表現論シンポジウム講演集, 1999
pp.161-173

Unitary highest weight module の Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数について

加藤昇平 (Shohei Kato)

Department of Mathematics, Kyushu University

1 Introduction

$\mathfrak{g}_0$ をエルミート型の実単純リー代数とする. $\mathfrak{g}_0$ の既約ユニタリ最高ウエイト表現は Enright-Howe-Wallach [3] や Jakobsen [9] によって分類されている. $\mathfrak{g}_0$ が古典型 $Sp(n,\mathbb{R})$, $U(p,q)$, $O^*(2n)$ のとき, 既約ユニタリ最高ウエイト表現の Gelfand-Kirillov 次元や Bernstein 次数は reductive dual pair の理論を用いて計算されている [16]. 即ち, 表現が scalar minimal K-type のときに, この2つの量を調べればよいのだが, そのために determinantal variety と呼ばれるある代数多様体の次元や次数を計算している. この次数に関する公式は, Giambelli-Thom-Porteous の公式と呼ばれている. $\mathfrak{g}_0$ が例外型のとき, この議論は使えない. しかし, Poincaré 多項式 (表現空間の filtration の次元に関する多項式) の漸近挙動は定積分の形になっている (§3.1). 被積分関数や積分領域は, 表現空間の K-type への分解や $\mathfrak{k}$ の既約表現の Weyl の次元公式から決まる. この積分は Selberg 型の積分と関係している [11],[13]. また, ガンマ関数を使って計算することもできる [5],[15].

ここでは, 例外型の scalar type における Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数を上の積分を用いて計算した. またそのときに現れる積分のパラメータが, 制限ルート系の言葉で書けることも示した (Theorem 3.1). この表示は古典型, 例外型に共通である. 例外型の non-scalar type については, K-type への分解がわかるものだけ計算した (Theorem 4.1, 4.2). 積分にあらわれるパラメータは, scalar type のときと同じで, Bernstein 次数については古典型における [16] の結果 (Theorem B) と比べた (Remark 4.3).

2 準備

2.1 Hermitian Lie algebra

ここでは, リー代数のルート系やウエイトに関する記号を準備する.

$\mathfrak{g}_0$ を non-compact な実単純リー代数とする．$\mathfrak{g}_0$ の Cartan 分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ を一つとり, $\mathfrak{k}_1 := [\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_0]$ とおく．$\mathfrak{k}_1 \neq \mathfrak{k}_0$, 即ち $\mathfrak{g}_0$ は Hermitian type と仮定する．$\mathfrak{c}_0$ を $\mathfrak{k}_0$ の center とすると, $\mathfrak{c}_0$ は 1 次元で, $\mathfrak{k}_1$ は 半単純となり, $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{c}_0$ と分解できる．

$\mathfrak{t}_0$ を $\mathfrak{k}_0$ の Cartan 部分代数とすると, $\mathfrak{t}_0$ は $\mathfrak{g}_0$ の Cartan 部分代数でもある．$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}, \mathfrak{t}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{t}_0$ の複素化とする．Δ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ のルート系, $\mathfrak{g}_\alpha$ を $\alpha \in \Delta$ に対応するルート空間とする．ルート α が compact (resp. non-compact) であるとは, $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}$) を満たすことをいう．$\Delta_c$ (resp. Δ_n) を Δ におけるすべての compact (resp. non-compact) ルートの全体とすると, disjoint decomposition $\Delta = \Delta_c \cup \Delta_n$ を得る．

$Y_0 \in \sqrt{-1}\mathfrak{c}$ で, $\gamma(Y_0) = \pm 1$ for any $\gamma \in \Delta_n$ なるものが存在する．Δ には $\Delta_n^\pm := \Delta^\pm \cap \Delta_n = \{\gamma \in \Delta_n \mid \gamma(Y_0) = \pm 1\}$ を満たすような順序が存在する．このような順序を一つ固定して, さらに $\Delta_c^\pm = \Delta^\pm \cap \Delta_c$ とおく．

[3] のようにして, maximally strongly orthogonal subset $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\} \subset \Delta_n^+$ を γ_i が $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}$ に直交するような Δ_n^+ の元となるように作る．r は $\mathfrak{g}_0$ の split rank となる．

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \Delta^+$ を単純ルートの全体とする．すると, この中に唯一 non-compact ルートが存在する．これを $\alpha = \gamma_1$ とする．Killing 形式を $B(\cdot, \cdot)$ と書く．Killing 形式の $\mathfrak{t}$ への制限は 非退化な対称双一次形式である．これによって, $\mathfrak{t}$ とその dual $\mathfrak{t}^*$ を同一視することで $\mathfrak{t}^*$ に非退化な対称双一次形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が入る．

基本ウエイト ω_j を $\langle \alpha_i, \omega_j \rangle / \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = \delta_{ij}$ で定義する．特に, non-compact 単純ルート α に対応する基本ウエイトを $\omega = \zeta$ と書く．言い換えると, $\zeta \in \mathfrak{t}^*$ は,

$$\langle \zeta, \gamma \rangle = 0 \quad (\forall \gamma \in \Delta_c), \qquad \langle \zeta, \alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

で特徴づけられる．

エルミート型の単純リー代数についてこれらのデータをまとめる:

	CI	$AIII$		$DIII$	
$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{su}(p, q)$		$\mathfrak{so}^*(2n)$	
r	n	$\min(p, q)$		$[n/2]$	
c	$1/2$	1		2	
tube	yes	yes$(p = q)$	no$(p \neq q)$	yes(n:even)	no(n:odd)
long	1	1	1	1	1
middle	1	2	2	4	4
short	0	0	$2\|p - q\|$	0	4

	DI	BI	EIII	EVII
$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{so}(2,2n-2)$	$\mathfrak{so}(2,2n-1)$	$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$
r	2	2	2	3
c	$n-2$	$(2n-3)/2$	3	4
tube	yes	yes	no	yes
long	1	1	1	1
middle	$2n-4$	$2n-3$	6	8
short	0	0	8	0

ここでは, [3] の notation に従うことにする. c は Wallach set の interval の長さであり, [3] の Table 2.9 で与えられている. "tube" とは, 対応するエルミート対称空間が tube type か否かということである. "long", "middle", "short" は, $\mathfrak{g}$ の制限ルート系の重複度を表わす [7, Ch.X, Table VI],[20, p336].

2.2 最高ウエイト表現

$\mathfrak{b}=\mathfrak{t}\oplus(\bigoplus_{\gamma\in\Delta^+}\mathfrak{g}_\gamma)$ を Borel 部分代数とし, $\mathfrak{q}=\mathfrak{k}+\mathfrak{b}$ とすると, これは $\mathfrak{g}$ の極大放物型部分代数である. $\mathfrak{p}^+=\bigoplus_{\gamma\in\Delta_n^+}\mathfrak{g}_\gamma$, $\mathfrak{p}^-=\bigoplus_{\gamma\in\Delta_n^-}\mathfrak{g}_\gamma$ とおくと, $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}^-\oplus\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}^+$ は characteristic element Y_0 をもつ graded リー代数である.

すると, $\mathfrak{q}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}^+$ は Levi 分解となる. ウエイト $\lambda\in\mathfrak{t}^*$ が Δ_c^+-dominant integral weight とは, 任意の $\gamma\in\Delta_c^+$ に対して $\langle\lambda,\gamma\rangle/\langle\gamma,\gamma\rangle\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が成り立つこととする.

最高ウエイト λ に対応する $\mathfrak{k}$ の有限次既約表現を $F(\lambda)$ とする. 一般化された Verma module を,

$$N(\lambda):=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{q})}F(\lambda),$$

で定義する. ここで, $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数で, $F(\lambda)$ は $\mathfrak{p}^+$ が 0 で作用する $\mathfrak{q}$-module とみなしている. 定義から, $N(\lambda)$ は $\mathfrak{g}$ の最高ウエイト表現である. $N(\lambda)$ が極大な $\mathfrak{g}$ の部分表現をもつことも知られており, これを $Z(\lambda)$ と書くことにする. 既約な quotient $N(\lambda)/Z(\lambda)$ を $L(\lambda)$ と書くことにする. $N(\lambda)$ は Verma module $M(\lambda):=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{b})}\mathbb{C}_\lambda$ の既約な quotient でもある. 特に $F(\lambda)$ が 1 次元表現のとき, 即ち, $\lambda\in\mathbb{C}\zeta$ のとき, $L(\lambda)$ を scalar type とよび, そうでないものを non-scalar type とよぶ.

2.3 Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数の定義

$R:=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_N]$ とし, 次数で次数環とみなす. $M=\sum_{q=0}^{\infty}M_q$ を R 上の次数加群とする. M は有限生成と仮定すると,

$$\varphi_M(n):=\sum_{q\leq n}\dim_{\mathbb{C}}M_q<\infty$$

とおける. Hilbert-Serre の定理から, $\deg \overline{\varphi}_M \leq N$ で, 十分大きい n に対して $\overline{\varphi}_M(n) = \varphi_M(n)$ なる n の多項式 $\overline{\varphi}_M$ が存在する.

$$\operatorname{Dim} M := \deg \overline{\varphi}_M$$

とし, $\overline{\varphi}_M(n)$ の最高次の係数を $c(M)/(\operatorname{Dim} M)!$ と書いたとき, $c(M)$ は整数となる.

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$上のリー代数, $\{U_n(\mathfrak{g})\}_{n=0}^{\infty}$ を $U(\mathfrak{g})$ の standard filtration とする. Poincaré-Birkhoff-Witt の定理より, $\mathrm{gr} U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$ は対称代数 $S(\mathfrak{g})$ と同型である.(さらに $S(\mathfrak{g})$ は $(\dim \mathfrak{g})$ 変数の多項式環と同型)

V を有限生成 $U(\mathfrak{g})$-module とし, V_0 を generating subspace とする. $L(\lambda)$ はこの設定を満たす.

$$\begin{aligned}
V_n &:= U_n(\mathfrak{g}) \cdot V_0 \\
d_{V,V_0}(n) &:= \dim V_n \\
M_n &:= V_n/V_{n-1} \\
M &:= \sum_{n=0}^{\infty} M_n
\end{aligned}$$

とし, $\mathfrak{g}$ の M への作用を, $X \in \mathfrak{g}, \overline{v} = v + V_{n-1}$ に対して

$$X\overline{v} := Xv + V_n \in M_{n+1}$$

とすれば, M は $S(\mathfrak{g})$-加群になる. M_0 が M を生成し, $d_{V,V_0}(n) = \varphi_M(n)$ となるのは明らか. そして, $\operatorname{Dim} M, c(M)$ はそれぞれ V_0 のとり方に依らない. これをそれぞれ $\operatorname{Dim} V$, $c(V)$ と書いて, V の Gelfand-Kirillov 次元, Bernstein 次数と呼ぶ.

2.4 ユニタリ最高ウエイト表現

既約ユニタリ最高ウエイト表現の全体は 2 つに分けられる: 1 つは既約な generalized Verma module の集合でもう 1 つは Wallach set と呼ばれる族である.

scalar type $L(z\zeta)$ の表現の場合, 前半の系列に属する既約ユニタリ最高ウエイト表現は

$$\{L(z\zeta) \mid z \in \mathbb{R}, z < -(r-1)c\}$$

であり, Wallach set に属するものの全体は

$$\{L(z\zeta) \mid z = 0, -c, \ldots, -(r-1)c\}$$

である ($r = \mathbb{R}\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}_0$ や c の値は §2.1 を見よ). また, $m = 0, \ldots, r$ に対して,

$$Q_m := \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{p}^-)} L(-mc\zeta), \qquad \overline{\mathcal{O}_m} := V(Q_m),$$

とおくと,

$$L(-mc\zeta) = U(\mathfrak{p}^-)/Q_m \qquad (\text{次数 } U(\mathfrak{p}^-)\text{-module として})$$

となる. 従って, $L(-mc\zeta)$ の Gelfand-Kirillov 次元は, 多様体 $\overline{\mathcal{O}_m}$ の次元に一致し, $L(-mc\zeta)$ の Bernstein 次数は, 代数幾何学の意味での cycle $[\overline{\mathcal{O}_m}]$ の重複度となる. また, $\{\overline{\mathcal{O}_m}\}_{m=0}^r$ が $\mathfrak{p}^-$ の $K_{\mathbb{C}}$-stable な閉部分集合のすべてであることや, Q_m が代数多様体 $\overline{\mathcal{O}_m}$ の定義イデアルになることも知られている.

3 Scalar case

3.1 Main theorem

ここでは, scalar K-type のユニタリ最高ウエイト表現 $L(-mc\zeta)$ ($m = 0, \dots, r$, 但し $m = r$ は $m > r-1$ を表わすものとする) の Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数を考える. §1.1 で述べたように Bernstein 次数は, 定積分の形で書ける. まず,

$$I^\alpha(s,m) := \int_{D_m} \prod_{1\le i<j\le m} |x_i - x_j|^\alpha \, (x_1 x_2 \dots x_m)^s dx_1 \cdots dx_m$$

とおく. ここで,

$$D_m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_i \ge 0, x_1 + \cdots + x_m \le 1\}$$

である. この積分は [11], [13, Example .10.7(c)], [15, Theorem 2.2] によって計算されている. 具体的には

$$I^\alpha(s,m) = \frac{m! \prod_{i=1}^m \Gamma(i\alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2)^m} \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma((s+1)+(i-1)\alpha/2)}{\Gamma(1+m(s+1)+(m-1)m\alpha/2)}.$$

Theorem 3.1 $m = 0, 1, \cdots, r$ とする. 既約なユニタリ最高ウエイト表現 $L(-mc\zeta)$ の Gelfand-Kirillov 次元 d_m と Bernstein 次数 $c(L(-mc\zeta))$ は次のとおり:

$$d_m := \operatorname{Dim}(L(-mc\zeta)) = m(s_m+1) + (m-1)mc.$$

即ち d_m は, 被積分関数の斉次次数となっている.

$$c(L(-mc\zeta)) = \frac{d_m!}{\prod_{\alpha\in\Delta_c^+\setminus\Delta_{cm}^+}\langle\alpha, \rho_c\rangle} \times \frac{1}{m!} I^{2c}(s_m, m),$$

但し, $s_m = s_r - 2c(r-m)$ ($m = 0, \dots, r$) で, s_r は制限ルート系の short root の root multiplicity の 1/2 となる. 即ち, s_r は $\mathfrak{g}_0$ が tube type の時 0 で, $U(p,q)(p \ne q)$ のとき $s_r = |p-q|$,$SO^*(2n)$ (n : 奇数) のとき $s_r = 2$, EIII のとき $s_r = 4$ となる. また $2c$ は, 制限ルート系における $-\frac{1}{2}(\gamma_j - \gamma_k)|_{\mathfrak{t}^-}$ $(1 \le j < k \le r)$ の root multiplicity である.

Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数, 現れる積分の形を表にしておく:

	$SO(2,2n-2)$	$SO(2,2n-1)$	EIII	EVII
$m=0$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	$0,1$
$m=1$	$2n-3,2$	$2n-2,2$	$11,12$	$17,78$
$m=2$	$2n-2,1$	$2n-1,1$	$16,1$	$26,3$
$m=3$				$27,1$

	$SO(2,2n-2)$	$SO(2,2n-1)$	EIII	EVII
$m=0$				
$m=1$	$I(2n-4,1)$	$I(2n-3,1)$	$I(10,1)$	$I(16,1)$
$m=2$	$I^{2n-4}(0,2)$	$I^{2n-3}(0,2)$	$I^6(4,2)$	$I^8(8,2)$
$m=3$				$I^8(0,3)$

3.2 証明の概略

まず $L(\lambda)$ の filtration を確認する. $L:=L(\lambda)$ とする. L の generating subspace L_0 として $L_0=F(\lambda)$ がとれるから, $L_l:=\bigoplus_{l'=0}^{l} S(\mathfrak{p}^-)_{l'}L_0$ とおく.

Lemma 3.2 (i) $m>r-1$ $(m=r)$ のとき, 一般化された Verma module $N(-mc\zeta)$ は既約である. 即ち, $N(-mc\zeta)=L(-mc\zeta)$ である [3, Theorem 2.4] .

(ii) $m=0,1,\dots,r-1,r$ に対しては, 既約最高ウエイト加群 $L(-mc\zeta)$ の K-type への分解は,

$$L(-mc\zeta)=\bigoplus_{n_1\geq\cdots\geq n_m\geq 0, n_i\in\mathbb{Z}} F(-mc\zeta-n_1\gamma_1-\cdots-n_m\gamma_m)$$

と, 与えられる [22, Theorem 5.10], [19].

この Lemma から

$$\dim L_l=\sum_{\langle-\zeta,\mu\rangle\leq\langle-\zeta,\lambda\rangle+l}\dim F(\mu)$$

となる. ここで和は $\mu=\lambda-n_1\gamma_1-\cdots-n_m\gamma_m$ を走る.

これは, 十分大きな l に対しては l の多項式になる. この多項式の leading term を調べればよい.

$$\langle-\zeta,\mu\rangle\leq\langle-\zeta,\lambda\rangle+l \iff n_1+..+n_m\leq l$$

なので,

$$\dim L_l = \sum_{n_1+\cdots+n_m \leq l} \dim F(\mu).$$

Weyl の次元公式より,

$$\dim F(\mu) = \prod_{\alpha \in \Delta_c^+} \frac{\langle \alpha, \mu + \rho_c \rangle}{\langle \alpha, \rho_c \rangle}.$$

ここで, strongly orthogonal roots についての事実をいくつか述べる. $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ に対して, $H_\lambda \in$ を $B(H_\lambda, h) = \lambda(h)$ for all $h \in \mathfrak{t}$ なるものとする.

$$\mathfrak{t}^+ := \{H \in \mathfrak{t} \mid \gamma_i(H) = 0, i = 1, \ldots, r\},$$

$$\mathfrak{t}^- := \sum_{i=1}^r \mathbb{C} H_{\gamma_i},$$

とおけば, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^+ \oplus \mathfrak{t}^-$ となる.

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^-) := \{\alpha|_{\mathfrak{t}^-} \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}), \alpha|_{\mathfrak{t}^-} \neq 0\}$$

を制限ルート系とよぶ.

Lemma 3.3 (Moore)

(i) $\alpha \in \Delta_c^+$ ならば, $\alpha|_{\mathfrak{t}^-}$ は次のどれか:

- $-\frac{1}{2}\gamma_i$ for some $i = 1, \ldots, r$.
- $-\frac{1}{2}(\gamma_k - \gamma_l)$ for some $1 \leq k < l \leq r$.
- 0.

(ii) $\alpha \in \Delta_n^+$ ならば, $\alpha|_{\mathfrak{t}^-}$ は次のどれか:

- $\frac{1}{2}\gamma_i$ for some $i = 1, \ldots, r$.
- $\frac{1}{2}(\gamma_k + \gamma_l)$ for some $1 \leq k < l \leq r$.

(iii) 制限ルート系 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^-)$ は,

- $\mathfrak{g}_0$ が tube type のとき

$$\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^-) = \{\gamma_i, \frac{1}{2}(\gamma_j \pm \gamma_k) \mid 1 \le i \le r, 1 \le k < j \le r\} : C_r\text{型}.$$

- $\mathfrak{g}_0$ が non-tube type のとき

$$\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^-) = \{\frac{1}{2}\gamma_i, \gamma_i, \frac{1}{2}(\gamma_j \pm \gamma_k) \mid 1 \le i \le r, 1 \le k < j \le r\} : BC_r\text{型}.$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Delta^+_{cm} &:= \{\alpha \in \Delta^+_c \mid (n_1\gamma_1 + \cdots + n_m\gamma_m, \alpha) = 0\}, \\ \Delta^+_{cmi} &:= \{\alpha \in \Delta^+_c \mid (n_1\gamma_1 + \cdots + n_m\gamma_m, \alpha) = -n_i\}, s_{mi} := \#\Delta^+_{cmi}, \\ \Delta^+_{cmkl} &:= \{\alpha \in \Delta^+_c \mid (n_1\gamma_1 + \cdots + n_m\gamma_m, \alpha) = -n_k + n_l\}, a_{mkl} := \#\Delta^+_{cmkl}, \end{aligned}$$

とおく. これらについて次のことが示せる.

Lemma 3.4 (i) $\Delta^+_{cr} = \{\alpha \in \Delta^+_c \mid \alpha|_{\mathfrak{t}^-} = 0\}$.

(ii) $\Delta^+_{cri} = \{\alpha \in \Delta^+_c \mid \alpha|_{\mathfrak{t}^-} = -\frac{1}{2}\gamma_i|_{\mathfrak{t}^-}\}$ for $1 \le i \le r$.

(iii) $\Delta^+_{crkl} = \{\alpha \in \Delta^+_c \mid \alpha|_{\mathfrak{t}^-} = -\frac{1}{2}(\gamma_k - \gamma_l)|_{\mathfrak{t}^-}\}$ for $1 \le k < l \le r$.

(iv) $\Delta^+_{cmkl} = \Delta^+_{crkl}$ for $1 \le k < l \le m \le r$.

(v) $\Delta^+_{cmi} = \Delta_{cri} \cup (\cup_{l=i+1}^r \Delta^+_{cril})$ for $1 \le i \le m \le r$.

(vi) $\Delta^+_{c,m-1,i} = \Delta_{cmi} \cup \Delta^+_{cmim}$ for $1 \le i \le m-1$ (disjoint union).

Lemma 3.5 (i) $a_{mkl} = 2c$.

(ii) $s_{m-1,i} - s_{mi} = a_{mim} = 2c$.

(iii) s_{mi} は i によらない (これを s_m とおく).

以上のデータを利用して $\dim L_l$ を計算しよう. Weyl の次元公式と,

$$\Delta^+_c = \Delta^+_{cm} \cup (\bigcup_{i=1}^m \Delta^+_{cmi}) \cup (\bigcup_{1 \le k < l \le m} \Delta^+_{cmkl})$$

から，

$$\begin{aligned}\dim F(\mu) &= \prod_{\alpha\in\Delta_c^+}\frac{\langle\alpha,\mu+\rho_c\rangle}{\langle\alpha,\rho_c\rangle}\\ &= C\times\prod_{i=1}^m\prod_{\alpha\in\Delta_{cmi}^+}\langle\alpha,\mu+\rho_c\rangle\prod_{1\le k<l\le m}\prod_{\alpha\in\Delta_{cmkl}^+}\langle\alpha,\mu+\rho_c\rangle.\end{aligned}$$

ここで

$$C=\frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta_c^+\setminus\Delta_{cm}^+}\langle\alpha,\rho_c\rangle}.$$

従って，

$$\begin{aligned}\dim L_l &= C\sum\prod_{i=1}^m\prod_{\alpha\in\Delta_{cmi}^+}\langle\alpha,\mu+\rho_c\rangle\prod_{1\le k<l\le m}\prod_{\alpha\in\Delta_{cmkl}^+}\langle\alpha,\mu+\rho_c\rangle\\ &= C\sum\prod_{i=1}^m\prod_{\alpha\in\Delta_{cmi}^+}(n_i+\langle\alpha,\rho_c\rangle)\prod_{1\le k<l\le m}\prod_{\alpha\in\Delta_{cmkl}^+}(n_k-n_l+\langle\alpha,\rho_c\rangle).\end{aligned}$$

ここで和 $\sum$ は，

$$n_1\ge n_2\ge\cdots\ge n_m\ge 0,\qquad n_1+\cdots+n_m\le l$$

の範囲をわたる．

$$\begin{aligned}\dim L_l &= Cl^{d_m}\frac{1}{l^m}\sum\prod_{1\le k<l\le m}\prod_{\alpha\in\Delta_{cmkl}^+}\frac{n_k-n_l+\langle\alpha,\rho_c\rangle}{l}\prod_{i=1}^m\prod_{\alpha\in\Delta_{cmi}^+}\frac{n_i+\langle\alpha,\rho_c\rangle}{l}\\ &= Cl^{d_m}\int_{D'_m}\prod_{1\le k<l\le m}(x_k-x_l)^{a_{mkl}}\prod_{i=1}^m x_i^{s_{mi}}dx_1\cdots dx_m+(\text{lower order terms})\\ &= \frac{Cl^{d_m}}{m!}I^{2c}(s_m,m)+(\text{lower order terms}).\end{aligned}$$

最後の等号は，Lemma 3.5 を使った．

ここで，D'_m は，m 次元単体

$$D'_m=\{(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m\mid x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_m\ge 0,x_1+\cdots+x_m\le 1\}$$

である． ∎

4 Non-scalar case

既約ユニタリ最高ウエイト表現の K-type への分解が分かる時, scalar case のように Gelfand-Kirillov 次元や Bernstein 次数を求めることができる. なお, $\mathfrak{g}_0$ が古典型のときは計算されている. また, $N(\lambda)$ が既約のときも既にわかっているので, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{e}_{7(-25)}$ とし, $L(\lambda)$ が Wallach set に属するときのみ考えればよい.

β : unique maximal non-compact root of Δ^+, λ_0 : Δ_c^+-dominant integral weight normalized by $\langle \lambda_0 + \rho, \beta \rangle = 0$, $\Delta_c(\lambda_0) := \{\alpha \in \Delta_c \mid \langle \lambda_0, \alpha \rangle = 0\}$ とし, $\{\pm\beta, \Delta_c(\lambda_0)\}$ を $\pm\beta$ と $\Delta_c(\lambda_0)$ で生成される Δ の部分ルート系, $Q(\lambda_0)$ を β を含む $\{\pm\beta, \Delta_c(\lambda_0)\}$ の部分単純ルート系とする [3, p100, 101].

4.1 EIII, case II, the last unitarizable place

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{e}_{6(-14)}$ のときを考える. $Q(\lambda_0) = SO(2,8)$ とする ([3] ではこの場合を case II とよんでいる). この仮定を, Δ を $\mathbb{R}^8$ の中に実現したときの表現にかえると ([3, p131]),

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_0, \alpha_i \rangle = 0, \quad 2 \le i \le 5, \qquad \langle \lambda_0, \alpha_6 \rangle \ne 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \lambda_0 = (0,0,0,0,a,-b',-b',b') \quad (a : \text{自然数}, a + 3b' = -22). \end{aligned}$$

この時, $\lambda := \lambda_0 + z\zeta$ とおくと, $z \le 4$, $z = 7$ のとき $L(\lambda)$ は unitarizable である [3, Theorem 12.4]. $z < 4$ のとき $N(\lambda) = L(\lambda)$ であり, $z = 4, 7$ が Wallach set に属するパラメータである.

$z = 7$ のときの $L(\lambda)$ の K-type への分解は次で与えられる [3, Proposition 12.5] :

$$L(\lambda) = \bigoplus_{n_1 \ge n_2 \ge 0, n_i \in \mathbb{Z}} F(\lambda - n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2).$$

Theorem 4.1 $Q(\lambda_0) = SO(2,8)$, $\lambda = \lambda_0 + 7\zeta$ とする. $L(\lambda)$ の Gelfand-Kirillov 次元は 16, Bernstein 次数は 1 である.

sketch of proof : $L(\lambda)$ の分解から,

$$\dim L_l = \sum_{n_1 + n_2 \le l, n_1 \ge n_2 \ge 0} \dim F(\mu).$$

但し, $\mu = \lambda_0 + 7\zeta - n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2$.

ここで, $\Delta_{c2}^+ = \{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, -e_2 + e_3, -e_2 + e_4, -e_3 + e_4\}$ となるので,

$$\langle \alpha, \lambda_0 \rangle = 0 \text{ for all } \alpha \in \Delta_{c2}^+.$$

従って, $\dim F(\mu)$ を計算するときに現れる C が scalar type の時と同じ. これは, $\dim L_0$ の leading term が scalar type の $m = 2$ の時と同じになることを意味する. ∎

4.2 EVII, case II, the last unitarizable place

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{e}_{7(-25)}$ のときを考える. $Q(\lambda_0) = SO(2,10)$ とする ([3] ではこの場合を case II とよんでいる). この仮定を, Δ を $\mathbb{R}^8$ で実現したときの表現にかえると ([3, p140]),

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_0, \alpha_i \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq 5, \qquad \langle \lambda_0, \alpha_6 \rangle \neq 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \lambda_0 = (0,0,0,0,k,-k-17,17/2,-17/2) \quad (k \text{ は自然数}). \end{aligned}$$

$\lambda := \lambda_0 + z\zeta$ とおくと, $z \leq 5, z = 9$ のとき $L(\lambda)$ は unitarizable である [3, Theorem 13.4]. $z < 5$ のとき $N(\lambda) = L(\lambda)$ であり, $z = 5, 9$ が Wallach set に属するパラメータである.

$z = 9$ のときの $L(\lambda)$ の K-type への分解は次で与えられる [3, Theorem 13.10] :

$$L(\lambda) = \bigoplus_{n_1 \geq n_2 \geq 0, n_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq n_3 \leq k} F(\lambda - n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2 - n_3\delta).$$

ここで $\delta = \alpha_6 + \alpha_7$.

Theorem 4.2 $Q(\lambda_0) = SO(2,10), (\lambda_0)_{\alpha_6} = k, \lambda = \lambda_0 + 9\zeta$ とする. $L(\lambda)$ の Gelfand-Kirillov 次元は 26, Bernstein 次数は

$$\frac{3(2k+7)\prod_{i=1}^{6}(k+i)}{7!}.$$

sketch of proof : $L(\lambda)$ の分解から,

$$\dim L_l = \sum_{n_1+n_2 \leq l, n_1 \geq n_2 \geq 0} \sum_{n_3=0}^{k} \dim F(\mu).$$

但し, $\mu = \lambda_0 + 9\zeta - n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2 - n_3\delta$. $\Delta_{c2}^+ = \{\pm e_i + e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ となるので,

$$\langle \alpha, \lambda_0 \rangle = 0 \text{ for all } \alpha \in \Delta_{c2}^+.$$

従って,

$$\dim F(\mu) = \prod_{\alpha \in \Delta_{c2}^+} \frac{\langle \alpha, \mu + \rho_c \rangle}{\langle \alpha, \rho_c \rangle} \times C \times \prod_{i=1}^{2} \prod_{\alpha \in \Delta_{c2i}^+} \langle \alpha, \mu + \rho_c \rangle \prod_{\alpha \in \Delta_{c212}^+} \langle \alpha, \mu + \rho_c \rangle.$$

従って, ($\dim L_l$ の leading term) は ($m = 2$ の scalar type のときの leading term) と

$$\sum_{n_3=0}^{k} \prod_{\alpha \in \Delta_{c2}^+} \frac{\langle \alpha, \mu + \rho_c \rangle}{\langle \alpha, \rho_c \rangle}$$

の積となり, 具体的データから計算すると,

$$\sum_{n_3=0}^{k} \prod_{\alpha\in\Delta_{c2}^+} \frac{\langle\alpha,\mu+\rho_c\rangle}{\langle\alpha,\rho_c\rangle} = \frac{(2k+7)\prod_{i=1}^{6}(k+i)}{7!}$$

となる. ∎

Remark 4.3 この命題の Bernstein 次数は次のような解釈ができる:

$$\deg L(-8\zeta) \times \dim \sigma_k.$$

ここで, σ_k は $SO(9)$ の最高ウエイト $k\omega_{1,SO(9)}$ に対応する有限次既約表現である. 基本ウエイト $\omega_{1,so(9)}$ は $SO(9)$ の単純ルート α_1 に対応している.

References

[1] R. Brylinski and B. Kostant, Minimal representations of E_6, E_7, and E_8 and the generalized Capelli identity, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **91** (1994) 2469–2472.

[2] M. G. Davidson, T. J. Enright and R. J. Stanke, Differential operators and highest weight representations, Mem. Amer. Math. Soc. 94 (1991), no. 455.

[3] T. J. Enright, R. Howe and N. R. Wallach, A classification of unitary highest weight modules, Progress in Math. **40** (1983) 97–143, Birkhäuser.

[4] T. J. Enright and A. Joseph, An intrinsic analysis of unitarizable highest weight modules, Math. Ann. **288** (1990) 571–594.

[5] J. Faraut and A. Koranyi, Analysis on symmetric cones, Oxford, 1994.

[6] W. Fulton and P. Pragacz, Schubert varieties and degeneracy loci, Lect. Notes Math. **1689**, Springer, 1998.

[7] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces Academic Press, New York, San Francisco, London.(1978).

[8] H. P. Jakobsen, The last possible place of unitarity for certain highest weight modules, Math. Ann. **256** (1981) 439–447.

[9] H. P. Jakobsen, Hermitian symmetric spaces and their unitary highest weight modules, Jour. Funct. Anal. **52** (1983) 385–412.

[10] A. Joseph, Annihilators and associated varieties of unitary highest weight modules, Ann. scient. École Normal Superior, (1992) 1–45.

[11] K. W. J. Kadell, The Selberg-Jack symmetric functions, Adv. Math. **130**(1997) 33–102.

[12] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces, Amer. J. Math., **93** (1971) 753–809.

[13] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd ed., Oxford, 1995

[14] C. C. Moore, Compactication of symmetric spaces, II, Amer. J. Math. **86**(1964), 358–378.

[15] K. Nishiyama and H. Ochiai, Bernstein degree of singular unitary highest weight representations of the metaplectic group, Proc. Japan Acad. Ser. A, **75**(1999) 9–11.

[16] K. Nishiyama, H. Ochiai and K. Taniguchi, Bernstein degree and associated cycles of Harish-Chandra modules, – Hermitian symmetric case –, preprint (1999) 68 pages.

[17] F. Sato, On the stability of branching coefficients of rational representations of reductive groups, Comment. Math. Univ. St. Paul. **42** (1993), no. 2, 189–207.

[18] H. Schlichtkrull, One dimensional K-types in finite dimensional representations of semisimple Lie groups, Math. Scand. **54** (1984), 279–294.

[19] W. Schmid, Die Randwerte holomorpher Funktionen auf hermitesch symmetrischen Räumen, Invent. Math. **9** (1969/1970) 61–80.

[20] N. Shimeno, The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional K-type on a simply connected simple Lie group of Hermitian type, J. Funct. Analysis, **121** (1994) 330–388.

[21] D.Vogan, Associated varieties and unipotent representations, Progress in Math. **101** (1991) 315–388.

[22] N. R. Wallach, The analytic continuation of the discrete series, I, II, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979) 1–17, 19–37.