表現論シンポジウム講演集, 1999
pp.139-152

負曲率局所対称空間における類密度定理

木本一史
九州大学大学院数理学研究科
kimoto@zeta.math.kyushu-u.ac.jp
若山正人
九州大学大学院数理学研究科
wakayama@math.kyushu-u.ac.jp

1 Introduction

負曲率リーマン多様体 X の閉測地線の長さに関する分布の問題，すなわち，長さが与えられた正数 x 以下の閉測地線の個数の漸近評価については，多くの人々により研究され ([Margulis,1969], [DeGeorge,1977], [Gangolli,1977], etc.)，「素弦定理」とも呼ばれる次のような素数定理の類似が成り立つことが知られている．以下では，X として特に（体積有限な）負曲率局所リーマン対称空間の場合を考える．

定理 1.1 (素弦定理) 長さが x 以下の Xの閉測地線全体の集合を $E(x)$，素な閉測地線（素弦ともいう）全体からなる部分集合を $E^P(x)$ とする．すなわち，$l(C)$ で曲線 C の長さを表わすとき

$$\begin{aligned} E(x) &:= \{C : X \text{ の閉測地線 } \mid l(C) \leq x\}, \\ E^P(x) &:= \{C \in E(x) \mid C \text{ は素弦 }\}. \end{aligned}$$

このとき，$\pi(x) := |E(x)|$，$\pi^P(x) := |E^P(x)|$ とすると，ある正数 $h > 0$ が存在して，$x \to \infty$ のとき

$$\pi(x) \sim \pi^P(x) \sim \frac{e^{hx}}{hx}$$

が成り立つ（X が負曲率局所対称空間の場合，h は後で与える 2ρ に等しい）．□

この問題は、2つの方向に一般化された.

• 1つは，算術級数定理の類似と見なせる次のように定式化された問題である．基本群 Γ から1次のホモロジー群 $\Lambda = H_1(X, \mathbf{Z}) \cong \Gamma^{\mathrm{ab}} := \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ への自然な準同型 ϕ を考えると，Γ の共役類は Λ に well-defined な像を持つ．ある $\beta \in \Lambda$ を固定したとき，ϕ によって β に写されるような Γ の双曲型共役類 $[\gamma]$ に対応する閉測地線 C_γ の長さはどのように分布するか？これに対しては次の定理が知られている．([Adachi-Sunada,1987], [Epstein,1987], [Phillips-Sarnak,1987])．

定理 1.2 (ホモロジー素弦定理) 各 $\beta \in \Lambda$ に対して

$$\begin{aligned} E_\beta(x) &:= \{C_\gamma \in E(x) \mid \phi(\gamma) = \beta\}, \\ \pi_\beta(x) &:= |E_\beta(x)| \end{aligned}$$

とし，それぞれにおいて素弦に制限したものを $E_\beta^P(x)$, $\pi_\beta^P(x)$ とすると，β に依存しないで決まるある正数 $C_X > 0$ が存在して，$x \to \infty$ のとき

$$\pi_\beta(x) \sim \pi_\beta^P(x) \sim C_X \frac{e^{(d-1)x}}{x^{r/2+1}}$$

が成り立つ．ただし，$d = \dim(X)$, $r = \mathrm{rank}(\Lambda)$．□

Remark. 定理 1.2 は実際には，ϕ が任意の可換群 Λ への全射準同型のときにも成り立つ（定数 C_X は Λ には依存する）．

• あと 1 つは，ガロア拡大のフロベニウス置換に関するチャボタレフ密度定理（もちろん，これ自身が算術級数定理の一般化である）の類似と見なせるものである．各閉測地線 C に対して，それに沿った平行移動を考えると，制限ホロノミー群 M の共役類 F_C が自然に対応する．ある共役不変な部分集合 $\Omega \subset M$ を固定したとき，$F_C \subset \Omega$ となるような閉測地線 C の密度分布はどうなるか？これに対しては次がある（[SW, 1997]）．

定理 1.3 (ホロノミー密度定理) 制限ホロノミー群 M 上の任意の滑らかな類関数 f に対して，$x \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{C \in E(x)} f(F_C) = \int_M f(m)dm + O_{f,\Gamma}\left((\log \pi(x))^{\rho/d} \pi(x)^{-1/2d}\right)$$

が成り立つ．ただし dm は Mの正規化されたハール測度である．□

特に，f として M の共役不変な任意の部分集合 Ω の特性関数（を smoothing したもの）をとることにより，

系 1.4 M の共役不変な任意の部分集合 Ω に対して，

$$\lim_{x \to \infty} \frac{|\{C \in E(x) \mid F_C \in \Omega\}|}{\pi(x)} = \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{vol}(M)}$$

が成り立つ．□

この両者の一般化，あるいは精密化として，自然に次のような問題に至る．

一般に基本群 Γ から群 Λ への全射準同型 ϕ が与えられたとする．Λ のある共役類 $[\lambda_0]$ を固定したとき，$\phi([\gamma]) \subset [\lambda_0]$ となるような双曲型共役類 $[\gamma] \subset \Gamma$ に対応する閉測地線 C_γ の，ホロノミーに関する分布はどうなるか．すなわち，

$$E_{[\lambda_0]}(x) := \{C_\gamma \in E(x) \mid \phi(\gamma) \in [\lambda_0]\}$$

とおくとき，制限ホロノミー群 M 上の任意の滑らかな類関数 f に対して，類密度

$$\frac{1}{|E_{[\lambda_0]}(x)|}\sum_{C\in E_{[\lambda_0]}(x)} f(F_C)$$

の $x\to\infty$ のときの漸近評価はどのように与えられるだろうか？

本稿では，Λ が特に可換群の場合（つまり Λ がホモロジー群の部分群の場合）について上記の問題を扱う．

Remark. $\phi:\Gamma\to\Lambda$ で，Λ が（たとえアーベル群でなくても）有限群の場合は解析的な難しさがなく，より容易に扱える．

2 Preliminaries

負曲率局所リーマン対称空間 X は，実階数 1 の半単純実リー群 G，その極大コンパクト部分群 K，および uniform または non-uniform lattice Γ （つまり，G のねじれのない離散部分群であって，$\Gamma\backslash G$ がコンパクトであるか，または非コンパクトかつ体積有限となるもの）によって，$X=\Gamma\backslash G/K$ と実現される．このとき，Γ は X の基本群と同型であり，K は X のホロノミー変換群と同型であることが知られている．

$G=NAK$ を岩澤分解とし，$\mathbf{g}=\mathbf{n}+\mathbf{a}+\mathbf{k}$ を対応するリー環の岩澤分解とする．$(\mathbf{g},\mathbf{a})$ に対するルート系の正ルートは高々 2 個で，それを $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ （2 個ある場合には $\alpha_2=2\alpha_1$ である）とする．それぞれに対応するルート空間を $\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$ $(\mathbf{n}=\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)$ とし $m_j=\dim\mathbf{n}_j$, $\rho=\frac{1}{2}(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2)$ とおく．以下では，$\mathbf{R}\ni\nu\leftrightarrow(\nu/|\alpha_1|)\alpha_1\in\mathbf{a}^*$ によって $\mathbf{a}^*$ と $\mathbf{R}$ とを同一視する．但し，$|\cdot|$ は $\mathbf{g}$ のキリング形式から誘導された内積で決まる長さである．

X の普遍被覆空間 G/K は単連結な既約リーマン対称空間であるが，これは次の双曲空間 $H^n_{\mathbf{K}}$ （$\mathbf{K}=\mathbf{R}$：実数，$\mathbf{C}$：複素数，$\mathbf{H}$：四元数，$\mathbf{O}$：ケーリー八元数) のいずれかに同型である．各々の場合について，次元 $d=\dim G/K$ と対応する ρ の値は

$$\begin{aligned}
G/K &= H^n_{\mathbf{R}}: \quad d=n,\quad \rho=\frac{n-1}{2}\\
&= H^n_{\mathbf{C}}: \quad d=2n,\quad \rho=n\\
&= H^n_{\mathbf{H}}: \quad d=4n,\quad \rho=2n+1\\
&= H^2_{\mathbf{O}}: \quad d=16,\quad \rho=11
\end{aligned}$$

となる．後のため，$d-1-2\rho\leq 0$ となることに注意しておこう．

X の閉曲線たちがなす自由ホモトピーを考えると，その各同値類は基本群 Γ の双曲型共役類と 1 対 1 に対応する．1 つのホモトピー類の中には唯 1 つ測地線となるものが存在するが，その類が Γ の共役類 $[\gamma]$ と対応するものであるとき，対応する測地線を C_γ，その長さを $l(\gamma)$ で表わす．双曲型の元 $\gamma\in\Gamma$ は，ある双曲型の元 $\delta\in\Gamma$ とある自然数 $k>1$ によって$\gamma=\delta^k$ と書くことができないとき素な元であるという．素な元 γ に対応する共役類 $[\gamma]$ や閉測地線 C_γ のことをそれぞれ素な共役類，素閉測地線（素弦）という．また，双

曲型の元 γ が，ある素元 $\delta \in \Gamma$ とある自然数 $k > 1$ によって $\gamma = \delta^k$ と書くことができるとき，$j(\gamma) := k$ によって $j(\gamma)$ を定義する．

$M = Z_K(A)$ を A の K における中心化群とすると，M は制限ホロノミー群に同型である．また，Γ の双曲元 γ は MA の元に G-共役であることが知られている：$\gamma \overset{G}{\sim} h(\gamma) = m_\gamma a(\gamma) \in MA$ （と書く）．このとき，C_γ に沿った平行移動が誘導する制限ホロノミーが定める M の共役類は $[m_\gamma]$ で与えられるので，評価すべき量は，結局，M 上の滑らかな類関数 f が与えられたとき

$$\frac{1}{\pi_\beta(y)} \sum_{[\gamma]:\text{hyp.},l(\gamma)\le y,\phi(\gamma)=\beta} f(m_\gamma) \tag{1}$$

ということになる．ここで "$[\gamma]$:hyp." は，$[\gamma]$ が双曲型共役類をわたる和を表わす．

さて，類関数 f を既約指標で展開すると，

$$f(m) = \sum_{\sigma\in\hat{M}} \hat{f}(\sigma)\chi_\sigma(m) \tag{2}$$

であるから，

$$\sum_{[\gamma]:\text{hyp.},l(\gamma)\le y,\phi(\gamma)=\beta} f(m_\gamma) = \hat{f}(1)\pi_\beta(y) + \sum_{\sigma\ne 1} \hat{f}(\sigma)K_{\sigma,\beta}(y) \tag{3}$$

となる．ただしここで

$$\hat{f}(\sigma) = \int_M f(m)\overline{\chi_\sigma(m)}dm$$

$$K_{\sigma,\beta}(y) = \sum_{[\gamma]:\text{hyp.},l(\gamma)\le y,\phi(\gamma)=\beta} \overline{\chi_\sigma(m_\gamma)}$$

である．$\pi_\beta(y)$ の評価はホモロジー素弦定理により知られているので，$K_{\sigma,\beta}(y)$ の評価をすればよいことになる．そのために，次の 4 つの関数を導入する．

$$\begin{aligned}
G_{\sigma,\beta}(y) &:= \sum_{[\gamma]:\text{hyp.},l(\gamma)\le y,\phi(\gamma)=\beta} l(\gamma)e^{-\rho l(\gamma)}\overline{\chi_\sigma(m_\gamma)},\\
G^P_{\sigma,\beta}(y) &:= \sum_{[\delta]:\text{pr.},l(\delta)\le y,\phi(\delta)=\beta} l(\gamma)e^{-\rho l(\delta)}\overline{\chi_\sigma(m_\delta)},\\
H_{\sigma,\beta}(y) &:= \sum_{[\gamma]:\text{hyp.},l(\gamma)\le y,\phi(\gamma)=\beta} l(\gamma)j(\gamma)^{-1}D(\gamma)^{-1}\overline{\chi_\sigma(m_\gamma)},\\
H^P_{\sigma,\beta}(y) &:= \sum_{[\delta]:\text{pr.},l(\delta)\le y,\phi(\delta)=\beta} l(\delta)D(\delta)^{-1}\overline{\chi_\sigma(m_\delta)}.
\end{aligned}$$

ここで "$[\delta]$: pr." はΓ の素な双曲型共役類をわたる和を表わす．$D(\gamma)$ はワイルの判別式と呼ばれ，

$$D(\gamma) = e^{\rho l(\gamma)}\left|\det(\mathrm{Ad}(h(\gamma))^{-1} - I)|_{\mathbf{n}}\right|$$

で定義される．

$K_{\sigma,\beta}(y)$ は $G_{\sigma,\beta}(y)$ によって

$$K_{\sigma,\beta}(y) = \sum_{[\gamma]:\text{hyp.},l(\gamma)\le y,\phi(\gamma)=\beta} \frac{e^{\rho l(\gamma)}}{l(\gamma)} l(\gamma)e^{-\rho l(\gamma)}\overline{\chi_\sigma(m_\gamma)} = \int_1^y \frac{e^{\rho t}}{t} dG_{\sigma,\beta}(t)$$

と表わされる．また，これら4つの関数のうちで $H_{\sigma,\beta}(y)$ のみは次の跡公式を用いて直接に評価することができる．

定理 2.1 (セルバーグ跡公式) G はコンパクトなカルタン部分群を持つとする．離散部分群 Γ はねじれがないものと仮定する．関数 g を $\mathbf{R}$ $(\cong A)$ 上のコンパクト台を持つ滑らかな偶関数とする．M の任意の既約ユニタリ表現 σ に対して，K の virtual 表現 $\eta=\sum_{i;\,\text{finite}}^{\oplus} m_i\tau_i$ ($m_i\in\mathbf{Z}$, τ_i：Kの既約表現) であって，M への制限が σ に一致するものを取る．このとき，任意の $\theta\in\Theta$（$:=\Lambda$の unitary dual）に対して以下の条件を満たす有限個の実数 $\Lambda_1^\theta,\Lambda_2^\theta,\ldots,\Lambda_{L_\sigma}^\theta$ が存在する：G のみに依存して決まる $\varepsilon_G>0$ が存在して，$\Lambda_k^\theta-\chi_\sigma(\Omega_M)\le-\varepsilon_G\,(k=1,\ldots,L_\sigma)$ を満たし，σ,θ に付随する跡公式が次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\pi_{\sigma,\nu_j}:\text{u.p.s.}} m_\Gamma(\pi_{\sigma,\nu_j})\,\hat{g}(i\nu_j)+\sum_{\pi_{\sigma,\nu_j}:\text{c.s.}} m_\Gamma(\pi_{\sigma,\nu_j})\,\hat{g}(i\nu_j)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{L_\sigma}\left\{\sum_{\omega:\text{d.s.},\chi_\omega(\Omega)=\Lambda_k^\theta}\alpha_\Gamma(\omega)[\omega|_K\,;\,\eta]+\sum_{\pi:\text{L.q./lim.d.s.},\chi_\pi(\Omega)=\Lambda_k^\theta} m_\Gamma(\pi)[\pi|_K\,;\,\eta]\right\}\hat{g}(i\mu_k)\\
&\quad-\frac{1}{4\pi}\dim(\sigma)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\nu)\frac{\Psi'_{\Gamma\,\sigma,\theta}}{\Psi_{\Gamma\,\sigma,\theta}}(i\nu)\,d\nu\;+\;\frac{1}{4}\dim(\sigma)\,\hat{g}(0)\operatorname{tr}C_{\Gamma\,\sigma,\theta}(0)\\
=&\quad\operatorname{vol}(\Gamma\backslash G)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\nu)\,\mu_\sigma(\nu)\,d\nu\;+\;U_\Gamma(w_\sigma^\eta(g))\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{[\gamma]:\text{hyp.}}\chi_\theta(\gamma)l(C_\gamma)\,j(\gamma)^{-1}\,D(\gamma)^{-1}\,\overline{\chi_\sigma(m_\gamma)}\,g(l(C_\gamma)).
\end{aligned}
$$

但し，$i=\sqrt{-1}$，$\mu_k=(-\Lambda_k+\chi_\sigma(\Omega_M)-\rho^2)^{\frac{1}{2}}$，$\Omega,\Omega_M$ はそれぞれ G, M のカシミール元，χ_σ は σ の無限小指標，$\hat{g}(\nu)$ は $g(t)$ の $\mathbf{R}$ 上のフーリエ変換，$\chi_\theta(\gamma)=e^{2\pi i\langle\phi(\gamma),\theta\rangle}$ は Λ の指標 θ から誘導された Γ の指標，$U_\Gamma(w_\sigma^\eta(g))$ は Γ の放物型共役類からの寄与をまとめた項，$C_{\Gamma\,\sigma,\theta}(\nu)$, $\Psi_{\Gamma\,\sigma,\theta}(\nu)$ はそれぞれアイゼンシュタイン級数の定数項（散乱行列）と，その行列式である．ν_j,μ_k たちは θ に依存している．また，L_σ は σ に関して高々 $|\sigma|$ による多項式程度の増大度である．さらに，上記の跡公式は virtual 表現 η の取り方によらず，跡公式に現われる和や積分は，すべて絶対かつ一様に収束する．なお，u.p.s., c.s., d.s., L.q./lim.d.s. はそれぞれ，ユニタリ主系列，補系列，離散系列，ラングランズ商または離散系列の極限，をわたる和を表わす．□

Remark. (1) G がコンパクトなカルタン部分群を持たないときにも，同様の跡公式が成立し，以下の議論は同様か，あるいは若干易しいものになる．
(2) Γ がねじれを持つとき，跡公式には楕円型共役類に対応する項（有限和）が現われるが，これは目的の双曲型共役類に関する漸近評価には影響しない．

3 Evaluation

まず，上で定義した4つの関数について，それらの差が次のように評価されることを示す．

補題 3.1 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$y \to \infty$ のとき

$$G_{\sigma,\beta}(y) - G^P_{\sigma,\beta}(y) = O(e^{\varepsilon y}) \tag{4}$$

$$H_{\sigma,\beta}(y) - H^P_{\sigma,\beta}(y) = O(e^{\varepsilon y}) \tag{5}$$

が成り立つ．

補題 3.2 $y \to \infty$ のとき

$$G^P_{\sigma,\beta}(y) - H^P_{\sigma,\beta}(y) = O(e^{(d-\rho-2)y}) \tag{6}$$

が成り立つ．

補題 3.1の証明： まず，$|G_{\sigma,\beta}(y) - G^P_{\sigma,\beta}(y)|$ を評価する．$\varepsilon_0 = \inf_{[\gamma]:\mathrm{hyp.},\phi(\gamma)=\beta} l(\gamma)$ とおくと $\varepsilon_0 > 0$ であることが知られているので（[Ga]），

$$\begin{aligned} |G_{\sigma,\beta}(y) - G^P_{\sigma,\beta}(y)| &\leq \sum_{k\leq 2} \sum_{[\delta]:\mathrm{pr.},kl(\delta)\leq y,\phi(\delta^k)=\beta} kl(\delta)e^{-k\rho l(\delta)} \\ &= \sum_{2\leq k\leq [y/\varepsilon_0]} kJ^\beta_k(y/k) \end{aligned}$$

と $J^\beta_k(y)$ たちの有限和でおさえられる．ただしここで $J^\beta_k(y)$ は

$$J^\beta_k(y) = \sum_{[\delta]:\mathrm{pr.},l(\delta)\leq y,\phi(\delta)=\beta} l(\delta)e^{-k\rho l(\delta)}$$

である．この $J^\beta_k(y)$ について，

$$J^\beta_k(y) = \int_1^y te^{-k\rho t}d\pi^\beta_P(t) = \left[te^{-k\rho t}\pi^P_\beta(t)\right]^y_1 - \int_1^y \pi^P_\beta(t)(1-k\rho t)e^{-k\rho t}dt$$

であるが，ホモロジー素弦定理より $x \to \infty$ のとき $\pi^P_\beta(x) \sim C_X e^{(d-1)x}/x^{r/2+1}$ であったので，任意の $k \geq 2$ に対して $d-1-k\rho \leq d-1-2\rho \leq 0$ であることと合わせて $J^\beta_k(y)$ は高々 $O(y)$（$y \to \infty$ のとき）であり，$|G_{\sigma,\beta}(y) - G^P_{\sigma,\beta}(y)|$ は高々多項式程度の増大度でおさえられることが分かる．

次に，$|H_{\sigma,\beta}(y) - H^P_{\sigma,\beta}(y)|$ の評価をするために，まず $D(\gamma)$ の評価をしておく．$D(\gamma)$ は

$$D(\gamma) = e^{\rho l(\gamma)}\left|\prod_{\alpha\in P^+}(\xi_\alpha(h(\gamma))^{-1}-1)\right|$$

と書くことができる．ここで，P^+ はカルタン部分群 $H=AA_{\mathbf{k}}$ （$A_{\mathbf{k}}$：M の極大可換部分群）のリー環を $\mathbf{h}$ として，

$$P^+=\{\alpha：(\mathbf{g_C},\mathbf{h_C})\text{ に関する正ルート}\mid \mathbf{a}\text{ 上で }\alpha\neq 0\}$$

である．ただし，$\mathbf{g_C},\mathbf{h_C}$ はそれぞれ $\mathbf{g},\mathbf{h}$ の複素化である．また，ξ_α は $\alpha\in P^+$ に対応する H の指標である．

$$|\xi_\alpha(h(\gamma))|=\begin{cases} e^{l(\gamma)} & \alpha|_{\mathbf{a}}=\alpha_1\text{ のとき}\\ e^{2l(\gamma)} & \alpha|_{\mathbf{a}}=\alpha_2,\ \mathbf{n}_2\neq\{0\}\text{ のとき}\end{cases}$$

に注意する．これから $D(\gamma)^{-1}$ は

$$\begin{aligned} D(\gamma)^{-1}&=e^{-\rho l(\gamma)}\prod_{\alpha\in P^+}|\xi_\alpha(h(\gamma))^{-1}-1|^{-1}\\ &\leq e^{-\rho l(\gamma)}\prod_{\alpha\in P^+}(1-e^{-\varepsilon_0})^{-1}\\ &=e^{-\rho\varepsilon_0}(1-e^{-\varepsilon_0})^{-|P^+|}=:D_0\end{aligned}$$

と γ に無関係な定数 D_0 でおさえられるので，

$$\begin{aligned}\left|H_{\sigma,\beta}(y)-H^P_{\sigma,\beta}(y)\right|&\leq D_0\left[\sum_{k\geq 2}\sum_{[\delta]:\mathrm{pr.},kl(\delta)\leq y,\phi(\delta^k)=\beta} l(\delta)e^{-k\rho l(\delta)}\right]\\ &=D_0\sum_{2\leq k\leq[y/\varepsilon]}J^\beta_k(y/k).\end{aligned}$$

従って，G のときと同様に $\left|H_{\sigma,\beta}(y)-H^P_{\sigma,\beta}(y)\right|$ も高々多項式程度の増大度である．□

補題 3.2の証明：定義より，

$$\left|H^P_{\sigma,\beta}(y)-G^P_{\sigma,\beta}(y)\right|\leq\sum_{[\delta]:\mathrm{pr.},l(\delta)\leq y,\phi(\delta)=\beta}l(\delta)e^{-\rho l(\delta)}\left|\prod_{\alpha\in P^+}\left|1-\xi_\alpha(h(\delta))^{-1}\right|-1\right|$$

であるが，$f_\pm(x)=(1\pm x)^{-m_1}(1\pm x^2)^{-m_2}$ とおくと $(f_\pm(x)-1)/x$ は $x=0$ 近傍で有界で，

$$f_+(e^{-l(\delta)})-1\leq\prod_{\alpha\in P^+}\left|1-\xi_\alpha(h(\delta))^{-1}\right|-1\leq f_-(e^{-l(\delta)})-1$$

より，ある定数 C_0 が存在して

$$\left|\prod_{\alpha\in P^+}\left|1-\xi_\alpha(h(\delta))^{-1}\right|-1\right|\leq\left(\frac{|f_+(e^{-l(\delta)})-1|}{e^{-l(\delta)}}+\frac{|f_-(e^{-l(\delta)})-1|}{e^{-l(\delta)}}\right)e^{-l(\delta)}\leq C_0e^{-l(\delta)}$$

である．よって，

$$\left|H^P_{\sigma,\beta}(y)-G^P_{\sigma,\beta}(y)\right|\leq C_0\sum_{[\delta]:\mathrm{pr.},l(\delta)\leq y,\phi(\delta)=\beta}l(\delta)e^{(\rho+1)l(\delta)}=C_0\int_1^y te^{-(\rho+1)t}d\pi^P_\beta(t)$$

となるが，ホモロジー素弦定理より求める評価を得る．□

以上より，任意の$\varepsilon > 0$ に対して $G_{\sigma,\beta}(y) = H_{\sigma,\beta}(y) + O(e^{\varepsilon y} + e^{(d-\rho-2)y})$ である．

次に，$H_{\sigma,\beta}(y)$ を跡公式を用いて評価する．

$\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を，滑らかな非負値偶関数であって，$\mathrm{supp}(\psi) \subset [-1,1]$ かつ$\int_{-\infty}^{\infty} \psi = 1$ なるものとする．任意の$\varepsilon > 0$ に対して，$\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\psi(x/\varepsilon)$ とおく．これを用いて，

$$g_{y,\varepsilon}(x) = (\psi_\varepsilon * \chi_{[-y,y]})(x)$$

と定義する．但し$\chi_{[-y,y]}(x)$ は区間 $[-y,y]$ の特性関数，$*$ は合成積である．この $g_{y,\varepsilon}$によって

$$C^{\sigma}_{\varepsilon,\beta}(y) = \sum_{[\gamma]:\mathrm{hyp.},\phi(\gamma)=\beta} l(\gamma)j(\gamma)^{-1}D(\gamma)^{-1}\overline{\chi_\sigma(m_\gamma)}g_{y,\varepsilon}(l(\gamma)),$$

$$I_{\varepsilon,\beta}(y) = \sum_{y-\varepsilon\le l(\gamma)\le y+\varepsilon,\phi(\gamma)=\beta} l(\gamma)e^{-\rho l(\gamma)}$$

と定義すると，

$$\left|H_{\sigma,\beta}(y) - C^{\sigma}_{\varepsilon,\beta}(y)\right| \le I_{\varepsilon,\beta}(y) \tag{7}$$

であるから，$H_{\sigma,\beta}(y)$ を評価するためには $C^{\sigma}_{\varepsilon,\beta}(y)$ と $I_{\varepsilon,\beta}(y)$ を評価すればよい．しかし，$I_{\varepsilon,\beta}(y)$ は正項級数であり，$I_\varepsilon(y) = \sum_{y-\varepsilon\le l(\gamma)\le y+\varepsilon} l(\gamma)e^{-\rho l(\gamma)}$ によって上からおさえられているので，[SW, (7.28)：これは，$I_\varepsilon(y)$ の主要項が，G の自明表現からの寄与によって与えられているという事実に基づいている] によりある定数 A_Iが存在して，一様に

$$I_{\varepsilon,\beta}(y) \le I_\varepsilon(y) \le 2\varepsilon e^{\rho y} + A_I\varepsilon^{2-d} + O_\sigma(e^{\varepsilon y}) \tag{8}$$

となる．従って，あとは $C^{\sigma}_{\varepsilon,\beta}(y)$ の評価を考えればよい．

$h_{y,\varepsilon}(\nu) = \hat{g}_{y,\varepsilon}(\nu)$ とすると，$g_{y,\varepsilon}$ を試験関数として跡公式は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{[\gamma]:\mathrm{hyp.}} \chi_\theta(\gamma)l(C_\gamma)\,j(\gamma)^{-1}\,D(\gamma)^{-1}\,\overline{\chi_\sigma(m_\gamma)}\,g_{y,\varepsilon}(l(C_\gamma))\\
=\ &\sum_{\pi_{\sigma,\nu_j}:\mathrm{u.p.s.}} m_\Gamma(\pi_{\sigma,\nu_j})\,h_{y,\varepsilon}(i\nu_j) + \sum_{\pi_{\sigma,\nu_j}:\mathrm{c.s.}} m_\Gamma(\pi_{\sigma,\nu_j})\,h_{y,\varepsilon}(i\nu_j)\\
&+\sum_{k=1}^{L_\sigma}\left\{\sum_{\omega:\mathrm{d.s.},\chi_\omega(\Omega)=\Lambda_k^\theta} \alpha_\Gamma(\omega)[\omega|_K\,;\,\eta] + \sum_{\pi:\mathrm{L.q./lim.d.s.},\chi_\pi(\Omega)=\Lambda_k^\theta} m_\Gamma(\pi)[\pi|_K\,;\,\eta]\right\} h_{y,\varepsilon}(i\mu_k)\\
&-\frac{1}{4\pi}\dim(\sigma)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\nu)\frac{\Psi'_{\Gamma\sigma,\theta}}{\Psi_{\Gamma\sigma,\theta}}(i\nu)\,d\nu + O_\sigma(e^{\varepsilon y})
\end{aligned}$$

となる．

$$C^{\sigma}_{\varepsilon,\beta}(y) = \int_\Theta\left(\sum_{[\gamma]:\mathrm{hyp.}} \chi_\theta(\gamma)l(C_\gamma)\,j(\gamma)^{-1}\,D(\gamma)^{-1}\,\overline{\chi_\sigma(m_\gamma)}\,g_{y,\varepsilon}(l(C_\gamma))\right)\overline{\chi_\theta(\beta)}d\theta$$

であるから,

$$\left|C^{\sigma}_{\varepsilon,\beta}(y)\right| \leq \int_{\Theta}\left|\sum_{[\gamma]:\mathrm{hyp.}} \chi_\theta(\gamma) l(C_\gamma)\, j(\gamma)^{-1}\, D(\gamma)^{-1}\, \overline{\chi_\sigma(m_\gamma)}\, g_{y,\varepsilon}(l(C_\gamma))\right| |\overline{\chi_\theta(\beta)}| d\theta$$

$$= \left|\sum_{[\gamma]:\mathrm{hyp.}} \chi_\theta(\gamma) l(C_\gamma)\, j(\gamma)^{-1}\, D(\gamma)^{-1}\, \overline{\chi_\sigma(m_\gamma)}\, g_{y,\varepsilon}(l(C_\gamma))\right|$$

である.そこで,最後の量について θ によらない評価ができればよい.

各 $\theta \in \Theta$ ごとに,跡公式から

$$\left|\sum_{[\gamma]:\mathrm{hyp.}} \chi_\theta(\gamma) l(C_\gamma)\, j(\gamma)^{-1}\, D(\gamma)^{-1}\, \overline{\chi_\sigma(m_\gamma)}\, g_{y,\varepsilon}(l(C_\gamma))\right|$$

$$\leq\ 4\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin \nu y}{\nu}\right| |\hat{\psi}(\varepsilon\nu)| \left(dN^{\theta}_{\sigma}(\nu) + dM^{\theta}_{\sigma}(\nu)\right) + C^{\theta}_{\sigma} e^{\nu_0 y} + D^{\theta}_{\sigma} e^{\mu_0 y} + O_\sigma(e^{\varepsilon y}) \tag{9}$$

が分かる.但し,$R>0$ に対して $N^{\theta}_{\sigma}(R)$, $M^{\theta}_{\sigma}(R)$ は

$$N^{\theta}_{\sigma}(R) = \sum_{\pi_{\sigma,\nu_j}:\mathrm{u.p.s.\ in\ } L^2(\Gamma\backslash G,\theta), |\nu_j|\leq R} m_\Gamma(\pi_{\sigma,\nu_j}),$$

$$M^{\theta}_{\sigma}(R) = \frac{1}{4\pi}\dim(\sigma)\int_{-R}^{R}\left|\frac{\Psi'_{\Gamma\,\sigma,\theta}}{\Psi_{\Gamma\,\sigma,\theta}}(i\nu)\right| d\nu$$

で定義される量である.また,C^{θ}_{σ}, D^{θ}_{σ} は定数で,

$$C^{\theta}_{\sigma} = \sum_{\pi_{\sigma,\nu_j}:\mathrm{c.s.\ in\ } L^2(\Gamma\backslash G,\theta)} m_\Gamma(\pi_{\sigma,\nu_j}),$$

$$D^{\theta}_{\sigma} = \sum_{k=1}^{L_\sigma}\left\{\sum_{\omega:\mathrm{d.s.},\chi_\omega(\Omega)=\Lambda^{\theta}_{k}} |\alpha_\Gamma(\omega)| [\omega|_K\,;\,\eta] + \sum_{\pi:\mathrm{L.q./lim.d.s.},\chi_\pi(\Omega)=\Lambda^{\theta}_{k}} m_\Gamma(\pi)[\pi|_K\,;\,\eta]\right\}$$

である.さらに,ν_j, μ_k たちは θ に関する連続関数で,$\theta\in\Theta$ が動くときの ν_j, μ_k の最大値をそれぞれ ν_0, μ_0 とした.

上記の N^{θ}_{σ}, M^{θ}_{σ} については,次のワイルの評価が成立する.

補題 3.3 Γ にのみ依存して決まる定数 A_Γ, B_Γ が存在して,任意の $R>0$, $\theta\in\Theta$ に対して

$$N^{\theta}_{\sigma}(R) + M^{\theta}_{\sigma}(R) \leq A_\Gamma(1+|\sigma|)^{B_\Gamma} R^d$$

が成り立つ.

補題 3.3の証明: [Ji] の結果を,Γ の有限次ユニタリ表現 T に対して $L^2(\Gamma\backslash G, T) = \mathrm{Ind}^{G}_{\Gamma}T$ の場合に拡張することにより,[SW] の Appendix と同様に示される(主張は T を $\theta\circ\phi$ としたものである).□

また,次の2つの補題が成り立つ.

補題 3.4 σ のみに依存して決まる C_σ, D_σ が存在して，任意の $\theta \in \Theta$ に対して

$$C_\sigma^\theta \le C_\sigma, \quad D_\sigma^\theta \le D_\sigma$$

が成り立つ．また，C_σ, D_σ は $|\sigma| \to \infty$ のとき $|\sigma|$ に関して高々多項式程度の増大度である．□

補題 3.5 不等式 $\left(\frac{\rho}{d} <\right) \frac{\rho}{d-1} \le \min\{1, \nu_0, \mu_0\}$ が成り立つ．□

補題 3.3から，(9) の第 1 項は

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin \nu y}{\nu}\right| |\hat{\psi}(\varepsilon\nu)| \left(dN_\sigma^\theta(\nu) + dM_\sigma^\theta(\nu)\right) \\
\le\ & A_\Gamma(1+|\sigma|)^{B_\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin \nu y}{\nu}\right| |\hat{\psi}(\varepsilon\nu)| d(\nu^d) \\
=\ & A_\Gamma(1+|\sigma|)^{B_\Gamma} \left\{\int_{-1}^{1} y \left|\hat{\psi}(\varepsilon\nu)\nu^{d-1}\right| d\nu + \int_{|\nu|\ge 1} \left|\hat{\psi}(\varepsilon\nu)\nu^{d-2}\right| d\nu\right\} \\
\le\ & A_\Gamma(1+|\sigma|)^{B_\Gamma}(C_1 y + D_1 \varepsilon^{1-d})
\end{aligned}$$

と評価されるので（C_1, D_1 は定数），補題 3.4 により $\left|C_{\varepsilon,\beta}^\sigma(y)\right|$ は $y \to \infty$ のとき

$$\left|C_{\varepsilon,\beta}^\sigma(y)\right| \le A_\Gamma(1+|\sigma|)^{B_\Gamma}(C_1 y + D_1 \varepsilon^{1-d}) + C_\sigma e^{\nu_0 y} + D_\sigma e^{\mu_0 y} + O_\sigma(e^{\varepsilon y})$$

となる．$I_{\varepsilon,\beta}(y)$ の評価 (8) と補題 3.5 を用いれば，以上をまとめて

$$\begin{aligned}
|H_{\sigma,\beta}(y)| \ \le\ & A_\Gamma(1+|\sigma|)^{B_\Gamma}(C_1 y + D_1 \varepsilon^{1-d}) + (C_\sigma + D_\sigma) e^{(1-\frac{1}{d-1})\rho y} \\
& +2\varepsilon e^{\rho y} + A_I \varepsilon^{2-d} + O_\sigma(e^{\varepsilon y})
\end{aligned}$$

である．$\varepsilon = e^{\rho y/d}$ とおけば，求める評価

$$|H_{\sigma,\beta}(y)| \le C_\Gamma(1+|\sigma|)^{B_\Gamma} e^{(1-\frac{1}{d})\rho y} \tag{10}$$

を得る．ところで，補題 3.1, 3.2 より $G_{\sigma,\beta}(y) - H_{\sigma,\beta}(y) = O\left(e^{\varepsilon y} + e^{(d-\rho-2)y}\right)$ であったから，$d-\rho-2 < (1-1/d)\rho$ であることより，

$$|G_{\sigma,\beta}(y)| \le D_\Gamma(1+|\sigma|)^{B_\Gamma} e^{(1-\frac{1}{d})\rho y} \tag{11}$$

が従う．一方，$K_{\sigma,\beta}(y)$ は $G_{\sigma,\beta}(y)$ によって

$$K_{\sigma,\beta}(y) = \int_1^y \frac{e^{\rho t}}{t} dG_{\sigma,\beta}(t)$$

と表わされていたので，$G_{\sigma,\beta}(y)$ の評価 (11) より次を得る．

補題 3.6 $y \to \infty$ のとき，ある Γ にのみ依存して決まる定数 R_Γ が存在して，

$$|K_{\sigma,\beta}(y)| \le R_\Gamma(1+|\sigma|)^{B_\Gamma} \frac{e^{(2-\frac{1}{d})\rho y}}{y} \tag{12}$$

が成り立つ．□

目的の (3) の評価を行う．(3) の第 2 項は

$$\sum_{\sigma\neq 1}\hat{f}(\sigma)K_{\sigma,\beta}(y)=O\left(\sum_{\sigma\neq 1}\hat{f}(\sigma)(1+|\sigma|)^{B_\Gamma}\frac{e^{(2-\frac{1}{d})\rho y}}{y}\right)$$

である．ここで $\hat{f}$ は $|\sigma|\to\infty$ のとき急減少な関数なので，$\sum_{\sigma\neq 1}\hat{f}(\sigma)(1+|\sigma|)^{B_\Gamma}$ は上から定数でおさえられる．従って

$$\sum_{[\gamma]:\text{hyp.},l(\gamma)\leq y,\phi(\gamma)=\beta} f(m_\gamma)=\hat{f}(1)\pi_\beta(y)+O\left(y^{-1}e^{(2-\frac{1}{d})\rho y}\right) \tag{13}$$

であるから，

定理 3.7 (ホモロジー類ホロノミー共役類密度定理) $y\to\infty$ のとき，dm を M の正規化されたハール測度として

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi_\beta(y)}\sum_{[\gamma]:\text{hyp.},l(\gamma)\leq y,\phi(\gamma)=\beta} f(m_\gamma) &= \int_M f(m)dm+O(y^{r/2}e^{((2-\frac{1}{d})\rho-d+1)y})\\ &= \int_M f(m)dm+O(\pi_\beta(y)^{2\rho/d-1+\varepsilon}) \quad (\forall\varepsilon>0)\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $r=\mathrm{rank}(\Lambda)$．□

系 3.8 任意の共役不変な部分集合 $\Omega\subset M$に対して，

$$\lim_{y\to\infty}\frac{|\{C_\gamma\in E_\beta(y)\mid m_\gamma\in\Omega\}|}{\pi_\beta(y)}=\frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{\mathrm{vol}(M)}$$

である．つまり，任意のホモロジー類に対して，ホロノミー共役類は一様に分布し，かつその比はホモロジー類にはよらない．□

Remark. 補題 3.1より，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$G_{\sigma,\beta}(y)-G^P_{\sigma,\beta}(y)=O(e^{\varepsilon y})$$

より，

$$K^P_{\sigma,\beta}(y)=\sum_{[\delta]:\text{pr.},l(\delta)\leq y,\phi(\delta)=\beta}\overline{\chi_\sigma(m_\delta)}$$

が $K_{\sigma,\beta}(y)$ と同様に評価されるので，閉測地線をわたる和を素弦をわたる和にとりかえても主定理は同じ形で成り立つ．

4 Example

類数1の虚2次体 $K=\mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ $(D=1,2,3,7,11,19,43,67,163)$ を考える．$\mathcal{O}$ をその整数環，$\Gamma=SL_2(\mathcal{O})$ とする．以下で，主定理3.7の主張するところの数論的な応用例として $X=\Gamma\backslash H^3_{\mathbf{R}}=\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{C})/SU(2)$ の場合を取り上げることにしよう．X の素弦と $\mathcal{O}$-係数の原始的2元2次形式の類が対応することを [S] に沿って説明し，主定理が2次形式の基本単数に関する漸近評価を与えることを見る．

$\mathcal{O}$-係数の2元2次形式（以下では単に2次形式という）$Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ は，a,b,c が互いに素のとき原始的であるという．以下では原始的2次形式を扱う．

Γ は2次形式に

$$(g.Q)(x,y)=Q(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y),\quad g=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$$

によって作用する．2つの2次形式 Q,Q' は，ある $g\in\Gamma$ によって $g.Q=Q'$ となるとき同値であるといい，$Q\sim Q'$ と書く．Q が代表する同値類を $[Q]$ で表わす．Q が原始的であるとき，$Q\sim Q'$ ならば Q' も原始的であることに注意する．

2次形式 $Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ に対して，その判別式を $d=d_Q=b^2-4ac$ で定義する．判別式は Γ の作用に関して不変である．方程式

$$t^2-du^2=4,\quad (t,u)\in\mathcal{O}\times\mathcal{O} \tag{14}$$

の解は，有限個の例外（$d=-3,-4$ および $D=2$ かつ $d=2$ のとき）を除いて基本解で生成される．すなわち，解 (t,u) に $\varepsilon_{t,u}=\frac{t+u\sqrt{d}}{2}\in K(\sqrt{d})$ を対応させるとき，

$$|\varepsilon_{t,u}|^2+|\varepsilon_{t,u}|^{-2},\quad |\varepsilon_{t,u}|>1$$

を最小にするような解を (t_0,u_0) とすれば，

$$\frac{t+u\sqrt{d}}{2}=\pm\varepsilon^n_{t_0,u_0}\quad (n\in\mathbf{Z})$$

で定まる (t,u) は $\mathcal{O}\times\mathcal{O}$ の元で，(14) の解のすべてを与えることが示される．

ここで，$\sqrt{d}$, u_0 の偏角を $[0,\pi)$ に取るように約束しておくと，$\varepsilon_d=\varepsilon_{t_0,u_0}$ は一意に決まる．これを基本単数といい，対応する (14) の解 (t_0,u_0) を基本解という．

原始的2次形式の（$\sim$ による）同値類と $X=\Gamma\backslash H^3_{\mathbf{R}}$ の素弦（Γ の双曲型共役類）は次の対応によって1対1に対応する．

原始的2次形式の類から Γ の素な双曲型共役類への写像 M を，

$$M([Q])=\left[\begin{pmatrix}\frac{t_0-bu_0}{2}&-cu_0\\ au_0&\frac{t_0+bu_0}{2}\end{pmatrix}\right]\left(\overset{SL_2(\mathbf{C})}{\sim}\begin{pmatrix}\varepsilon_{t_0,u_0}&0\\ 0&\varepsilon^{-1}_{t_0,u_0}\end{pmatrix}\right)$$

で定義する．但し，$Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$，(t_0,u_0) は方程式 $t^2-du^2=4$ の基本解（$d=d_Q$ は Q の判別式）である．このとき $l(M[Q])=\log|N(M[Q])|=2\log|\varepsilon_{t_0,u_0}|$ とな

る．さらに，$\varepsilon_{t_0,u_0}/|\varepsilon_{t_0,u_0}|$ が制限ホロノミーを与えている．

$x>0, \beta\in\Lambda$ に対して，

$$Q^P_\beta(x)=\{[Q]:\text{原始的 2 次形式の類} \mid |\varepsilon_Q|\le x, (\phi\circ M)(Q)=\beta\}$$

とおく．ただし $\varepsilon_Q=\varepsilon_{d_Q}$ とおいた．なお $|Q^P_\beta(x)|$ 自身の漸近評価は，[Ep] によって，β によらないある定数 C が存在して

$$|Q^P_\beta(x)|\sim C\frac{x^4}{(\log x)^{r/2+1}}$$

であることが分かっている．

以上の準備のもとで，主定理は次のように翻訳される．

定理 4.1 任意の滑らかな 2π 周期の周期関数 f に対して，$x\to\infty$ のとき

$$\frac{1}{\left|Q^P_\beta(x)\right|}\sum_{Q\in Q^P_\beta(x)} f(\arg\varepsilon_Q)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta+O(x^{-2/3}(\log x)^{r/2}) \tag{15}$$

が成り立つ．特に，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\{Q\in Q^P_\beta(x)\mid \theta_1\le\arg\varepsilon_Q\le\theta_2\}\right|}{\left|Q^P_\beta(x)\right|}=\frac{\theta_2-\theta_1}{2\pi} \tag{16}$$

である．□

Remark. 上記の定理 4.1 は，ガウス整数環に対する素元の偏角に関する一様分布定理

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left|\{p:\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]\text{ の素元}\mid N(p)\le x,\theta_1\le\arg(p)\le\theta_2\}\right|}{\left|\{p:\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]\text{ の素元}\mid N(p)\le x\}\right|}=\frac{\theta_2-\theta_1}{2\pi}$$

とよく似ている（cf. [KKS]）．

参考文献

[AdSu] T. Adachi and T. Sunada, *Homology of closed geodesics in a negatively curved manifold,* J. Diff. Geom. **26** (1987), 81-99.

[DG] D. DeGeorge, *Length spectrum for compact locally symmetric spaces of strictly negative curvature,* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **10** (1977), 133-152.

[Ep] C. Epstein, *Asymptotics for closed geodesics in a homology class, the finite volume case,* Duke Math. J. **55** (1987), 717-757.

[Ga] R. Gangolli, *The length spectra of some compact manifolds of negative curvature,* J. Diff. Geom. **12** (1977), 403-424.

[Ji] L. Ji, *The trace class conjecture for arithmetic groups,* J. Diff. Geom. **48** (1998), 165-203.

[KKS] 加藤和也・黒川信重・斎藤毅, 数論 2 , 岩波講座 現代数学の基礎 **19** (1998)

[Mar] G. Margulis, *Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvatures,* Funkt. Anal. i Ego Pril. **3** (1969), 89-90.

[PhS] R. Phillips and P. Sarnak, *Geodesics in homology classes,* Duke Math. J. **55** (1987), 287-297.

[S] P. Sarnak, *The arithmetic and geometry of some hyperbolic three manifolds,* Acta Math. J. **151** (1983), 253-295.

[SW] P. Sarnak and M. Wakayama, *Equidistribution of holonomy about closed geodesic,* (to appear in Duke Math. J.)

[Wal] N. R. Wallach, *On the Selberg trace formula in the case of compact quotient,* Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 171-195.

[War] G. Warner, *Selberg's trace formula for nonuniform lattice : The* $\mathbf{R}$*-rank one case,* Adv. in Math. Supp. Stud. **6** (1979), 1-142.