表現論シンポジウム講演集, 1999
pp.174-187

全ての有限素点での成分が退化主系列表現となるような Sp_{2n} の既約尖点表現について

池田　保（京都大学大学院理学研究科）

§ Introduction

m を自然数、l を正の偶数とする。Degree m の Siegel 上半空間上に定義された weight l の Eisenstein series

$$E_{m,l}(Z) = \sum_{\{C,D\}/\sim} \det(CZ+D)^{-l}$$

を考える。((C,D) は symmetric coprime pair の 同値類を走る) l が十分大のとき、$E_{m,l}(Z)$ は絶対収束する。$\mathrm{Sp}_m(\mathbb{A})$ を rank m の symplectic 群の adele 群とするとき、$E_{m,l}(Z)$ によって生成される $\mathrm{Sp}_m(\mathbb{A})$ の表現 $\pi \simeq \otimes'_v \pi_v$ は v が有限素点ならば Siegel parabolic subgroup P_m の一次元表現から誘導される退化主系列表現

$$\mathrm{Ind}_{P_m(\mathbb{Q}_v)}^{\mathrm{Sp}_m(\mathbb{Q}_v)} |\det|^{l-\frac{m+1}{2}}$$

に同型である。また、$v=\infty$ のときは π_v は lowest K-type が $\det^l$ (ここで $K \simeq \mathrm{U}(m)$) の holomorphic discrete series となる。

ここで Eisenstein series $E_{m,l}(Z)$ はもちろん尖点形式 (cusp form) ではないので π は尖点表現ではない。では $\mathrm{Sp}_m(\mathbb{A})$ の既約尖点表現で有限素点における成分が退化主系列表現となるようなものが存在するだろうか。$m=1$ の場合はこのような問題は trivial なので $m \geq 2$ の場合を考える。$m=2$ の場合は斎藤・黒川 lift というものが知られていて、その有限素点での成分は退化主系列表現となる。一方、斎藤・黒川 lift の一般化として Duke と Imamoglu は次のような予想を提出した。

Duke-Imamoglu conjecture : $f(\tau) \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を weight $2k$ の normalized Hecke eigen cusp form とする。$k \equiv n \bmod 2$ とするとき、Hecke eigen cusp form $F(Z) \in S_{k+n}(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}))$ で

$$L(s,F) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{2n} L(s+k+n-i, f)$$

を満たすものが存在する。

この予想が正しければ $F(Z)$ で生成される $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A})$ の既約尖点表現の有限成分は退化主系列表現となることがすぐにわかる。従って m が 2 以上の偶数のとき、このような退化主系列表現を成分にもつ既約尖点表現の無限系列があり、斎藤・黒川 lift はその最初のものとなるわけである。

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

この予想を証明することができたので報告したい。

§ cusp form の志村対応

自然数 k を固定する。N を正の有理数とするとき、 $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^k N})/\mathbb{Q}$ の判別式の絶対値を $\mathfrak{d}_N$ で表わし、 $\mathfrak{f}_N = \sqrt{N\mathfrak{f}_N^{-1}}$ とおく。また、 $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^k N})/\mathbb{Q}$ に対応する primitive な Dirichlet character を χ_N で表わす。N が自然数で $(-1)^k N \equiv 0, 1 \mod 4$ ならば $\mathfrak{f}_N$ も自然数である。

$f(\tau) \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ を weight $2k$ の normalized Hecke eigen cusp form とする。

$$f(\tau) = \sum_{n>0} a(n) q^n$$

$$(1 - p^{k-\frac{1}{2}}\alpha_p X)(1 - p^{k-\frac{1}{2}}\alpha_p^{-1} X) = 1 - a(p)X + p^{2k-1}X^2.$$

志村対応によって f と対応する Kohnen subspace $S^+_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ の元を

$$h(\tau) = \sum_{\substack{n>0 \\ (-1)^k n \equiv 0,1\ (4)}} c(n) q^n$$

とする。D が fundamental discriminant で $(-1)^k D > 0$ のとき、

$$c(n^2|D|) = c(|D|) \sum_{d|n} \mu(d) \chi_{|D|}(d) d^{2k-1} a\left(\frac{n}{d}\right)$$

が成り立つ。逆に $h(\tau)$ はこれにより特徴づけられる。$c(n) \in \mathbb{R}$ としてよい。このとき、

$$c(|D|)^2 = \frac{\langle h, h\rangle}{\langle f, f\rangle} \cdot (k-1)! \pi^{-k} |D|^{k-\frac{1}{2}} L(f, \chi_{|D|}, k)$$

が成り立っている。ここで

$$\begin{aligned}
\langle h, h\rangle &= \frac{1}{6} \int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathfrak{h}} |h(\tau)|^2 y^{k-\frac{1}{2}}\, dx\, dy \\
\langle f, f\rangle &= \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}} |f(\tau)|^2 y^{2k-2}\, dx\, dy \\
L(f, \chi_{|D|}, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{|D|}(n) a(n) n^{-s}
\end{aligned}$$

であり、 $\chi_{|D|}$ は二次拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})/\mathbb{Q}$ に対応する Dirichlet 指標、 $\mu(d)$ は Möbius 関数である。

§ 斎藤・黒川 lift の復習

この § では k は奇数であると仮定する。$B=\begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & l \end{pmatrix}$ を rank 2 の正定値半整数対称行列とする。$A(B)$ を

$$A(B)=\sum_{d|(m,r,l)} d^k\, c\left(\frac{4ml-r^2}{d^2}\right)$$

と定義するとき、

$$F(Z)=\sum_{B>0} A(B)\mathbf{e}(BZ), \qquad Z\in\mathfrak{h}_2$$

は重さ $k+1$ の Hecke eigen Siegel cusp form となる。ここで $\mathfrak{h}_2$ は 2 次の Siegel 上半平面、 $\mathbf{e}(X)=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}(X))$ である。$F(Z)$ を斎藤・黒川 lift という。これについて次の Maass relation

$$A\left(\begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & l \end{pmatrix}\right)=\sum_{d|(m,r,l)} d^k A\left(\begin{pmatrix} ml/d^2 & r/(2d) \\ r/(2d) & 1 \end{pmatrix}\right)$$

が成り立つ。$F(Z)$ で生成される $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{A})$ の既約尖点表現の成分は $v<\infty$ のとき、退化主系列表現 $\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbf{Q}_v)}^{\mathrm{Sp}_2(\mathbf{Q}_v)}|\det|^{s_p}$ に同型である。ここで $s_p=(\log\alpha_p)/(\log p)$ である。また、 Fourier 係数 $A(B)$ は B の種（局所同値類）のみに依って定まる。

§ 退化主系列表現の退化 Whittaker model

さて、一般に退化主系列表現を有限成分に持つような保型形式はどのような特徴を持つであろうか？簡単のため、m は偶数であるとし、 $m=2n$ とおく。$G(\mathbb{Q}_p)=\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Q}_p)$ の退化主系列表現を考える。$\psi:\mathbb{Q}_p\to\mathbb{C}^\times$ を order 0 の additive character とする。

$P_{2n}=M_{2n}N_{2n}$ を Siegel parabolic subgroup の Levi 分解とする。

$$M=M_{2n}=\left\{\begin{pmatrix} A & \\ & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}\middle| A\in\mathrm{GL}_{2n}\right\}\simeq\mathrm{GL}_{2n}$$

$$N=N_{2n}=\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & z \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\middle| z={}^tz\right\}$$

$B={}^tB\in\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{Q}_p)$, $\det B\neq 0$ とするとき、 $N(\mathbb{Q}_p)$ の character ψ_B を

$$\psi_B\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & z \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\right)=\psi(\mathrm{tr}(Bz))$$

で定義する。π_p を $G(\mathbb{Q}_p)$ の既約許容表現とするとき、

$$\mathrm{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\pi,\mathrm{Ind}_{N(\mathbf{Q}_p)}^{G(\mathbf{Q}_p)}\psi_B)$$

を退化 Whittaker model の空間という。$\lambda\in\mathrm{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\pi_p,\mathrm{Ind}_{N(\mathbf{Q}_p)}^{G(\mathbf{Q}_p)}\psi_B)$, $u\in\pi_p$ に対して

$$W_v(g)=\lambda(\pi(g)u), \qquad g\in G(\mathbb{Q}_p)$$

を退化 Whittaker 関数という。ここでは u が class 1 vector の場合を主に考える。π_p が退化主系列表現のとき、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{G(\mathbb{Q}_p)}(\pi_p, \mathrm{Ind}_{N(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \psi_B) = 1$$

であることが知られている。このとき、退化 Whittaker 関数は scalar 倍を除いて一意的である。このような退化 Whittaker function は次節で考える singular series で表わされる。また、無限素点においても lowest K-type が 1 次元の holomorphic discrete series の退化 Whittaker model の空間は 1 次元である。

さて、$\phi(g)$ を $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A})$ 上の保型形式、$\pi \simeq \otimes'_v \pi_v$ を phi で生成される $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A})$ の保型表現とする。全ての p に対して π_p は既約退化主系列表現であると仮定する。$B = {}^tB \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{Q})$, $\det B \neq 0$ に対して $\phi(g)$ の B-Fourier 係数を

$$\phi_B(g) = \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \phi(ng)\overline{\psi_B(n)}\, dn$$

で定義する。$\mathbb{Q}$ の素点 v_0 と $\phi' \in \otimes_{v\neq v_0}\pi_v$ とするとき、$\phi_{v_0} \in \pi_{v_0} \mapsto (\phi' \otimes \phi_{v_0})_S$ で定義される写像 $\pi_{v_0} \to \mathbb{C}$ は退化 Whittaker model の空間に属する。したがって、B のみによって定まる定数 c_B があって、

$$\phi_B(g) = c_B \cdot \prod_v \phi_{v,B}(g_v)$$

が成り立つことがわかる。ここで $\phi_{v,B}(g_v)$ は π_v の退化 Whittaker 関数で B_v, ψ_v などが class 1 となるような有限素点では $\phi_{v,B}(g_v) = 1$ となるよう正規化しておく。

B と B' が $\mathbb{Q}$ 上同値ということを

$$^{\exists}A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Q}), \qquad B' = {}^tABA$$

で定義する。$B' ={}^t ABA$ と B が $\mathbb{Q}$ 上同値のとき、

$$\begin{aligned}
\phi_B\left(\begin{pmatrix} A & \\ & {}^tA^{-1}\end{pmatrix} g\right) &= \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \phi\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & z \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ & {}^tA^{-1}\end{pmatrix} g\right)\overline{\psi(\mathrm{tr}(Bz))}\, dz \\
&= \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \phi\left(\begin{pmatrix} A & \\ & {}^tA^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & A^{-1}z\,{}^tA \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix} g\right)\overline{\psi(\mathrm{tr}(Bz))}\, dz \\
&= \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \phi\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & z \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix} g\right)\overline{\psi(\mathrm{tr}(BAz\,{}^tA))}\, dz \\
&= \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \phi\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & z \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix} g\right)\overline{\psi(\mathrm{tr}({}^tABAz))}\, dz \\
&= \phi_{B'}(g)
\end{aligned}$$

となることがわかる。また $\phi(g)$ が weight l の Hecke eigen form $F(Z) = \sum_{B\geq 0} A(B)\mathbf{e}(BZ)$ から得られる場合、

$$\phi_B(\mathbf{1}_{4n}) = \det(2B)^{-l/2}A(B)$$

であることもすぐにわかる。以上のことから、B と B' が $\mathbb{Q}$ 上同値ならば Fourier 係数 $A(B)$ と $A(B')$ の関係は退化主系列表現の退化 Whittaker function で表わされることがわかる。

§ Singular Series:

p を素数とする。

$\mathbb{Z}_p$ 上の $2n$ 次の non-degenerate half-integral symmetric matrix B に対して

$$D_B = \det(2B)$$

$$\delta(B) = \begin{cases} 2\left[\frac{\mathrm{ord}_p(D_B)+1}{2}\right], & p \neq 2 \\ 2\left[\frac{\mathrm{ord}_p(D_B)}{2}\right], & p = 2 \end{cases}$$

$$\xi(B) = \begin{cases} 1 & (-1)^k D_B \in (\mathbb{Q}_p^\times)^2, \\ -1, & [\mathbb{Q}_p(\sqrt{(-1)^k D_B}) : \mathbb{Q}_p] = 2, : \text{ unramified}, \\ 0, & [\mathbb{Q}_p(\sqrt{(-1)^k D_B}) : \mathbb{Q}_p] = 2, : \text{ ramified} \end{cases}$$

とおく。

$$b_p(B,s) = \sum_{R \in S_{2n}(\mathbb{Q}_p)/S_{2n}(\mathbb{Z}_p))} \psi(\mathrm{tr}(BR)) p^{-\mathrm{ord}_p(\mu(R))s}$$

を singular series という。ここで $\mu(R)$ は次のように定義される。(C,D) を symmetric coprime pair で $D^{-1}C = R$ なるものをとるとき、$\mu(R) = \det D$ で定義される。X の多項式 $\gamma_p(B;X)$ を

$$\gamma_p(B;X) = (1-X)(1-p^n\xi(B)X)^{-1}\prod_{i=1}^{n}(1-p^{2i}X^2)$$

で定義する。このとき、X の多項式 $F(B;X)$ で $F(B;p^{-s}) = b_p(B,s)\gamma_p(B;p^{-s})^{-1}$ を満たすものが存在する。$F(B;X)$ は次のような関数等式を満たす。

$$F(B;p^{-2n+1}X^{-1}) = (p^{n+\frac{1}{2}}X)^{-\delta(B)+2-2\xi(B)^2}F(B;X)$$

$\tilde{F}_p(B;X) = X^{-\frac{\delta(B)}{2}+1-\xi(B)^2}F(B;X)$ とおく。このとき、$\tilde{F}_p(B;X^{-1}) = \tilde{F}_p(B;X)$ が成り立つ。

$\tilde{F}_p(B;X)$ を用いると、退化主系列表現

$$\mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{Q}_v)}^{\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Q}_v)} |\det|^s$$

の退化 Whittaker 関数は

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} k \mapsto \psi_B(z)|\det(AB\,{}^tA)|^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\tilde{F}_p(AB\,{}^tA;p^{-s})$$

で表わされる。ただし、$K \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$.

このように正規化して考えると Duke-Imamoglu 予想が正しいならば、半整数対称行列 B に対して B 番目の Fourier 係数は

$$c_B D_B^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}\prod_p \tilde{F}_p(B;\alpha_p)$$

という形でなければならないことがわかる。

§ Eisenstein 級数の Fourier 展開

s を複素変数とする。

$$E_{2n,l}(Z,s) = \det \mathrm{Im}(Z)^{s-\frac{l}{2}} \sum_{\{C,D\}} \det(CZ+D)^{-l} |\det(CZ+D)|^{-2s+l}$$

を考える。$E_{2n,l}(Z,s)$ は次のように Fourier 展開される。

$$E_{2n,l}(X+\sqrt{-1}Y,s) = \sum_{B \in \mathcal{S}'_{2n}(\mathbb{Z})} c_{2n,l}(B;Y,s+l)\mathrm{e}(\tfrac{1}{2}BX)$$

ここで $\mathcal{S}'_{2n}(\mathbb{Z})$ は j 次の整係数 half-integral symmetric matrix の集合であり、B が非退化なら

$$c_{2n,l}(B;Y,s) = \Gamma_{2n,l}(B;Y,s) \prod_{p|D_B} F_p(B;p^{-2s})$$

$$\Gamma_{2n,l}(B;Y,s) = (\det Y)^{s-\frac{l}{2}} \frac{\Xi(Y,B;s+\frac{l}{2},s-\frac{l}{2})}{\zeta(2s)\prod_{i=1}^{n}\zeta(4s-2i)} L(\chi_B;2s-n)$$

$$\Xi(g,h;s,s') = \int_{\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})} \mathbf{e}(-hx)\det(x+\sqrt{-1}g)^{-s}\det(x-\sqrt{-1}g)^{-s'}\,dx$$

ここで

$$D_B = \det(2B)$$

$$\chi_B = \chi_{D_B}$$

この式において $s=\frac{l}{2}$ とおけば正則な Eisenstein series の Fourier 展開をえる。B が正定値のとき、

$$\begin{aligned}\Xi(Y,B;l,0) =& \frac{(-1)^{nl}2^{-n(2n-1)}(2\pi)^{2nl}}{\Gamma_{2n}(l)}(\det(B))^{l-\frac{2n+1}{2}}\,\mathbf{e}(\sqrt{-1}BY)\\ =& \frac{(-1)^{nl}2^{2n}\pi^{2nl}}{\Gamma_{2n}(l)}(\det B)^{l-\frac{2n+1}{2}}\mathbf{e}(\sqrt{-1}BY)\end{aligned}$$

$$\Gamma_{2n}(s) = \pi^{n(2n-1)/2}\prod_{i=0}^{2n-1}\Gamma(s-\frac{i}{2})$$

であるので l が偶数のときは $m=2n$ とおけば B が正定値なら $E_{2n,l}(Z)$ の B-th Fourier 係数は

$$\Gamma_{2n}(l) = 2^{n^2+n-2nl}\pi^{n^2}\prod_{i=1}^{n}(2l-2i)!$$

$$\zeta(l) = (-1)^{l/2} 2^{-1} (2\pi)^l \frac{\zeta(1-l)}{(l-1)!}$$

$$\prod_{i=1}^{n} \zeta(2l-2i) = (-1)^{(2nl+n^2+n)/2} 2^{-n} (2\pi)^{2nl-n(n+1)} \prod \frac{\zeta(1-2l+2i)}{(2l-2i-1)!}$$

$$L(\chi_B, l-n) = (-1)^{(l+n^2+n)/2} (2\pi)^{l-n-1} \pi \frac{\mathfrak{d}_B^{\frac{1}{2}+n-l}}{(l-n-1)!} L(\chi_B, 1+n-l)$$

なので $E_{2n,l}(Z)$ の B-th Fourier 係数は

$$\frac{2^n}{\zeta(1-l)\prod_{i=1}^n \zeta(1+2i-2l)}$$

と

$$L(\chi_B; 1+n-l) \prod_{p|D_B} (p^{2l-2n-1})^{\frac{1}{2}\operatorname{ord}_p \mathfrak{f}_B} F_p(B; p^{-l})$$

の積に等しい。$l = k+n$ とおけば、$k \equiv n \bmod 2$ であり、この式は

$$L(\chi_B; 1-k)\mathfrak{f}_B^{k-\frac{1}{2}} \prod_{p|D_B} \tilde{F}_p(B; p^{k-\frac{1}{2}})$$

となる。前節までの記号を用いると $c_B = \mathfrak{d}_B^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} L(\chi_B; 1-k)$ である。

ここで c_B^2 を考えてみると、関数等式

$$L(\chi_B, 1-k) = (k-1)!\mathfrak{d}_B^{k-\frac{1}{2}} 2^{1-k} \pi^{-k} L(\chi_B, k)$$

より、

$$\begin{aligned} c_B^2 =& \mathfrak{d}_B^{-k+\frac{1}{2}} L(\chi_B; 1-k)^2 \\ =& 2^{1-k}(k-1)!\pi^{-k} L(\chi_B, k) L(\chi_B, 1-k) \end{aligned}$$

一変数の Eisenstein 級数 $E_{2k}(\tau)$ の L 関数 $L(E_{2k}, s)$ は $\zeta(s)\zeta(s-2k+1)$ であるから、これは

$$c_B^2 = 2^{1-k}(k-1)!\pi^{-k} L(E_{2k}, \chi_B, k)$$

ということに等しい。Duke-Imamoglu 予想の場合にはこの式において形式的に Eisenstein 級数 $E_{2k}(\tau)$ を cusp form $f(\tau)$ で置き換えてみれば定数倍を除いて $c_B^2 = \mathfrak{d}_B^{-k+\frac{1}{2}} c(\mathfrak{d}_B)^2$ であることが期待される。

因子 $L(\chi_B; 1-k)$ についてさらにもう少し考察してみる。

§ Cohen の Eisenstein series

Cohen の関数 $H(k,N)$ は

$$H(k,N) = \begin{cases} \zeta(1-2k), & N=0, \\ 0, & N \not\equiv 0,1 \bmod 4, \\ L(\chi_N, 1-k) \sum_{d \mid \mathfrak{f}_N} \mu(d)\chi_N(d) d^{k-1} \sigma_{2k-1}(\mathfrak{f}_N/d) & N>0, N \equiv 0,1 \bmod 4. \end{cases}$$

によって定義される。

Cohen の Eisenstein series $\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau)$ を

$$\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau) = \sum_{N=0}^{\infty} H(k,N) q^N$$

によって定義する。これは weight $k+\frac{1}{2}$ の modular form で Kohnen plus space $M^{+}_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ に属する。さらに、$\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau)$ は志村対応により、一変数の Eisenstein 級数 $E_{2k}(\tau)$ と対応する。前節であらわれた因子 $L(\chi_B, 1-k)$ は $\mathcal{H}_{k+\frac{1}{2}}(\tau)$ の $\mathfrak{d}_B$ 番目の Fourier 係数であると考えることができる。したがって Duke-Imamoglu 予想に対しては $L(\chi_B, 1-k)$ を $c(\mathfrak{d}_B)$ で置き換えればよいと期待される。これは前節の考察と符合する。

§ Statement of the theorem

以下では自然数 k, n で $k \equiv n \bmod 2$ を満たすものを固定する。

B を rank $2n$ の non-degenerate positive-definite half-integral symmetric matrix とするとき、$(-1)^n \det(2B) \equiv 0,\ 1 \mod 4$ である。

定理：$n \equiv k \bmod 2$ のとき、$A(B)$ を

$$A(B) = c(\mathfrak{d}_B) \mathfrak{f}_B^{k-\frac{1}{2}} \prod_p \tilde{F}_p(B; \alpha_p)$$

によって定義すれば

$$F(Z) = \sum_{B>0} A(B) \mathbf{e}(BZ)$$

は $S_{k+n}(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}))$ に属する degree $2n$, weight $k+n$ の Hecke eigen Siegel cusp form である。ここで正方行列 T に対して $\mathbf{e}(T) := \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}(T))$ である。また、$F(Z)$ で生成される $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A})$ の保型表現は既約で、その有限成分は退化主系列表現 $\mathrm{Ind}_{P_{2n}(\mathbb{Q}_v)}^{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Q}_v)} |\det|^{s_p}$ に同型である。したがって

$$L(s,F) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{2n} L(s+k+n-i, f)$$

である。

注意：$F(Z)$ が Siegel modular form であることさえいえれば後半は簡単である。実際、$F(Z)$ (の adele 群への持ち上げ) は退化 Whittaker 関数の和であるから、$F(Z)$ で生成される表現は既約な退化主系列表現であることは直ちにわかる。

§ Jacobi forms

$r+s=m$ とする。Jacobi 群 $J_{r,s}(\mathbb{Z})$ を

$$\left\{ M = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ \hline \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \in \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z}) \right\}$$

と定義する。ここでは $m=2n$, $r=2n-1$, $s=1$ の場合のみを考える。$S={}^tS$ を rank $2n-1$ の非退化半整数対称行列とする。$Z\in\mathfrak{h}_{2n}$ を $Z=\begin{pmatrix}\omega & z\\ {}^tz & \tau\end{pmatrix}$ で表わす。$\mathfrak{h}_1\times\mathbb{C}^{2n-1}$ 上の正則関数 $\phi(\tau,z)$ が index S, weight l の Jacobi form であるとは $\tilde{\phi}(Z)=\mathbf{e}(S\omega)\phi(\tau,z)$ とおくとき、任意の $M\in J_{2n-1,1}(\mathbb{Z})$ に対して

$$\tilde{\phi}(Z)|_l M = \tilde{\phi}(Z)$$

が成り立ち、

$$\phi(\tau,z)=\sum_{x,N} c(x,N)\mathbf{e}(({}^txz))\mathbf{e}((N\tau))$$

と Fourier 展開するとき、$c(x,N)\neq 0$ なら $4N-{}^txS^{-1}x\geq 0$ が成り立つこととする。
$a,\,b\in\mathbb{Q}^{2n-1}$ に対して theta 関数 $\theta_{[a,b]}(S;\tau,z)$ を

$$\theta_{[a,b]}(S;\tau,z)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^{2n-1}} \mathbf{e}({}^t(x+a)S(x+a)\tau+2\,{}^t(x+a)S(z+b))$$

によって定義する。$b=0$ のときはこれを単に $\theta_{[a]}(S;\tau,z)$ で表わす。$\Lambda=\Lambda(S)$ を

$$(2S)^{-1}\mathbb{Z}^{2n-1}/\mathbb{Z}^{2n-1}$$

の完全代表系とする。このとき、

$$\phi(\tau,z)=\sum_{4N-{}^txS^{-1}x\geq 0} c(x,N)\mathbf{e}({}^txz)\mathbf{e}(N\tau)$$

ここで λ が Λ を走り、x が $\mathbb{Z}^{2n-1}$ を走るとき、$2S(\lambda+x)$ は $\mathbb{Z}^{2n-1}$ を走る。よって

$$\phi(\tau,z)=\sum_{\lambda}\sum_{x}\sum_{N-{}^t(\lambda+x)S(\lambda+x)\geq 0} c(2\,{}^t(\lambda+x)S,N)\mathbf{e}(2\,{}^t(\lambda+x)Sz)\mathbf{e}(N\tau)$$

ここで

$$\begin{pmatrix} S & S(\lambda+x)\\ {}^t(\lambda+x)S & N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S & S\lambda\\ {}^t\lambda S & N-{}^txSx-{}^txS\lambda-{}^t\lambda Sx\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

であるので N を $N+{}^t xSx+{}^t xS\lambda+{}^t\lambda Sx$ でおきかえれば

$$\phi(\tau,z)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{x}\sum_{N-{}^t\lambda S\lambda\geq 0}c(2S\lambda,N)$$
$$\times\,\mathbf{e}({}^t(x+\lambda)S(x+\lambda)\tau+2\,{}^t(x+\lambda)Sz)\mathbf{e}(((N-{}^t\lambda S\lambda)\tau))$$
$$=\sum_{\lambda\in\Lambda}\theta_{[\lambda]}(S;\tau,z)\sum_{N-{}^t\lambda S\lambda\geq 0}c(2S\lambda,N)\mathbf{e}((N-{}^t\lambda S\lambda)\tau)$$

をえる。

§ Fourier-Jacobi 係数

$F\in M(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}))$ とする。$S={}^tS$ を rank $2n-1$ の非退化半整数対称行列とする。$Z\in\mathfrak{H}_{2n}$ を $Z=\begin{pmatrix}\omega & z\\ {}^tz & \tau\end{pmatrix}$ で表わす。F の index S の Fourier-Jacobi 係数とは

$$F_S(\tau,z)=\int_{\mathcal{S}(\mathbb{R})/\mathcal{S}(\mathbb{Z})}F(\begin{pmatrix}\omega & z\\ {}^tz & \tau\end{pmatrix})\overline{\mathbf{e}(S\omega)}d\omega$$

で定義する。ここで $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ はそれぞれ実係数対称行列の全体および整係数対称行列の全体である。S が正定値ならばこれは index S, weight l の Jacobi form となる。F の Fourier 展開を

$$F(Z)=\sum_{B}A(B)\mathbf{e}(BZ)$$

とするとき、

$$F_S(\tau,z)=\sum_{B=\begin{pmatrix}S & x/2\\ {}^tx/2 & N\end{pmatrix}}A(B)\mathbf{e}(N\tau)\mathbf{e}({}^txz)$$

である。これを theta 関数によって展開すれば次のようになる。

$$F_S(\tau,z)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\theta_{[\lambda]}(S;\tau,z)\sum_{N-{}^t\lambda S\lambda\geq 0}A\begin{pmatrix}S & S\lambda\\ {}^t\lambda S & N\end{pmatrix}\mathbf{e}((N-{}^t\lambda S\lambda)\tau)$$

§ theta 変換公式

S を rank $2n-1$ の正定値半整数対称行列とする。$\lambda\in\Lambda=\Lambda(S)$ のとき、theta 関数

$$\theta_{[\lambda]}(S;\tau,z)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^{2n-1}}\mathbf{e}({}^t(x+\lambda)S(x+\lambda)\tau+2\,{}^t(x+\lambda)Sz)$$

は次のような変換公式を満たす。

$$\theta_{[\lambda]}(S;\tau+x,z)=\mathbf{e}({}^t\lambda S\lambda x)\theta_{[\lambda]}(S;\tau,z),\quad x\in\mathbb{Z}$$

$$\theta_{[\lambda]}(S;-\tau^{-1},-z\tau^{-1})=(\det(2S))^{-1/2}(-\sqrt{-1}\tau)^{n-\frac{1}{2}}\mathbf{e}(\lambda z\tau^{-1}\,{}^tz)\sum_{\mu\in\Lambda}\mathbf{e}(-\,{}^t\lambda S\mu)\theta_{[\mu]}(S;\tau,z)$$

一般に $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とするとき、 unitary 行列 $u_S(\gamma)_{\lambda\mu}$, $\lambda,\mu\in\Lambda$ があって

$$\begin{aligned}&\theta_{[\lambda]}(S;(a\tau+b)(c\tau+d)^{-1},z(c\tau+d)^{-1})\\=&(c\tau+d)^{(2n-1)/2}\sum_{\mu\in\Lambda}\overline{u_S(\gamma)_{\lambda\mu}}\,\mathbf{e}(Sz(c\tau+d)^{-1}c\,{}^tz)\theta_{[\mu]}(S;\tau,z).\end{aligned}$$

が成り立つ。

§ multiplier system をもつ半整数 weight の vector 値 modular form

k を整数とする。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ から unitary 群 $\mathrm{U}(d)$ への写像 $\gamma\mapsto u(\gamma)$ が multiplier system であるとは

$$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mapsto J_k(\gamma,\tau)=u\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}(c\tau+d)^{k+(1/2)}$$

が (vector 値の) automorphy factor であることとする。$k\equiv k'$ mod 2 のとき、 $J_k(\gamma,\tau)=J'_k(\gamma,\tau)(c\tau+d)^{k-k'}$ ならばこの 2 つの automorphy factor は同じ multiplier system をもつという。

Eisenstein 級数 $E_{2n,k+n}(Z)$ の index S の Fourier-Jacobi 係数から $\mathbb{C}^\Lambda$ に値をもつ vector 値の modular form で

$$b_{S,\lambda,k}+\sum_{N>0}L(\chi_N;1-k)\mathfrak{f}_N^{k-\frac{1}{2}}\prod_{p|N}\tilde{F}_p\left(B(S,\lambda,N);p^{k-\frac{1}{2}}\right)q^{N/\Delta}$$

という形のものがえられる。これは multiplier system u_S に関する weight $k+(1/2)$ の modular form である。ここで $\Delta=2\det(2S)$,

$$B(S,\lambda,N)=\begin{pmatrix}S&S\lambda\\{}^t\lambda S&\frac{N}{d}+{}^t\lambda S\lambda\end{pmatrix}$$

とする。また、 B が even $\mathbb{Z}_p$-integral でないときは singular series $F_p(B;X)$ は 0 とする。k が $k\equiv n$ mod 2 の正整数を走るとき、 multiplier system は k に depend しない。

Key Lemma: Λ を有限集合、 $U(\mathbb{C}^\Lambda)$ に値を持つ multiplier sustem u, 正整数 k, Δ と vector 値 Laurent 多項式 $\vec{\Phi}_N(X)=(\Phi_{\lambda,N})\in\mathbb{C}[X_2+X_2^{-1},X_3+X_3^{-1},\dots,X_p+X_p^{-1},\dots]^\Lambda$, $(N=1,2,3,\dots)$ が与えられているとする。$k'\equiv k$ mod 2 なる無限個の正整数 k' に対して multipler system u をもつ weight $k'+(1/2)$ の vector 値 modular form

$$\vec{\varphi}(k';\tau)=\vec{b}(k';0)+\sum_N H(k',\mathfrak{d}_N)\mathfrak{f}_N^{k-(1/2)}\vec{a}(k':N)q^{N/\Delta}$$

であって、 $\vec{a}(k',N)$ の各成分が

$$a_\lambda(k';N)=\Phi_{\lambda,N}(\{p^{k-(1/2)}\})$$

という形であるものがあるとする。また、 各 k' に対して $\vec{\varphi}(k';,\tau)$ の成分は $\mathcal{H}_{k'+\frac{1}{2}}(\tau)$ の適当な translation の一次結合であるとする。

このとき、 Hecke eigen form

$$g(\tau)=\sum_{\substack{n>0\\(-1)^k n\equiv 0,\,1\ (4)}} c(n)q^n\in S^+_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$$

に対して

$$\sum_{N>0} c(\mathfrak{d}_N)\mathfrak{f}_N^{k-(1/2)}\vec{\Phi}_N(\alpha_p)q^{N/\Delta}$$

は multiplier system u をもつ weight $k+(1/2)$ の modular form である。

注意; multiplier system u は既約としてよい。既約な multiplier system を持つ vector valued modular form は与えられた ($SL_2(\mathbb{A})$ の) irreducible automorphic representaion のなかで up to scalar で unique であることに注意する。(ただしすべての有限素点において local representaion が principal series であると仮定する) 仮定から multiplier system u をもつ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f)$ の Whittaker 関数が $\vec{\Phi}_N(X)$ で表わされることがわかる。このことが証明の実質的な部分となるが詳細は省略する。

この Key Lemma と Eisenstein 級数が実際 Siegel modular form であるという事実から定理を示すことができる。

§ 実例

Ramanujan delta function は $\Delta(\tau)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)q^n$ で定義される。

$$(1-p^{11/2}\alpha_pX)(1-p^{11/2}\alpha_p^{-1}X)=1-a(p)X+p^{11}X^2$$

とおく。13 以下の素数 p に関する Fourier 係数 $a(p)$ の値は次のとおりである。

p	$a(p)$
2	−24
3	252
5	4830

p	$a(p)$
7	−16744
11	534612
13	−577738

weight 13/2 の modular form $\delta(\tau)$ を次のように定義する。

$$\delta(\tau)=\frac{1}{8\pi\sqrt{-1}}(E_4'(4\tau)\theta(\tau)-2E_4(4\tau)\theta'(\tau))=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)q^n,$$

$$E_4(\tau) = 1 - 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n, \quad \theta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$$

とおく。$\delta(\tau)$ は志村対応によって Δ と対応する Kohnen plus subspace $S_{13/2}^{+}(\Gamma_0(4))$ の元である。fundamental discriminant D に対して $c(D)$ の値をいくつか示す。

D	$c(D)$
1	1
5	120
8	−240
12	1440
13	−1320
21	5040

D	$c(D)$
24	−12960
28	13440
33	−6480
40	23520
44	−43680
56	87360

D	$c(D)$
60	−51840
105	272160
120	−123840
140	−651840
168	−2721600

$D > 0$ を fundamental discriminant とするとき、

$$c(n^2D) = c(D)\sum_{d|n}\mu(d)\chi_D(d)d^{11}a\left(\frac{n}{d}\right)$$

が成り立っている。ここで χ_D は二次拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})/\mathbb{Q}$ に対応する Dirichlet 指標、$\mu(d)$ は Möbius 関数である。

$$A(B) = c(\mathfrak{d}_B)\mathfrak{f}_B^{k-\frac{1}{2}}\prod_p \tilde{F}_p(B; p^{-13/2}\alpha_p)$$

とおけば $F(Z) = \sum_{B>0} A(B)\mathbf{e}(BZ)$ は degree 12, weight 12 の Siegel cusp form である。$F(Z)$ は [2] で与えられている degree 12, weight 12 の Siegel cusp form の -120 倍である。

$A(B)$ が 120 の倍数であることがつぎのようにしてわかる。まず、

$$\mathfrak{f}_B^{11/2}\tilde{F}_p(B;\alpha_p)$$

が整数であることに注意する。また、$\mathfrak{d}_B \neq 1$ のときは $c(\mathfrak{d}_B)$ が 120 の倍数なので D_B が完全平方数の場合を考えれば十分である。B の $\mathbb{Q}_p$ における Hasse invariant を $h_p(B)$ で表わすとき、$h_\infty(B) \neq \langle -1,-1\rangle_\infty$ なので $h_p(B) \neq \langle -1,-1\rangle_p$ となる有限素点 p が存在する。このような素点 p では。$D_B \in (\mathbb{Q}_p^\times)^2$ で B が $\mathbb{Q}_p$ 上 split しないとき、$F_p(B;,X)$ は $(1-p^6X)(1-p^7X)$ で割り切れることを示すことができる。また、

$$a(p) \equiv p^5 + p^6 \mod 120$$

が成り立つので $\mathfrak{f}_B^{11/2}\tilde{F}_p(B;\alpha_p)$ は 120 の倍数である。

$F(Z)$ の Fourier 係数 $A(B)$ の $-1/120$ 倍を [2] から引用して次に示す。

D_B	coefficient	$2B$
4	1	D_{12}
4	1	D_4E_8
5	-1	A_4E_8
8	2	$A_1A_3E_8$
8	2	A_1D_{11}
8	2	D_5E_7
13	11	A_{12}
16	40	$A_1D_4E_7$
16	40	$A_1^2D_{10}$
16	40	$A_1^4E_8$
16	40	D_6^2
16	-24	A_3D_9
16	-24	D_5D_7
16	-88	D_4D_8

REFERENCES

1. J. Arthur, *Unipotent automorphic representations: conjectures*, Asterisque **171-172** (1989), 13–71.
2. R. E. Borcherds, E. Freitag, and R. Weissauer, *A Siegel cusp form of degree 12 and weight 12*, J. Reine Angew. Math. **494** (1998), 141–153.
3. S. Breulman and M. Kuss, *On a conjecture of Duke-Imamoglu*, preprint.
4. H. Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters*, Math. Ann. **217** (1975), 271–285.
5. J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups. Third edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, vol. 290., Springer-Verlag, New York, 1999.
6. M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms. Progress in Mathematics*, vol. 55, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, Mass., 1985.
7. E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.
8. T. Ibukiyama, *Conjecture on the lifting of modular forms to Siegel modular forms*, informal note.
9. H. Katsurada, *An explicit formula for Siegel series*, Amer. J. Math. **121** (1999), 415–452.
10. Y. Kitaoka, *Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms*, Nagoya Math. J. **95** (1984), 73–84.
11. W. Kohnen, *Modular forms of half-integral weight on* $\Gamma_0(4)$, Math. Ann. **248** (1980), 249–266.
12. W. Kohnen and D. Zagier, *Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip*, Invent. Math. **64** (1981), 175–198.
13. G. Shimura, *Euler products and Eisenstein series. CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, vol. 93, the American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
14. G. Shimura, *Euler products and Fourier coefficients of automorphic forms on symplectic groups*, Invent. Math. **116** (1994), 531–576.
15. G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, 11, 1974.
16. G. Shimura, *On Eisenstein series*, Duke Math. J. **50** (1983), 417–476.
17. G. Shimura, *On modular forms of half integral weight*, Ann. of Math. **97** (1973), 440–481.
18. D. Zagier, *Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'aprés H. Maass)*, Seminar on Number Theory 1979–80, Paris, Progr. Math., 12,, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981, pp. 371–394.