- [10] L. Corwin and F. P. Greenleaf, Commutativity of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces with finite multiplicity, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), 681-748.
- [11] L. Corwin and F. P. Greenleaf, Representations of Nilpotent Lie Groups and Their Applications, Part I, Cambridge Univ. Press, 1989.
- [12] B. N. Currey, Smooth decomposition of finite multiplicity monomial representation for a class of completely solvable homogeneous spaces, Pacific J. Math. 170 (1995), 429-460.
- [13] J. Dixmier, L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles, Bull. Soc. Math. France 85 (1957), 113-121.
- [14] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents I  $\sim$  VI: I, Amer. J. Math. 10 (1958), 160-170: II; V, Bull. Soc. Math. France 85 (1957), 325-388; 87 (1959), 65-79: III; IV; VI, Canad. J. Math. 10 (1958), 321-348; 11 (1959), 321-344; 12 (1960), 324-352.
- [15] J. Dixmier, Algèbres Enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [16] M. Duflo, Open problems in representation theory of Lie groups, Conference on "Analysis on homogeneous spaces", edited by T. Oshima, 1-5, Katata, Japan, 1986.
- [17] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, Pacific J. Math. 127 (1987), 329-351.
- [18] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels, 61-84 dans: M. Duflo, N. Pedersen and M. Vergne (eds.), The orbit method in representation theory, Copenhagen, 1988; Birkhäuser 1990.
- [19] H. Fujiwara, Sur les restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels, Invent. math. 104 (1991), 647-654.
- [20] H. Fujiwara, La formule de Plancherel pour les représentations monomiales des groupes

- de Lie nilpotents, 140-150 dans: T Kawazoe, T. Oshima and S. Sano (eds.), Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras, Kawaguchiko, Japan, 1990; World Scientific 1992.
- [21] H. Fujiwara, Sur la conjecture de Corwin-Greenleaf, J. Lie Theory 7 (1997), 121-146.
- [22] H. Fujiwara, Analyse harmonique pour certaines représentations induites d'un groupe de Lie nilpotent, J. Math. Soc. Japan, 50 (1998), 753-766.
- [23] H. Fujiwara et S. Yamagami, Certaines représentations monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels, Adv. St. Pure Math. 14 (1988), 153-190.
- [24] H. Fujiwara, G. Lion and S. Mehdi, On the commutativity of the algebra of invariant differential operators on certain nilpotent homogeneous spaces, Preprint.
- [25] F. P. Greenleaf, Harmonic analysis on nilpotent homogeneous spaces, Contemporary Math. 177 (1994), 1-26.
- [26] F. P. Greenleaf, Geometry of coadjoint orbits and noncommutativity of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces, Preprint.
- [27] A. A. Kirillov, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, Uspekhi Math. Nauk. 17 (1962), 57-110.
- [28] H. Leptin and J. Ludwig, Unitary Representation Theory of Exponential Lie Groups, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
- [29] R. Lipsman, Orbital parameters for induced and restricted representations, Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), 433-473.
- [30] R. Lipsman, The Penney-Fujiwara Plancherel formula for abelian symmetric spaces and completely solvable homogeneous spaces, Pacific J. Math. 151 (1991), 265-295.
- [31] R. Lipsman, Attributes and applications of the Corwin-Greenleaf multiplicity function, Contemporary Math. 177 (1994), 27-46.
- [32] R. Lipsman, Orbital symmetric spaces and finite multiplicity, J. Func. Anal. 135 (1996), 1-38.
- [33] R. Lipsman, A unified approach to concrete Plancherel theory of homogeneous spaces, manuscripta math. 94 (1997), 133-149.
- [34] G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups I ; II, Ann. Math. 55 (1952), 101-139; *ibid*, 58 (1953), 193-221.
- [35] G. W. Mackey, Unitary representations of group extensions, Acta Math. 99 (1958), 265-311.
- [36] N. Pedersen, On the infinitesimal kernel of irreducible representations of nilpotent Lie groups, Bull. Soc. Math. France 112 (1984), 423-467.
- [37] R. Penney, Abstract Plancherel theorem and a Frobenius reciprocity theorem, J. Func.

Anal. 18 (1975), 177-190.

- [38] N. S. Poulsen, On  $C^\infty$  – vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups, J. Func. Anal. 9 (1972), 87-120.
- [39] L. Pukanszky, Leçon sur les Représentations des Groupes, Dunod, Paris, 1967.
- [40] L. Pukanszky, On the theory of exponential groups, Trans. Amer. Math. Soc. 126 (1967), 487-507.
- [41] L. Pukanszky, Unitary representations of solvable Lie groups, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4 (1971), 457-608.
- [42] M. Saito, Sur certains groupes de Lie résolubles I ; II , Sci. Papers of the College of General Educ. Tokyo 7 (1957), 1-11; 157-168.
- [43] O. Takenouchi, Sur la facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (E), Math. J. Okayama Univ. 7 (1957), 151-161.