表現論シンポジウム講演集, 2000
pp.1-11

# 等質 Siegel 領域上の函数空間と小行列式型微分作用素

伊師英之 (横浜市大 理)

## 序.

等質錐に付随して定義される様々な相対不変多項式は対称行列の小行列式の一般化とみなせる. 本講演では, それら“小行列式型”の相対不変多項式を symbol として持つ定数係数微分作用素を等質 Siegel 領域上の調和解析に応用して得られた結果について論じる. 我々が考察するのは Siegel 領域上の正則函数からなる Hilbert 空間に実現される可解 Lie 群の unitary 表現であるが, 主結果として, それらの表現たちの間の同値写像を与える微分作用素と表現空間に属する函数のみたす微分方程式系を小行列式型多項式を用いて記述することができた. この研究は対称 Siegel 領域上の函数空間に実現される $\mathrm{Mp}(n,\mathbb{R})$ および $\mathrm{SU}(n,n)$ の unitary 表現に関する [15], [14] の結果の可解 Lie 群版類似物に相当するといえる.

等質 Siegel 領域 $\mathcal{D}$ 上に分裂型可解 Lie 群 $G$ が affine 変換群として単純推移的に作用しているものとする. 群 $G$ の 1 次元表現 $\chi : G \to \mathbb{C}$ と $\mathcal{D}$ 上の正則函数 $F$ に対して

$$\pi_\chi(g)F(p) := \chi(g)F(g^{-1}\cdot p) \quad (g \in G,\ p \in \mathcal{D})$$

と定義し, $\mathcal{D}$ 上の正則函数からなる trivial でない再生核 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\chi$ で $(\pi_\chi, \mathcal{H}_\chi)$ が $G$ の unitary 表現となるようなものを考える. このような $\mathcal{H}_\chi \neq \{0\}$ が存在するための $\chi$ の必要十分条件と表現 $(\pi_\chi, \mathcal{H}_\chi)$ の分類は [11] で与えられている (定理 10 参照). なお, $\mathcal{D}$ が対称で $\chi$ が Jacobian の巾乗のとき, 表現 $\pi_\chi$ は $\mathcal{D}$ の正則同型群 $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ の正則離散系列表現またはその解析接続へと自然に拡張される. Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\chi$ は双対錐の閉包に含まれる群軌道とその上の相対不変測度から Fourier-Laplace 変換を通じて構成される (定理 11. なお このような Paley-Wiener 型定理については [7], [17], [18] も参照). 一方, 一般にベクトル空間 $V$ の中にある等質錐の閉包に含まれる軌道 $\mathcal{O}$ は次のように代数的に記述される:

$$\mathcal{O} = \{\, x \in V\,;\, \phi_\alpha(x) > 0\ (\alpha = 1,\ldots,d),\quad \psi_m(x) = 0\ (m = 1,\ldots,M)\,\}. \qquad (*)$$

ここで $\phi_\alpha$, $\psi_m$ は $V$ 上の既約多項式であり, 等質錐に付随する小行列式型多項式から採られたものである. しかも $\mathcal{O}$ 上の相対不変函数で $V$ 上の多項式函数に拡張できるもの (以後, $\mathcal{O}$ 上の相対不変多項式とよぶ) は $\phi_1,\ldots,\phi_d$ の巾乗の積に等しい. 以上の事から, $\psi_m$ を用いて $F \in \mathcal{H}_\chi$ が満たす微分方程式が得られる一方, 表現 $(\pi_\chi, \mathcal{H}_\chi)$

から別の表現 $(\pi_{\chi'},\mathcal{H}_{\chi'})$ への同値写像で微分作用素から引き起こされるものは全て $\phi_\alpha$ を用いて記述される.

本稿の議論の流れを説明しよう. 前半 (§§1 - 3) では一般の等質錐 $\Omega$ の閉包の軌道構造について考察する. まず §1 では記号等の準備の後, 各軌道 $\mathcal{O}\subset\overline{\Omega}$ には より低次元の等質錐 (subcone) を底空間とする自然な fiber 束の構造が入ることを説明する (命題 4). §2 では subcone に付随する基本相対不変式 (これらが, 我々が小行列式型多項式とよぶものである) を求めるアルゴリズムを与え, 軌道の fibration に関する考察によって $\mathcal{O}$ 上の相対不変多項式を決定する (定理 7). 軌道 $\mathcal{O}$ の $(*)$ の形の代数的記述は §3 で与えられる (定理 9). 後半 (§4) では $\Omega$ の双対錐 $\Omega^*$ に前半の一般論を適用し, 先述の議論を経て Siegel 領域上の解析に関する諸結果 (定理 13) を導く.

## §1. 等質錐の閉包の軌道構造.

実 vector 空間 $V$ の中の等質錐 $\Omega$ に分裂型可解 Lie 群 $H$ が線型かつ単純推移的に作用しているとする. 錐 $\Omega$ の 1 点 $E$ を固定し, 可解 Lie 群 $H$ の Lie 代数を $\mathfrak{h}$ とする. このとき orbit map $H\ni t\mapsto t\cdot E\in\Omega$ の微分写像 $\mathfrak{h}\ni L\mapsto L\cdot E\in V$ は線型同型だから, 任意の $x\in V$ について $L_x\cdot E=x$ となる $L_x\in\mathfrak{h}$ が唯一つ存在する. これを用いて $V$ 上の双線型な積 $\triangle$ を $x\triangle y:=L_x\cdot y\in V$ $(x,y\in V)$ で定めると, $E$ はこの積に関する単位元である. 代数 $(V,\triangle)$ は $\Omega$ の clan と呼ばれ, 次のような一種の Peirce 分解 (normal 分解) をもつことが知られている.

**命題 1 (Vinberg [19]).** 次の条件をみたす元 $E_1,\dots,E_r\in V$ が存在する.

(i) $E_i\triangle E_j=\delta_{ij}E_i\quad(1\le i,j\le r)$.

(ii) $V=\sum^{\oplus}_{1\le k\le m\le r}V_{mk}$, ただし

$$V_{mk}:=\left\{x\in V\,;\,c\triangle x=\frac{c_m+c_k}{2}x,\ x\triangle c=c_kx\text{ for all }c=\textstyle\sum_{i=1}^r c_iE_i,\ \ c_i\in\mathbb{R}\right\}.$$

(iii) $V_{kk}=\mathbb{R}E_k$ $(k=1,\dots,r)$.

なお $\Omega$ が対称錐のとき, この分解は $\Omega$ に付随する Jordan 代数の Peirce 分解と一致する. 命題 1 に従って任意の $x\in V$ は $x=\sum_{k=1}^r x_{kk}E_k+\sum_{1\le k<m\le r}X_{mk}$ $(x_{kk}\in\mathbb{R},\ X_{mk}\in V_{mk})$ と表される. 空間 $V$ 上の線型形式 $E^*$ を $\langle x,E^*\rangle:=\sum_{k=1}^r x_{kk}$ $(x\in V)$ で定義し, $(x|y):=\langle x\triangle y,E^*\rangle/2$ $(x,y\in V)$ とすると $(\cdot|\cdot)$ は $V$ 上の内積を定め, 部分空間 $V_{mk}$ たちは互いに直交する.

**例 1.** 次数 $r$ の実対称行列のなす vector 空間を $V$, その中で正定値なものの集合を $\Omega$ とし, 単位行列を $E$ とする. 対角成分が正であるような $r$ 次の下三角行列のなす

群を $H$ とし, $H$ の $V$ への作用 $\rho$ を $\rho(t)x := txt^*$ ($t \in H$, $x \in V$, $^*$ は行列の転置を表す) と定めると, 作用 $\rho$ は $\Omega$ 上で単純推移的である. 対称行列 $x = (x_{ij}) \in V$ について下三角行列 $\underset{\sim}{x}$ を

$$\underset{\sim}{x}_{ij} := \begin{cases} x_{ij} & (i > j), \\ x_{ii}/2 & (i = j), \\ 0 & (i < j), \end{cases}$$

と定め $\hat{x} := (\underset{\sim}{x})^*$ とすると, $\Omega$ に付随する clan は $x \triangle y := \underset{\sim}{x}y + y\hat{x} \in V \ (x, y \in V)$ で与えられる. このとき巾等元 $E_k$ は $(k,k)$-行列単位であり, normal 分解 は成分に関する $V$ の自然な直和分解に他ならない.

集合 $I \subset \{1, \ldots, r\}$ について $E_I := \sum_{i \in I} E_i \in V$ とする. このとき $E_I$ は $(V, \triangle)$ の巾等元であり, 逆に任意の巾等元は全てこの形にかける ([19, Theorem 9]).

**命題 2.** 等質錐 $\Omega$ の閉包は $2^r$ 個の $H$-軌道 $\mathcal{O}_I := H \cdot E_I$ に分解される:

$$\overline{\Omega} = \bigsqcup_{I \subset \{1, \ldots, r\}} \mathcal{O}_I.$$

集合 $I \subset \{1, \ldots, r\}$ について $A_I := L_{E_I} \in \mathfrak{h}$, $V^I := \{ x \in V ; A_I \cdot x = x \}$ とすると $(V^I, \triangle)$ は $E_I$ を単位元とする部分代数で $\mathfrak{h}^I := \{ L_x ; x \in V^I \}$ は $\mathfrak{h}$ の部分 Lie 代数であり, 対応する Lie 群 $H^I := \exp \mathfrak{h}^I$ の作用は $V^I$ を保存する. 軌道 $\Omega^I := H^I \cdot E_I \subset V^I$ は $H^I$ が単純推移的に作用する $V^I$ の中の等質錐で, これを $E_I$ に対応する subcone と呼ぶ. 一方 $\mathfrak{n}^I := \{ L \in \mathfrak{h} ; [A_I, L] = -(1/2)L \}$ とすると $\mathfrak{n}^I$ は可換な部分代数であり $[\mathfrak{h}^I, \mathfrak{n}^I] \subset \mathfrak{n}^I$ が成り立つ. よって半直積 $H(\mathcal{O}_I) := N^I \rtimes H^I$ ($N^I := \exp \mathfrak{n}^I$) を考えることができる.

**補題 3.** (i) 群 $H(\mathcal{O}_I)$ は $\mathcal{O}_I$ に単純推移的に作用する.

(ii) 直交射影 $P_I : V \to V^I$ は $H(\mathcal{O}_I)$ の作用に関して次のような変換性をもつ:

$$P_I(nt \cdot x) = t \cdot P_I(x) \quad (x \in V, n \in N^I, t \in H^I).$$

補題 3 から 軌道 $\mathcal{O}_I$ には $H(\mathcal{O}_I) = N^I \rtimes H^I$ の作用と整合する fiber 束の構造が射影 $P_I$ によって入ることがわかる:

**命題 4.** (i) 射影 $P_I$ による $\mathcal{O}_I$ の像は subcone $\Omega^I$ に等しい.

(ii) 元 $x \in \Omega^I$ について $P_I^{-1}(x) \cap \mathcal{O}_I = N^I \cdot x$. これらの $N^I$-軌道たちは $H^I$ の作用によって互いに移り合う.

**例 2.** 例 1 で $r=2$ のときを考える (すなわち $\Omega=\mathrm{Sym}^+(2,\mathbb{R})$). このとき $I=\{1\}$ とすると

$$H^I=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix};\,a>0\right\},\qquad N^I=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\b&1\end{pmatrix};\,b\in\mathbb{R}\right\},$$

$$\Omega^I=\left\{\begin{pmatrix}x&0\\0&0\end{pmatrix};\,x>0\right\},\qquad \mathcal{O}_I=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\y&z\end{pmatrix};\,x>0,\ xz-y^2=0\right\}.$$

とくに $\mathcal{O}^I$ は $N^I$-軌道たち $\rho(N^I)\begin{pmatrix}x&0\\0&0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}x&xb\\xb&xb^2\end{pmatrix};\,b\in\mathbb{R}\right\}$ が "連なった" 構造をしていることがわかる.

## §2. $H$-軌道 $\mathcal{O}_I$ 上の相対不変多項式.

この節では $H$ の作用に関する $\mathcal{O}_I$ 上の相対不変函数で $V$ 上の多項式に拡張できるものを全て決定する. 射影 $P_I$ による $x\in V$ の像 $P_I(x)$ を $x_I$ と表すことにすると, 命題 4 から次のことがわかる.

**補題 5.** (i) 軌道 $\mathcal{O}_I$ 上の $H$-相対不変函数 $\phi$ について $\phi(x)=\phi(x_I)\quad(x\in\mathcal{O}_I)$ が成り立つ.

(ii) Subcone $\Omega^I$ 上の $H^I$-相対不変函数 $\psi$ について $\mathcal{O}_I$ 上の函数 $\phi$ を $\phi(x):=\psi(x_I)$ $(x\in\mathcal{O}_I)$ によって定義すると $\phi$ は $H$-相対不変である.

これによって我々の問題は, 等質錐を含む vector 空間上の相対不変多項式を求める問題に帰着される. したがって まずは $V$ 上の $H$-相対不変多項式について考察しよう. 元 $x\in V$ と $i=1,\dots,r$ について $x^{(i)}=\sum_{k=1}^r x_{kk}^{(i)}E_k+\sum_{m>k}X_{mk}^{(i)}\in V$ を

$$\begin{aligned}
x^{(1)}&:=x,\\
x_{kk}^{(i+1)}&:=x_{ii}^{(i)}x_{kk}^{(i)}-(X_{ki}^{(i)}|X_{ki}^{(i)}) &&(i<k\le r),\\
X_{mk}^{(i+1)}&:=x_{ii}^{(i)}X_{mk}^{(i)}-X_{mi}^{(i)}\triangle X_{ki}^{(i)} &&(i<k<m\le r)
\end{aligned}$$

と定め,

$$D_k(x):=x_{kk}^{(k)}\in\mathbb{R}\qquad(k=1,\dots,r)$$

とする. この $D_k$ は $2^{k-1}$ 次の多項式で $H$ の作用に関して相対不変である ([9], [19]). 次に多項式 $\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_r$ を次の関係式を満たすものとして定義する：

$$\Delta_1=D_1,\quad D_k=\Delta_k\cdot(\Delta_1)^{a_{k1}}(\Delta_2)^{a_{k2}}\cdots(\Delta_{k-1})^{a_{k,k-1}}\ (k=2,\dots,r),$$

ただし $a_{k1},a_{k2},\dots,a_{k,k-1}$ は負でない整数で, $\Delta_k$ は $\Delta_1,\dots,\Delta_{k-1}$ のいずれによっても整除されないものとする.

**定理 6.** (i) 各 $\Delta_k$ $(k=1,\ldots,r)$ は既約多項式.
(ii) $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_r$ は $H$ の作用に関する基本相対不変式である．すなわち $V$ 上の任意の $H$-相対不変多項式は $C(\Delta_1)^{a_1}(\Delta_2)^{a_2}\ldots(\Delta_r)^{a_r}$ $(C\in\mathbb{C},\ a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0})$ の形にかける.

なお $\Omega$ が対称錐のとき, $\Delta_k$ は $\Omega$ に付随する Jordan 代数 の principal minor ([5, p. 114]) に一致する．多項式 $D_r$ および $\Delta_r$ をそれぞれ $D$ と $\Delta$ で表し, $\Omega$ に付随する composite determinant および reduced determinant と呼ぶ．この構成法を部分代数 $(V^I,\triangle)$ に適用して, subcone $\Omega^I$ に付随する composite determinant $D^I$ および reduced determinant $\Delta^I$ が得られる．これらは $V^I$ 上の多項式だが, $D^I(x):=D^I(x_I)$, $\Delta^I(x):=\Delta^I(x_I)$ $(x\in V)$ によって $V$ 全体に拡張する．例 1 で考察した $V=\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ の場合には $\Delta_I(x)$ $(x=(x_{ij})\in V)$ は小行列式 $\det((x_{ij})_{i,j\in I})$ に他ならない.

集合 $I=\{i_1,i_2,\ldots,i_d\}$ (ただし $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_d\leq r$) と $\alpha=1,\ldots,d$ について $I_\alpha:=\{i_1,\ldots,i_\alpha\}$ とすると, $d$ 個の多項式 $\Delta^{I_1},\Delta^{I_2},\ldots,\Delta^{I_d}$ が $H^I$ の作用に関する $V^I$ 上の基本相対不変多項式である (とくに $D^I$ は これらの巾乗の積). この事と補題 5 からこの節の主結果が得られる：

**定理 7.** 軌道 $\mathcal{O}_I$ 上の $H$-相対不変函数 $\phi$ が $V$ 上の多項式に拡張される必要十分条件は, 定数 $C\in\mathbb{C}$ と負でない整数 $a_1,a_2,\ldots,a_d$ が存在して

$$\phi=C\cdot(\Delta^{I_1})^{a_1}(\Delta^{I_2})^{a_2}\ldots(\Delta^{I_d})^{a_d}$$

と表されることである.

## §3. 軌道 $\mathcal{O}_I$ の記述.

集合 $I=\{i_1,i_2,\ldots,i_d\}$ と $1\leq k\leq m\leq r$ (ただし $k\notin I$) について $I^{km}:=(I\cap\{1,\ldots,k\})\cup\{k\}\cup\{m\}$ とする．たとえば $i_\alpha<k<i_{\alpha+1}$ のときは $I^{kk}=\{i_1,\ldots,i_\alpha,k\}$, $I^{km}=\{i_1,\ldots,i_\alpha,k,m\}$ である．部分集合 $I^{km}\subset\{1,2,\ldots,r\}$ $(k\notin I,\ m\geq k)$ の族を $\mathcal{N}(I)$ と表すと, 軌道 $\mathcal{O}_I$ は次のように composite determinant を用いて特徴づけられる.

**命題 8.**

$$\mathcal{O}_I=\left\{x\in V\,;\ \begin{array}{ll} D^{I_\alpha}(x)>0 & (\alpha=1,\ldots,d) \\ D^J(x)=0 & (J\in\mathcal{N}(I)) \end{array}\right\}.$$

次に既約多項式 $\Delta^J$ を用いた $\mathcal{O}_I$ の記述を考える. 一般に composite determinant $D^J$ は $\Delta^{J_\alpha}$ たちの巾乗の積であること (§2 参照) に注意し, 次のような $\mathcal{N}(I)$ の部分族を $\mathcal{M}(I)$ とする：

$$\{\, I^{kk}\,;\, k \notin I \,\} \cup \left\{\, I^{km}\,;\, k \notin I,\, m > k,\, D^{I^{km}} \text{ は } \Delta^{I^{kk}} \text{ で整除されない} \right\}. \quad (1)$$

集合族 $\mathcal{N}(I)$ が $I$ のみから定まるのに対し, $\mathcal{M}(I)$ は $\Omega$ の構造にも依存する.

**定理 9.**

$$\mathcal{O}_I = \left\{ x \in V\,;\; \begin{array}{ll} \Delta^{I_\alpha}(x) > 0 & (\alpha = 1, \ldots, l) \\ \Delta^J(x) = 0 & (J \in \mathcal{M}(I)) \end{array} \right\}.$$

**例 3.** 例 1 で $r = 4$ の場合を考え, $I = \{1, 2\}$ とすると

$$\mathcal{O}_I = \left\{ x \in V\,;\; \begin{array}{ll} \Delta_{\{1\}}(x) > 0, & \Delta_{\{1,2\}}(x) > 0 \\ \Delta_{\{1,2,3\}}(x) = 0, & \Delta_{\{1,2,3,4\}}(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

そして $\Delta_{\{1\}}$ と $\Delta_{\{1,2\}}$ は $\mathcal{O}_I$ 上の $H$-相対不変多項式の生成元である. 閉包 $\overline{\mathcal{O}_I}$ は階数 2 の半正定値対称行列の集合であり, 群 $\mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ が $\rho(g)x := gxg^*$ $(g \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}))$ によって推移的に作用しているが, $\overline{\mathcal{O}_I}$ 上の $\mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$-相対不変多項式は定数函数以外に存在しない.

## §4. Siegel 領域上の函数空間.

**4.1. 準備.** 実 vector 空間 $V$ と錐 $\Omega \subset V$ はこれまで同様のものとし, 複素 vector 空間 $W$ とその上の Hermite 写像 $Q : W \times W \to V_{\mathbb{C}}$ ($V_{\mathbb{C}}$ は $V$ の複素化) で, 全ての $u \in W \setminus \{0\}$ について $Q(u, u) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ となるものを考える. このとき複素領域 $\mathcal{D} := \{\, (z, u) \in V_{\mathbb{C}} \times W\,;\, \Im z - Q(u, u) \in \Omega \,\}$ を Siegel 領域と呼ぶ. 元 $x_0 \in V$ と $u_0 \in W$ について $V_{\mathbb{C}} \times W$ 上の affine 変換 $n(x_0, u_0)$ を

$$n(x_0, u_0) \cdot (z, u) := (z + x_0 + 2iQ(u, u_0) + iQ(u_0, u_0), u + u_0) \quad (z \in V_{\mathbb{C}},\, u \in W).$$

によって定義すると $n(x_0, u_0)$ は $\mathcal{D}$ を保存し,

$$n(x_0, u_0) \circ n(x_1, u_1) = n(x_0 + x_1 + 2\Im Q(u_0, u_1), u_0 + u_1) \quad (x_1 \in V,\, u_1 \in W)$$

が成り立つので $N(Q) := \{\, n(x_0, u_0)\,;\, x_0 \in V,\, u_0 \in W \,\}$ は高々 2 step の巾零 Lie 群をなす. ここで, 可解 Lie 群 $H$ の $W$ への複素線型な作用が定義されて

$$t_0 \cdot Q(u, u) = Q(t_0 \cdot u, t_0 \cdot u) \quad (t_0 \in H,\, u \in W)$$

が成り立つものとしよう. このとき $H$ の $V_{\mathbb{C}} \times W$ への作用 $\sigma$ を $\sigma(t_0)\cdot(z,u) := (t_0\cdot z, t_0\cdot u)$ と定義すると, この作用は $\mathcal{D}$ を保存する. 一方

$$\sigma(t_0)\circ n(x_0,u_0)\circ\sigma(t_0^{-1}) = n(t_0\cdot x_0, t_0\cdot u_0)$$

が成り立つので $V_{\mathbb{C}}\times W$ 上の affine 変換の集合 $G := \{\, n(x_0,u_0)\sigma(t_0)\,;\, x_0\in V,\ u_0\in W\ t_0\in H\}$ は群をなし, $N(Q)$ と $H$ の半直積に同型(したがって分裂型可解 Lie 群)であることがわかる. 群 $G$ の $\mathcal{D}$ への作用は単純推移的である.

**4.2. $\mathcal{D}$ 上の函数空間に実現される $G$ の unitary 表現.** 元 $A_k := L_{E_k} \in \mathfrak{h}$ $(k=1,\dots,r)$ で張られる $\mathfrak{h}$ の部分空間 $\mathfrak{a}$ は可換な部分代数であり, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}\oplus[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ が成り立つ. これから, $s=(s_1,\dots,s_r)\in\mathbb{C}^r$ に対し $H$ の 1 次元表現 $\chi_s : H\to\mathbb{C}$ を

$$\chi_s(\exp(\textstyle\sum_{k=1}^r c_kA_k)) = e^{s_1c_1+\cdots+s_rc_r} \quad (c_1,\dots,c_r\in\mathbb{R})$$

となるようなものと定義し, $G$ の 1 次元表現 $\tilde{\chi}_s$ を $\tilde{\chi}_s(n\sigma(t)) := \chi_s(t)$ $(t\in H,\ n\in N(Q))$ で定める. 領域 $\mathcal{D}$ 上の正則函数のなす空間を $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ とし, その上に群 $G$ の表現 $\pi_s$ を

$$\pi_s(g)F(p) := \tilde{\chi}_{-s/2}(g)F(g^{-1}\cdot p) \quad (g\in G,\ p\in D,\ F\in\mathcal{H}(\mathcal{D}))$$

と定義し, 次の (i), (ii) を満たす $\mathcal{H}(D)$ の trivial でない部分空間 $\mathcal{H}_s(\mathcal{D})$ を考える:
(i) $\mathcal{H}_s(\mathcal{D})$ は再生核 Hilbert 空間の構造をもつ.
(ii) $(\pi_s, \mathcal{H}_s(\mathcal{D}))$ は $G$ の unitary 表現.
このような $\mathcal{H}_s(\mathcal{D})$ は必ずしも任意の $s\in\mathbb{C}^r$ について存在するとは限らないが, 存在すれば一意に定まる. パラメータ $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r$ について

$$q_k(\varepsilon) := \sum_{m>k}\varepsilon_m \dim V_{mk} \quad (k=1,\dots,r),$$
$$Z(\varepsilon) := \{\,\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_r)\in\mathbb{R}^r\,;\,\varepsilon_k=1 \text{ ならば } \zeta_k=0\,\}$$

とし, $\zeta\in Z(\varepsilon)$ に対して $\Theta(\varepsilon,\zeta)$ を次のような $\mathbb{C}^r$ の部分集合とする:

$$\left\{ s=(s_1,\dots,s_r)\in\mathbb{C}^r\,;\, \begin{array}{ll} \Re s_k > q_k(\varepsilon)/2 & (\text{if } \varepsilon_k=1) \\ s_k = q_k(\varepsilon)/2 - 2i\zeta_k & (\text{if } \varepsilon_k=0) \end{array} \right\}. \tag{2}$$

**定理 10.** Hilbert 空間 $\mathcal{H}_s(\mathcal{D}) \neq \{0\}$ が存在する必要十分条件は $s$ がいずれかの $\Theta(\varepsilon,\zeta)$ $(\varepsilon\in\{0,1\}^r,\ \zeta\in Z(\varepsilon))$ に属することであり, このとき表現 $(\pi_s,\mathcal{H}_s(\mathcal{D}))$ は既約である. 二つの表現 $(\pi_s,\mathcal{H}_s(\mathcal{D}))$ と $(\pi_{s'},\mathcal{H}_{s'}(\mathcal{D}))$ が同値である必要十分条件は $s$ と $s'$ が同一の $\Theta(\varepsilon,\zeta)$ に属することである.

次に函数空間 $\mathcal{H}_s(D)$ $(s \in \Theta(\varepsilon, \zeta))$ を具体的に記述する. 群 $H$ は反傾表現 $t \cdot \xi := \xi \circ t^{-1}$ $(t \in H, \xi \in V^*)$ によって $V^*$ に作用していることに注意し, $\langle x, E_\varepsilon^* \rangle := \sum_{k=1}^r \varepsilon_k x_{kk}$ $(x \in V)$ で与えられる $V$ 上の線型形式 $E_\varepsilon^*$ を通る $H$-軌道 $H \cdot E_\varepsilon^* \subset V^*$ を $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ とする. パラメータ $s \in \Theta(\varepsilon, \zeta)$ に対し, $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 上の測度 $d\nu_s$ で

$$d\nu_s(t \cdot \xi) = \chi_{\Re s}(t)\, d\nu_s(\xi) \quad (t \in H,\ \xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*)$$

を満たすものが定数倍を除いて唯一つ存在する (ここで $\Re s := (\Re s_1, \Re s_2, \ldots, \Re s_r) \in \mathbb{R}^r$). 元 $\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*$ について $Q_\xi := 2\xi \circ Q$, $N_\xi := \{ u \in W\,;\, Q_\xi(u, u) = 0 \}$ とし, 次の 2 条件を満たす $W$ 上の正則函数 $\varphi$ のなす Hilbert 空間を $\mathcal{F}_\xi$ とする:

(i) $\varphi(u + v) = \varphi(u) \quad (u \in W, v \in N_\xi)$,

(ii) $\|\varphi\|_\xi^2 := \int_{W/N_\xi} |\varphi(u)|^2 e^{-Q_\xi(u,u)}\, dm_\xi([u]) < \infty$.

ただし, $u \in W$ について $[u]$ は商空間 $W/N_\xi$ の元 $u + N_\xi$ を表し, $dm_\xi$ は $W/N_\xi$ 上の Lebesgue 測度で $\int_{W/N_\xi} e^{-Q_\xi(u,u)} dm_\xi([u]) = 1$ となるよう正規化されたものとする. この $\mathcal{F}_\xi$ は $e^{Q_\xi(\cdot,\cdot)}$ を再生核とする $W/N_\xi$ 上の Fock 空間である ([3]). 次の条件をみたす $\mathcal{O}_\xi \times W$ 上の可測函数 $f$ のなす Hilbert 空間を $\mathcal{L}_s$ とする:

(i) 測度 $d\nu_s$ に関して殆んどいたるところの $\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*$ について $f(\xi, \cdot) \in \mathcal{F}_\xi$,

(ii) $\|f\|^2 := \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} \|f(\xi, \cdot)\|_\xi^2\, d\nu_s(\xi) < \infty$.

定義から, $\mathcal{L}_s$ は直積分 $\int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*}^{\oplus} \mathcal{F}_\xi\, d\nu_s(\xi)$ を実現している.

**定理 11.** パラメータ $s$ が $\Theta(\varepsilon, \zeta)$ に属するとき, Hilbert 空間 $\mathcal{H}_s(\mathcal{D})$ は次の積分変換 $\Phi_s$ による $\mathcal{L}_s$ の像に等しい:

$$\Phi_s f(z, u) := \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} e^{i\langle z, \xi \rangle} f(\xi, u)\, d\nu_s(\xi) \qquad (f \in \mathcal{L}_s,\ (z, u) \in D).$$

この記述を用いて $s, s' \in \Theta(\varepsilon, \zeta)$ に対し表現 $(\pi_s, \mathcal{H}_s(\mathcal{D})$ と $(\pi_{s'}, \mathcal{H}_{s'}(\mathcal{D}))$ の間の同値写像 (Schur の補題により定数倍を除いて唯一つである) を構成しよう. 1 次元表現 $\chi_\sigma$ $(\sigma \in \mathbb{C}^r)$ が $E_\varepsilon^*$ における固定化群 $H_{E_\varepsilon^*}$ 上で 1 に等しい必要十分条件は, $\varepsilon_k = 0$ ならば $\sigma_k = 0$ であること (cf. [11, Theorem 2.3]) に注意し, そのような $\sigma$ の集合を $C(\varepsilon)$ とする. パラメータ $\sigma \in C(\varepsilon)$ について $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 上の函数 $\Upsilon_\sigma^\varepsilon$ を $\Upsilon_\sigma^\varepsilon(t \cdot E_\varepsilon^*) := \chi_\sigma(t)$ $(t \in H)$ と定義すると, これは well-defined で $H$-相対不変性

$$\Upsilon_\sigma^\varepsilon(t \cdot \xi) = \chi_\sigma(t) \Upsilon_\sigma^\varepsilon(\xi) \quad (t \in H, \xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*)$$

をもち, 逆に 任意の $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 上の $H$-相対不変函数は適当な $\Upsilon_\sigma^\varepsilon$ の定数倍に等しい. 同一の $\Theta(\varepsilon, \zeta)$ に属する $s, s'$ については (2) より $(\bar{s}' - \bar{s})/2 \in C(\varepsilon)$ であることに注意して, 線型写像 $\Psi_{s,s'} : \mathcal{L}_s \to \mathcal{L}_{s'}$ を

$$\Psi_{s,s'} f(\xi, \cdot) := \Upsilon_{(\bar{s}' - \bar{s})/2}^\varepsilon(\xi) f(\xi, \cdot) \quad (\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon^*)$$

と定義する.

**命題 12.** $\Phi_{s'} \circ \Psi_{s,s'} \circ \Phi_s^{-1} : \mathcal{H}_s(\mathcal{D}) \to \mathcal{H}_{s'}(\mathcal{D})$ は表現 $\pi_s$ から $\pi_{s'}$ への同値写像を与える.

**4.3. 空間 $\mathcal{H}_s(\mathcal{D})$ と $\mathcal{D}$ 上の微分作用素**　錐 $\Omega$ の双対錐 $\Omega^* := \{\, \xi \in V^* ; \langle x, \xi \rangle > 0 \text{ for all } x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \,\}$ は $H$ が反傾表現によって単純推移的に作用する等質錐であり, $E^*$ は $\Omega^*$ に属する. よって §1 での議論に従って $E^*$ を単位元とする $\Omega^*$ の clan $(V^*, \triangle')$ を考えることができる. 元 $\mathfrak{E}_k \in V^*$ $(k = 1, \ldots, r)$ を $\langle x, \mathfrak{E}_k \rangle := x_{r+1-k, r+1-k}$ $(x \in V)$ によって定義すると, これは $(V^*, \triangle')$ の巾等元であり, $V^*$ はこの $\mathfrak{E}_k$ に関して normal 分解される (命題 1 参照). 集合 $I \subset \{1, \ldots, r\}$ について巾等元 $\mathfrak{E}_I := \sum_{k \in I} \mathfrak{E}_k$ に対応する subcone と, それに付随する composite および reduced determinant をそれぞれ $\Omega_I^*$, $D_I^*$, $\Delta_I^*$ とする. 定理 9 を適用して

$$H \cdot \mathfrak{E}_I = \left\{ \xi \in V^* ; \begin{array}{rl} \Delta^*_{I_\alpha}(\xi) > 0 & (\alpha = 1, \ldots, d) \\ \Delta^*_J(\xi) = 0 & (J \in \mathcal{M}'(I)) \end{array} \right\}, \tag{3}$$

ただし $\mathcal{M}'(I)$ は (1) において $D^{I^{km}}$ と $\Delta^{I^{kk}}$ をそれぞれ $D^*_{I^{km}}$ と $\Delta^*_{I^{kk}}$ で置き換えて定義される $\{1, \ldots, r\}$ の部分集合の族である. パラメータ $\varepsilon \in \{0,1\}^r$ について $I(\varepsilon) := \{\, 1 \le k \le r ; \varepsilon_k = 1 \,\}$ とし, $I(\varepsilon) = \{i_1, i_2, \ldots, i_d\}$ $(1 \le i_1 < i_2 < \ldots, < i_d \le r)$ のとき $I(\varepsilon; \alpha) := \{i_\alpha, i_{\alpha+1}, \ldots, i_d\}$ $(\alpha = 1, \ldots, d)$ と定める. 一般に $I \subset \{1, \ldots, r\}$ について $I^* := \{\, r + 1 - i ; i \in I \,\}$ とすると 定義より $E^*_\varepsilon = \mathfrak{E}_{I(\varepsilon)^*}$ であるから, (3) を書き直して

$$\mathcal{O}^*_\varepsilon = \left\{ \xi \in \mathfrak{g}(1)^* ; \begin{array}{rl} \Delta^*_{I(\varepsilon;\alpha)^*}(\xi) > 0 & (\alpha = 1, \ldots, d) \\ \Delta^*_{J^*}(\xi) = 0 & (J \in \mathcal{M}^*(\varepsilon)) \end{array} \right\}, \tag{4}$$

ただし $\mathcal{M}^*(\varepsilon) := \{\, J^* ; J \in \mathcal{M}'(I(\varepsilon)^*) \}$. さらに, 定理 7 より $\Delta^*_{I(\varepsilon;\alpha)^*}$ が $\mathcal{O}^*_\varepsilon$ 上の $H$-相対不変多項式を生成する. 一方, 4.2 での議論から

$$\Delta^*_{I(\varepsilon;\alpha)^*}(\xi) = \Upsilon^\varepsilon_{\mu(\varepsilon;\alpha)}(\xi) \qquad (\xi \in \mathcal{O}^*_\varepsilon)$$

となるような $\mu(\varepsilon; \alpha) \in C(\varepsilon)$ が存在する.

一般に $V^*$ 上の多項式 $\phi$ について, $V_{\mathbb{C}}$ 上の微分作用素 $\phi(\partial_z)$ を $\phi(\partial_z) e^{\langle z, \xi \rangle} = \phi(\xi) e^{\langle z, \xi \rangle}$ $(\xi \in V^*)$ を満たすものとして定める. このとき $F = \Phi_s f \in \mathcal{H}_s(\mathcal{D})$ $(f \in \mathcal{L}_s)$ について

$$\phi(-i\partial_z) F(z, u) = \int_{\mathcal{O}^*_\varepsilon} e^{i\langle z, \xi \rangle} \phi(\xi) f(\xi, u) \, d\nu_s(\xi) \qquad ((z, u) \in D) \tag{5}$$

が成り立つ.

**定理 13.** (i) 函数空間 $\mathcal{H}_s(\mathcal{D})$ に属する $F$ は微分方程式 $\Delta^*_{J^*}(-i\partial_z)F(z,u)=0$ $(J \in \mathcal{M}^*(I))$ をみたす.

(ii) $\Delta^*_{I(\varepsilon;\alpha)^*}(-i\partial_z)$ $(\alpha=1,\ldots,d)$ は表現 $(\pi_s, \mathcal{H}_s(\mathcal{D}))$ から $(\pi_{s+2\mu(\varepsilon;\alpha)}, \mathcal{H}_{s+2\mu(\varepsilon;\alpha)}(\mathcal{D}))$ への同値写像を引き起こす.

(iii) $\Theta(\varepsilon,\zeta)$ の 2 つの元 $s, s'$ について, ある微分作用素が $(\pi_s, \mathcal{H}_s(\mathcal{D}))$ と $(\pi_{s'}, \mathcal{H}_{s'}(\mathcal{D}))$ の間の同値写像を引き起こすとき, 同じ写像は $\Delta^*_{I(\varepsilon;\alpha)^*}(-i\partial_z)$ $(\alpha=1,\ldots,d)$ の巾乗の積の定数倍によっても与えられる.

実際, (i) は (4) と (5) から明らかで, (ii) と (iii) は命題 12 と (5) によって $\mathcal{O}^*_\varepsilon$ 上の $H$-相対不変多項式を求める問題に帰着され, ゆえに定理 7 から従う.

なお $\Omega$ が対称錐のとき ($\Omega$ と $\Omega^*$ を適当な内積によって同一視すると) $\Delta^*_{J^*}$ と $\Delta^J$ は一致する.

## References


[1] J. Arazy, A survey of invariant Hilbert spaces of analytic functions on bounded symmetric domains, *Contemp. Math.* **185** (1995) 7–65.

[2] J. Arazy and H. Upmeier, Invariant inner product in spaces of holomorphic functions on bounded symmetric domains, *Doc. Math. J. DMV* **2** (1997) 213–261.

[3] B. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform I, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 187–214.

[4] A. Debiard and B. Gaveau, Une définition de l'intégrale d'aire pour les fonctions holomorphes d'un domaine de Siegel, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **301** (1985), 479–481.

[5] J. Faraut and A. Korányi, Analysis on symmetric cones, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[6] L. Gårding, The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 785–826.

[7] S. G. Gindikin, Analysis in homogeneous domains, *Russian Math. Surveys*, **19** (1964), 1–89.

[8] —, Invariant generalized functions in homogeneous domains, *Funct. Anal. Appl.*, **9** (1975), 50–52.

[9] —, Tube domains and the Cauchy problem, *Transl. Math. Monogr.* **11**, Amer. Math. Soc., 1992.

[10] H. Ishi, Positive Riesz distributions on homogeneous cones, *J. Math. Soc. Japan*, **52** (2000), 161–186.

[11] —, Representations of the affine transformation groups acting simply transitively on homogeneous Siegel domains, *J. Funct. Anal.*, **167** (1999), 425–462.

[12] —, Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications, *J. Lie Theory*, to appear.

[13] —, Determinant type differential operators on homogeneous Siegel domains, *preprint*.

[14] H. P. Jakobsen, Intertwining differential operators for $\mathrm{Mp}(n, \mathbb{R})$ and $\mathrm{SU}(n, n)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **246** (1978), 311–337.

[15] H. P. Jakobsen and M. Vergne, Wave and Dirac operators, and representations of the conformal group, *J. Funct. Anal.* **24** (1977), 52–106.

[16] I. I. Piatetskii-Shapiro, Automorphic functions and the geometry of classical domains, Gordon and Breach, New York, 1969

[17] H. Rossi and M. Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, *J. Funct. Anal.* **13** (1973), 324–389.

[18] M. Vergne and H. Rossi, Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group, *Acta Math.* **136** (1976), 1–59.

[19] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, *Trans. Moscow Math. Soc.* **12** (1963), 340–403.

[20] N. Wallach, The analytic continuation of the discrete series, I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **251** (1979), 1–17; 19–37.