

NEWTON'S FORMULA AND THE CAYLEY-HAMILTON THEOREM FOR THE SKEW CAPELLI ELEMENTS

伊藤 稔 (京大 理)

Introduction. “Skew Capelli elements” と呼ばれる普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元が知られている。これらは, [HU] において, 交代行列の空間の上に実現される 一般線形群 GL_n の multiplicity-free な表現に関して Capelli 型恒等式を構成するために導入された。しかし [HU] における skew Capelli elements の扱いは幾分抽象的であり, その具体的な姿は十分明らかにはされなかった。これに対し [KW] では Newton 型の関係式という形でこの skew Capelli elements の具体的表示を与えた。本講演はこの [KW] の結果の別証明と, 付随する他の結果が得られたことを報告するものである。これらの結果は [U2], [I2] と同様に余因子行列の構成という基本的な原理から導かれる。

一般線型群 GL_n は n 次の交代行列全体のなす空間 Alt_n に自然に作用する。これは Alt_n 上の多項式環 $\mathcal{P}(\text{Alt}_n)$ への作用に延長され, 普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ から Alt_n 上の微分作用素環 $\mathcal{PD}(\text{Alt}_n)$ への準同型 λ を導く。この λ を $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心 $ZU(\mathfrak{gl}_n)$ に制限すると GL_n - 不変微分作用素環 $\mathcal{PD}(\text{Alt}_n)^{GL_n}$ への写像が得られる: $\lambda: ZU(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow \mathcal{PD}(\text{Alt}_n)^{GL_n}$ 。実はこれが全射であることが知られている。そこで具体的な GL_n - 不変微分作用素と普遍包絡環との対応が問題となる (concrete Capelli problem)。

x_{ij} を Alt_n の標準的な座標, x_{ij} に対応する偏微分作用素を $\partial_{ij} = \partial/\partial x_{ij}$ とする。上で定めた表現 λ は, 行列単位に相当する $\mathfrak{gl}_n$ の基底 E_{ij} を $\lambda(E_{ij}) = \sum_{t=1}^n x_{ti} \partial_{tj}$ に移す。特に, $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $D = (\partial_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $E = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ という行列に対して, $\lambda(E) = {}^tXD = -XD$ が成り立つ。本稿で考察の対象となるのは, Pfaffian を用いて定義される次の GL_n - 不変微分作用素である:

$$\gamma_k = \sum_{|I|=2k} \text{Pf}(X_I) \text{Pf}(D_I), \quad 0 \leq k \leq \frac{n}{2}.$$

不変微分作用素環 $\mathcal{PD}(\text{Alt}_n)^{GL_n}$ はこれら γ_k で生成される。ただし $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ に対し, X_I, D_I で小行列 $X_I = (x_{ij})_{i, j \in I}$, $D_I = (\partial_{ij})_{i, j \in I}$ を表している。この γ_k に対して, $\lambda(C_k^\Lambda) = \gamma_k$ を満たすような $U(\mathfrak{gl}_n)$ の k 次の中心元 C_k^Λ が唯ひとつ存在する。この C_k^Λ が

(k 次) skew Capelli element である. Skew Capelli elements C_k^Λ の具体的な表示は [KW] において Newton 型の関係式という形で与えられた:

Theorem A. (Newton's formula for the skew Capelli elements) $0 \leq k \leq n/2$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i C_{k-i}^\Lambda \cdot Q_{n-2k+2}^i(E) = (n-2k)C_k^\Lambda.$$

ここで 行列 Z に対し $Q_u^i(Z)$ を次で定義する:

$$Q_u^i(Z) = \begin{cases} \text{tr}(I), & (i=0), \\ \text{tr}(Z \cdot (Z-uI)(Z-(u+2)I) \cdots (Z-(u+2i-4)I)), & (i>0). \end{cases}$$

(正確には [KW] の結果はこれを C_k^Λ について解いた形 (5.1) で与えられている.)

Theorem A は不変微分作用素 γ_k の以下のような関係式からの帰結として得られる. 微分作用素 γ_k の母関数 $\gamma(u)$ を次で定義する:

$$\gamma(u) = \sum_{0 \leq k \leq n/2} (-1)^k \gamma_k \cdot (u; -2)_{n/2-k}.$$

ここで $(u; -h)_r$ は, Γ 関数 $\Gamma(u)$ を用いて次のように定められる “階乗関数” である:

$$(u; -h)_r = h^r \cdot \Gamma\left(\frac{u}{h} + 1\right) / \Gamma\left(\frac{u}{h} + 1 - r\right).$$

Theorem B. (Newton's formula for $\mathcal{PD}(\text{Alt}_n)$) 次の $\mathcal{PD}(\text{Alt}_n)^{GL_n}$ -係数形式的冪級数の等式が成立する:

$$\frac{\gamma(u) - \gamma(u-2)}{\gamma(u)} = \sum_{r=0}^{\infty} u^{-1-r} \text{tr}(({}^tXD)^r).$$

この Theorem B を展開すると, より explicit な γ_k と $\text{tr}(({}^tXD)^r)$ との間の関係式を得る (Corollary 4.2). さらに skew Capelli element C_k^Λ の定義の一意性に注意すると, Theorem A を導くことができる.

この $\gamma(u)$ はまた Cayley-Hamilton 型の関係式を満たす:

Theorem C. (the Cayley-Hamilton theorem for $\mathcal{PD}(\text{Alt}_n)$)

(1) $n = 2m$ のとき, 等式 $\gamma({}^tXD) = 0$ が成立する. すなわち

$$\sum_{k=0}^m \gamma_{m-k} XD(XD + 2I) \cdots (XD + (2k-2)I) = 0.$$

(2) $n = 2m + 1$ のとき, 等式 $\gamma^*({}^tXD)X = 0$ が成立する. すなわち

$$\sum_{k=0}^m \gamma_{m-k}(XD + I)(XD + 3I) \cdots (XD + (2k-1)I)X = 0.$$

ここで $\gamma^*(u)$ は γ_k を係数とする次のような多項式である:

$$\gamma^*(u) = \gamma(u) \cdot (u-1; -2)_{-1/2} = \sum_{k=0}^m (-)^k \gamma_k \cdot (u-1; -2)_{m-k}.$$

Remark. $\gamma(u) = \gamma^*(u) \cdot (u; -2)_{1/2}$ であるから, $n = 2m + 1$ のときにも標語的には “ $\gamma({}^tXD) = 0$ ” が成立していると言ってよい.

以上の関係式は, $\gamma(u)$ が X と D というふたつの交代行列の “固有多項式” と呼ぶにふさわしいものであることを示している.

本稿では, Theorems B, C の証明の前に, まず可換な要素からなるふたつの交代行列に関する Newton 型 および Cayley-Hamilton 型の関係式を考察する (§3). 非可換な要素からなる交代行列に関する Theorems B, C は, これらの類似と見なすことができる. 行列要素の非可換性により, 古典的な枠組みでは 通常の高次微分, 微分であった部分が Theorems B, C ではそれぞれ階乗関数, 後退差分となって現れる. その意味で, この類似は, 通常の Newton, Cayley-Hamilton 公式と, Capelli elements に関する Newton 型および Cayley-Hamilton 型の関係式 ([I1], [U2]) との類似に相当する.

以上の関係式の証明の鍵は, [U2], [I2] などと同様に, 次の関係式を満たすような $\gamma(u)$ の “余因子行列” $\Delta(u)$ を構成することにある:

$$\Delta(u) \cdot ({}^tXD - uI) = \gamma(u)I.$$

この $\Delta(u)$ の構成は Pfaffian の余因子を利用して行われる. 計算のおおまかな流れは, 昨年の表現論シンポジウムで述べた直交 Lie 環に関する Newton 型および Cayley-Hamilton 型の関係式の証明とほぼ同じである (cf. [I2]).

1. The exterior calculus and the Pfaffian. Pfaffian の計算は外積代数を用いて簡潔に行うことができる. この節では, 次節以降の計算の準備として, Pfaffian の外積代数による表示を与える.

結合的代数 $\mathcal{A}$ に対し, $\mathcal{A}$ の元を要素とする n 次の交代行列全体を $\text{Alt}(n, \mathcal{A})$ で表す. n 個の反可換な変数 $e_1, e_2, \dots, e_n$, およびこれらから生成される外積代数 Λ_n を考える. 以下, 代数 $\mathcal{A}$ とのテンソル積環 $\Lambda_n \otimes \mathcal{A}$ で計算を行う. ただし $\Lambda_n \otimes \mathcal{A}$ の積は, 部分環 $\Lambda_n, \mathcal{A}$

が元別に可換になるように入れる．これによって $e_1, e_2, \dots, e_n$ は $\mathcal{A}$ の元を係数とする母関数の (反可換な) 形式的変数とすることができる．また，以下 divided power を表す記号 $x^{(k)} = \frac{1}{k!} x^k$ を用いる．この記号の下で 二項展開は次のように簡潔に表される: $(x+y)^{(n)} = \sum_{k=0}^n x^{(k)} y^{(n-k)}$.

$n = 2m$ のとき, $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Alt}(n, \mathcal{A})$ の Pfaffian $\text{Pf}(A)$ を次で定義する:

$$\text{Pf}(A) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2m}} \text{sign}(\sigma) A_{\sigma(1)\sigma(2)} A_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots A_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}.$$

この $\text{Pf}(A)$ は外積代数を利用して以下のように表示することができる． $\Lambda_n \otimes \mathcal{A}$ の元

$$\theta_A = \frac{1}{2} e A^t e = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n e_i e_j A_{ij}$$

を考える．ただし $e = (e_1, \dots, e_n)$ とする．この θ_A と $\text{Pf}(A)$ の間に次の関係が成り立つ:

$$(1.1) \quad e_1 \cdots e_n \text{Pf}(A) = \theta_A^{(m)}.$$

この関係式は Pfaffian の定義から容易に分かる．

さらに n を必ずしも偶数でない自然数として, ふたつの n 次の交代行列 $A, B \in \text{Alt}(n, \mathcal{A})$ に対する $\sum_{|I|=2k} \text{Pf}(A_I) \text{Pf}(B_I)$ という量を考えよう．これも 反可換変数の個数を倍にすることにより, 外積代数を用いて簡潔に表示できる． e_i, e'_i ($i = 1, \dots, n$) を $2n$ 個の反可換変数, Λ_{2n} をこれらから生成される外積代数として, $\Lambda_{2n} \otimes \mathcal{A}$ で計算を行う．上記の θ_A に加えて次のような元 θ'_B, τ を用意する:

$$\theta'_B = \frac{1}{2} e' B^t e' = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n e'_i e'_j B_{ij}, \quad \tau = e^t e' = \sum_{i=1}^n e_i e'_i.$$

ただし $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ としている．すると次の関係式が成立する:

$$(1.2) \quad e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n \sum_{|I|=2k} \text{Pf}(A_I) \text{Pf}(B_I) = (-)^k \theta_A^{(k)} \theta_B'^{(k)} \tau^{(n-2k)}.$$

次節以降では, この $\theta_A, \theta'_B, \tau$ による $\sum_{|I|=2k} \text{Pf}(A_I) \text{Pf}(B_I)$ の表示を利用して計算を行う．

2. The cofactors for the Pfaffian. この節では, Pfaffian の余因子行列を復習する (cf. [Hi], [I2]). 本稿の議論の核となる “ふたつの交代行列に関する固有多項式” の余因子行列の構成は, この Pfaffian の余因子を利用して行われる．

互いに可換な要素からなる $2m$ 次の交代行列 A に対し, 行列 $A^\natural$ を

$$e_1 \cdots e_{2m} (A^\natural)_{ij} = -\theta_A^{(m-1)} e_i e_j,$$

で定義する. ただし, $(A^\natural)_{ij}$ は $A^\natural$ の (i, j) 成分である. (1.1) に注意すると, $(A^\natural)_{ij}$ は subpfaffian $\text{Pf}(A_{(i,j)})$ に符号を除いて一致することが分かる. ただし $A_{(i,j)}$ は A から第 i, j 行, 第 i, j 列を除いた $2m - 2$ 次の小行列である. この $A^\natural$ を Pfaffian $\text{Pf}(A)$ の余因子行列と呼ぶ. 実際 $A^\natural$ と A の積は “スカラー行列” $\text{Pf}(A)I$ に一致する:

Proposition 2.1. 次の等式が成立する:

$$A^\natural A = A A^\natural = \text{Pf}(A)I.$$

この等式は次のように書き直すことができる:

$$-\theta_A^{(m-1)} e_\beta \psi_{A,\alpha} = \delta_{\alpha\beta} \theta_A^{(m)}.$$

ただし, $\psi_{A,\alpha} = \sum_{i=1}^n e_i A_{i\alpha}$.

本稿では, これを少し拡張した次の等式の形で利用する. これらは A, B の小行列に Proposition 2.1 を適用することで証明できる.

Corollary 2.2. 可換な要素からなる n 次の交代行列 A に対し, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \theta_A^{(k)} \tau^{(n-2k-1)} \psi_{A,j} &= \theta_A^{(k+1)} \tau^{(n-2k-2)} e'_j, \\ \theta_A^{(k)} \tau^{(n-2k-2)} e_i \psi_{A,j} &= -\theta_A^{(k+1)} \tau^{(n-2k-2)} \delta_{ij} + \theta_A^{(k+1)} \tau^{(n-2k-3)} e_i e'_j. \end{aligned}$$

Corollary 2.3. 可換な要素からなる n 次の交代行列 B に対し, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \theta'_B{}^{(k)} \tau^{(n-2k-1)} \psi'_{B,j} &= -\theta'_B{}^{(k+1)} \tau^{(n-2k-2)} e_j, \\ \theta'_B{}^{(k)} \tau^{(n-2k-2)} e'_i \psi'_{B,j} &= -\theta'_B{}^{(k+1)} \tau^{(n-2k-2)} \delta_{ij} - \theta'_B{}^{(k+1)} \tau^{(n-2k-3)} e'_i e_j. \end{aligned}$$

ただし, $\psi'_{B,\alpha} = \sum_{i=1}^n e'_i B_{i\alpha}$.

3. The classical case. 本稿の主結果である γ_k に関する関係式を扱う前に, まず その古典的な対応物として, 可換な要素からなるふたつの交代行列に関する Newton 型 および Cayley-Hamilton 型の関係式を考察する. これらは易しい線型代数の関係式であり, それ自身興味深い.

3.1. $\mathcal{A}$ は可換な代数とする. ふたつの交代行列 $A, B \in \text{Alt}(n, \mathcal{A})$ に対し, “ A, B に関する固有多項式” $c(u)$ を次で定義する:

$$c(u) = \sum_{0 \leq k \leq n/2} (-)^k c_k u^{n/2-k}.$$

ただし $c_k = \sum_{|I|=2k} \text{Pf}(A_I) \text{Pf}(B_I)$ とする. この $c(u)$ について以下の関係式が成立する:

Theorem 3.1. (Newton's formula) 次の $\mathcal{A}$ -係数形式的冪級数の等式が成立する:

$$2 \frac{c'(u)}{c(u)} = \sum_{r=0}^{\infty} u^{-1-r} \operatorname{tr}(({}^tAB)^r).$$

ここで $c'(u) = \frac{d}{du}c(u)$ は $c(u)$ の微分である.

この等式を展開することにより, c_k と $\operatorname{tr}(({}^tAB)^i)$ の間の次のような関係式を得る:

Corollary 3.2. 次の等式が成立する:

$$\sum_{i=0}^k (-)^i c_{k-i} \operatorname{tr}(({}^tAB)^i) = (n - 2k)c_k.$$

さらに Cayley-Hamilton 型の関係式が成立する:

Theorem 3.3. (The Cayley-Hamilton theorem)

(1) $n = 2m$ のとき, 等式 $c({}^tAB) = 0$ が成立する. すなわち,

$$\sum_{k=0}^m c_{m-k}(AB)^k = 0.$$

(2) $n = 2m + 1$ のとき, 等式 $c^*({}^tAB)A = 0$ が成立する. すなわち,

$$\sum_{k=0}^m c_{m-k}(AB)^k A = 0.$$

ここで $c^*(u)$ は次のような多項式である:

$$c^*(u) = c(u)u^{-1/2} = \sum_{k=0}^m (-)^k c_k u^{m-k}.$$

Remarks. (1) 以上の関係式で $A = B$ とすると交代行列に関する通常の Newton の公式, および Cayley-Hamilton の定理となる.

(2) Theorem 3.3 について. $c(u) = c^*(u)u^{1/2}$ であるから, “ $({}^tAB)^{1/2} = {}^tA$ ” と解釈すれば, 標語的には $n = 2m + 1$ のときにも “ $c({}^tAB) = 0$ ” と言ってよい.

(3) Theorem 3.3 とほぼ同じ結果が[D] で得られている. その関係式は Theorem 3.3 と比べると, n が偶数のときには一致しているが, 奇数のときには少し弱く, 余分な B がくっついた $c^*({}^tAB){}^tAB = 0$ という形で与えられている.

3.2. 以上の関係式は、以下のように $c(u)$ の余因子行列 $\Omega(u)$ を具体的に構成することで証明することができる. $0 \leq k \leq (n-2)/2$, $0 \leq l \leq (n-3)/2$ に対し, $\Omega_k, \Omega_l^\dagger \in \text{Mat}(n, \mathcal{A})$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n (\Omega_k)_{ij} &= (-)^k \theta_A^{(k)} \theta_B'^{(k)} \tau^{(n-2k-1)} e'_i e_j, \\ e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n (\Omega_l^\dagger)_{ij} &= (-)^l \theta_A^{(l+1)} \theta_B'^{(l)} \tau^{(n-2l-2)} e'_i e'_j. \end{aligned}$$

また $k > (n-2)/2$, $l > (n-3)/2$ に対しては $\Omega_k = \Omega_l^\dagger = 0$ と定める. この定義は Pfaffian を用いて次のように言い換えることができる:

$$\begin{aligned} (\Omega_k)_{ij} &= \sum_{|I|=2k+1, i, j \in I} \pm \text{Pf}(A_{I \setminus \{j\}}) \text{Pf}(B_{I \setminus \{i\}}), \\ (\Omega_l^\dagger)_{ij} &= \begin{cases} \sum_{|I|=2l+2, i, j \in I} \pm \text{Pf}(A_I) \text{Pf}(B_{I \setminus \{i, j\}}), & (i \neq j), \\ 0. & (i = j). \end{cases} \end{aligned}$$

ここで各項の符号は I および i, j によって決定される. 行列 $\Omega(u)$ を次の Ω_k の線形和で定義する:

$$\Omega(u) = \sum_{0 \leq k \leq n/2} (-)^k \Omega_k u^{n/2-k-1}.$$

次の関係式は Ω_k の定義と $c_k = \sum_{|I|=2k} \text{Pf}(A_I) \text{Pf}(B_I)$ の表示式 (1.1) から容易に分かる:

Proposition 3.4. 次の等式が成立する:

$$\text{tr } \Omega_k = -(n-2k)c_k.$$

特に, $\Omega(u)$ のトレースは $-2c'(u)$ に等しい:

$$\text{tr } \Omega(u) = -2c'(u).$$

この $\Omega(u)$ を $c(u)$ の余因子行列と呼ぶ. 実際, $\Omega(u)$ と ${}^tAB - uI$ との積は “スカラー行列” $c(u)I$ に一致する:

Proposition 3.5. 次の等式が成立する:

$$\Omega(u)({}^tAB - uI) = c(u)I.$$

この Proposition 3.5 は, $\Omega_k, \Omega_k^\dagger, A, B$ の関係を表す次の lemma から直接の計算で導くことができる:

Lemma 3.6. 次の等式が成立する:

$$\Omega_k \cdot A = \Omega_k^\dagger, \quad \Omega_k^\dagger \cdot B = \Omega_{k+1} + c_{k+1}I.$$

Proof. $\Omega_k, \Omega_k^\dagger$ の定義, および c_k の表示式 (1.2) から, 次の等式を証明すればよい:

$$\begin{aligned} (-)^k \theta_A^{(k)} \theta_B'^{(k)} \tau^{(n-2k-1)} e_i' \psi_{A,j} &= (-)^k \theta_A^{(k+1)} \theta_B'^{(k)} \tau^{(n-2k-2)} e_i' e_j', \\ (-)^k \theta_A^{(k+1)} \theta_B'^{(k)} \tau^{(n-2k-2)} e_i' \psi_{B,j} &= (-)^{k+1} \theta_A^{(k+1)} \theta_B'^{(k+1)} \tau^{(n-2k-2)} \delta_{ij} \\ &\quad + (-)^{k+1} \theta_A^{(k+1)} \theta_B'^{(k+1)} \tau^{(n-2k-3)} e_i' e_j'. \end{aligned}$$

θ_B' と $\psi_{A,j}$ が可換であることに注意すると, 第一の等式は Corollary 2.2 の第一式の両辺に右から $\theta_B'^{(k)}$ を掛けることで得られる. 第二の等式も Corollary 2.3 の第二式の両辺に左から $\theta_A^{(k+1)}$ を掛ければよい. $\square$

この節の始めで述べた Theorems 3.1, 3.3 は Proposition 3.5 の応用として得られる.

Proof of Theorem 3.1. Proposition 3.5 の両辺に右から $(uI - {}^tAB)^{-1}$ を掛ける:

$$-\Omega(u) = c(u)(uI - {}^tAB)^{-1} = c(u) \sum_{r=0}^{\infty} u^{-1-r} ({}^tAB)^r.$$

ここで両辺のトレースを取る. Proposition 3.5 で見たように $\Omega(u)$ のトレースは $-2c'(u)$ に一致するから, Theorem 3.1 を得る. $\square$

以下, Theorem 3.3 を証明する. 次の“因数定理” Lemma 3.7 を適用すると, Theorem 3.3 (1) は Proposition 3.5 から直接に得られる. 実際, $n = 2m$ のとき $c(u)$ と $\Omega(u)$ は u の多項式である.

Lemma 3.7. $\mathcal{R}$ を必ずしも可換でない結合的代数とする. $Z, Y_k \in \mathcal{R}$ について, 等式 $\sum_{k=0}^n Y_k Z^k = 0$ が成立するための必要十分条件は

$$F(u) \cdot (Z - u1) = \sum_{k=0}^n Y_k u^k$$

を満たす $F(u) \in \mathcal{R}[u]$ が存在することである.

$n = 2m + 1$ のときには $C(u)$ や $\Delta(u)$ は多項式でないから, Theorem 3.3 (2) は Proposition 3.5 から直接は証明されない. そこで行列 $\Omega(u)$ の代わりに, 次のような u の多項式 $\Omega^*(u)$ を考える:

$$\Omega^*(u) = \frac{1}{u} \{ \Omega(u) u^{1/2} - (-)^m \Omega_m \} = \sum_{k=0}^{m-1} (-)^k \Omega_k u^{m-k-1}.$$

$\Omega_m \cdot A = 0$ に注意すると, この $\Omega^*(u)$ について次の等式が成立する. これに Lemma 3.7 を適用すると, Theorem 3.3 (2) を得る.

Proposition 3.8. 次の等式が成立する:

$$\Omega^*(u) \cdot ({}^tAB - uI) = c^*(u)I + (-)^m \Omega_m,$$

特に

$$\Omega^*(u) \cdot ({}^tAB - uI)A = \Omega^*(u)A \cdot (B^tA - uI) = c^*(u)A.$$

3.3. “固有多項式” $c(u)$ は, ある $2n$ 次の交代行列の Pfaffian で表すことができる. これを踏まえると, 今節で扱った定理は, この Pfaffian の余因子行列を考えることでより簡単に証明が可能である. しかしこの方法は, 次節で扱うような微分作用素を要素とする行列 X と D に対しては今のところ適用できていない.

Proposition 3.9. 次の等式が成立する:

$$c(u) = (-)^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{Pf} \begin{pmatrix} A & u^{1/2}I \\ -u^{1/2}I & B \end{pmatrix}.$$

Corollary 3.10. $c(u)$ の自乗は行列 tAB の固有多項式に一致する:

$$c(u)^2 = \det(uI - {}^tAB).$$

Proof of Proposition 3.9. 問題の $2n$ 次の交代行列を $Y_{A,B}(u)$ とおく:

$$Y_{A,B}(u) = \begin{pmatrix} A & u^{1/2}I \\ -u^{1/2}I & B \end{pmatrix}.$$

この行列の Pfaffian $\text{Pf}(Y_{A,B}(u))$ は $\tilde{\theta}_{Y_{A,B}(u)} = \frac{1}{2} \tilde{e} Y_{A,B}(u) {}^t \tilde{e}$ という元を用いて次のように表示される:

$$(3.1) \quad \tilde{\theta}_{Y_{A,B}(u)}^{(n)} = e_1 \cdots e_n e'_1 \cdots e'_n \text{Pf}(Y_{A,B}(u)).$$

ただし $\tilde{e} = (e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n)$ としている. 一方, 単純な計算により

$$\tilde{\theta}_{Y_{A,B}(u)} = \theta_A + \theta'_B + u^{1/2}\tau$$

であるから, 次の 3 項展開が成り立つ:

$$\tilde{\theta}_{Y_{A,B}(u)}^{(n)} = (\theta_A + \theta'_B + u^{1/2}\tau)^{(n)} = \sum_{i+j+k=n} \theta_A^{(i)} \theta_B'^{(j)} (u^{1/2}\tau)^{(k)}.$$

ここで, $\tilde{\theta}_{Y_{A,B}(u)}^{(n)}$ は $\Lambda_{2n} \otimes \mathcal{A}$ の最高次の元であるから, θ_A と θ'_B の次数は一致しなければならない. よって, (1.2) に注意すると次が成立する:

$$(3.2) \quad \tilde{\theta}_{Y_{A,B}(u)}^{(n)} = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \theta_A^{(k)} \theta_B'^{(k)} \tau^{(n-2k)} u^{n/2-k} = e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n c(u).$$

(3.1) と (3.2) を比較すると Proposition 3.9 を得る. $\square$

Proof of Corollary 3.10. Pfaffian の自乗が行列式に等しいことに注意すると, Corollary は Proposition 3.9, および等式 $\det(Y_{A,B}(u)) = \det(uI - {}^tAB)$ からすぐに従う. $\square$

4. The case of $\mathcal{PD}(\text{Alt}_n)$. 互いの要素が可換でないふたつの交代行列 $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ に対しても, 前節の結果に類似した等式が成立する. この X, D は, 互いの要素は非可換だが, それぞれの行列内の要素同士は可換であるから, §2 の議論が通用する.

4.1. ふたつの交代行列 X, D に対しその“固有多項式” $\gamma(u)$ を

$$\gamma(u) = \sum_{0 \leq k \leq n/2} (-1)^k \gamma_k \cdot (u; -2)_{n/2-k}$$

で定義する. ここで $(u; -h)_r$ は Γ 関数 $\Gamma(u)$ を用いて定義される“階乗関数”である:

$$(u; -h)_r = h^r \cdot \Gamma\left(\frac{u}{h} + 1\right) / \Gamma\left(\frac{u}{h} + 1 - r\right).$$

r が自然数のときには, $(u; -h)_r = u(u-h)(u-2h) \cdots (u-(r-1)h)$ となることに注意. この $\gamma(u)$ に対し, 以下の関係式が成立する:

Theorem 4.1. (Newton's formula) 次の $\mathcal{PD}(\text{Alt}_n)^{GL_n}$ 係数形式的幕級数の等式が成立する:

$$\frac{\gamma(u) - \gamma(u-2)}{\gamma(u)} = \sum_{r=0}^{\infty} u^{-1-r} \text{tr}(({}^tXD)^r).$$

古典的な場合と同様に, この等式を展開して次の γ_k と $\text{tr}(({}^tXD)^i)$ との間の関係式を得る:

Corollary 4.2. 次の等式が成立する:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \gamma_{k-i} \cdot Q_{n-2k+2}^i({}^tXD) = (n-2k) \gamma_k.$$

ここで 行列 Z に対し $Q_u^i(Z)$ を次で定義する:

$$Q_u^i(Z) = \begin{cases} \text{tr}(I), & (i=0), \\ \text{tr}(Z(Z-uI; -2I)_{i-1}), & (i>0). \end{cases}$$

Theorem 4.3. (the Cayley-Hamilton theorem)

(1) $n = 2m$ のとき, 等式 $\gamma({}^tXD) = 0$ が成立する. すなわち

$$\sum_{k=0}^m \gamma_{m-k} \cdot (XD; 2I)_k = 0.$$

(2) $n = 2m + 1$ のとき, 等式 $\gamma^*({}^tXD)X = 0$ が成立する. すなわち

$$\sum_{k=0}^m \gamma_{m-k} \cdot (XD + I; 2I)_k X = 0.$$

ここで $\gamma^*(u)$ は次のような多項式である:

$$\gamma^*(u) = \gamma(u) \cdot (u-1; -2)_{-1/2} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \gamma_k \cdot (u-1; -2)_{m-k}.$$

Corollary 4.2 は Theorem 4.1 を次のように展開することで得られる． $n = 2m$ のとき， Theorem 4.1 の両辺に $\gamma(u)$ を掛けて $\{u^{-r} \mid r > 0\} \cup \{(u-2; -2)_k \mid 0 \leq k \leq m-1\}$ で展開し，両辺の係数を比べる． $n = 2m+1$ のときは， Theorem 4.1 の両辺に $u\gamma^*(u)$ を掛けて， $\{u^{-r} \mid r > 0\} \cup \{(u-1; -2)_k \mid 0 \leq k \leq m-1\}$ で展開して やはり両辺の係数を比べる．

4.2. 古典的な場合と同様に，以上の定理は $\gamma(u)$ の余因子行列を具体的に構成することで証明できる． $0 \leq k \leq (n-2)/2$ ， $0 \leq l \leq (n-3)/2$ に対し， $\Delta_k, \Delta_l^\dagger \in \text{Mat}(n, \mathcal{A})$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n (\Delta_k)_{ij} &= (-)^k \theta_X^{(k)} \theta_D'^{(k)} \tau^{(n-2k-1)} e'_i e_j, \\ e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n (\Delta_l^\dagger)_{ij} &= (-)^l \theta_X^{(l+1)} \theta_D'^{(l)} \tau^{(n-2l-2)} e'_i e'_j. \end{aligned}$$

また $k > (n-2)/2$ ， $l > (n-3)/2$ に対しては， $\Delta_k = \Delta_l^\dagger = 0$ とおく． 行列 $\Delta(u)$ を次のような Δ_k の線形和で定義する：

$$\Delta(u) = \sum_{0 \leq k \leq n/2} (-)^k \Delta_k \cdot (u-2; -2)_{n/2-k-1}.$$

この $\Delta(u)$ は次の性質を満たす：

Proposition 4.4. 次の等式が成立する：

$$\text{tr } \Delta_k = -(n-2k)\gamma_k,$$

特に Δ_k のトレースは $\gamma(u)$ の後退差分で書ける：

$$\text{tr } \Delta(u) = -(\gamma(u) - \gamma(u-2)).$$

Proposition 4.5. 次の等式が成立する：

$$\Delta(u) \cdot ({}^t X D - uI) = \gamma(u)I.$$

Proposition 4.4 は定義から容易に証明できる． Proposition 4.5 もやはり古典的な場合と同様に 次の lemma から直接の計算で導くことができる：

Lemma 4.6. 次の等式が成立する：

$$\Delta_k \cdot X = \Delta_k^\dagger - (n-2k)\Delta_{k-1}^\dagger, \quad \Delta_k^\dagger \cdot D = \Delta_{k+1} + \gamma_{k+1}I.$$

この lemma は 次の lemma に注意すると， Lemma 3.6 とほぼ同様に証明できる：

Lemma 4.7. 次の交換関係が成立する:

$$[\theta'_D, \psi_{X,k}] = \tau e'_k.$$

特に

$$\psi_{X,j} \theta_D'^{(k)} = \theta_D'^{(k)} \psi_{X,j} - \theta_D'^{(k-1)} \tau e'_j.$$

Proof of Lemma 4.6. Corollary 2.2 より, 次の等式が成立している:

$$\theta_X^{(k)} \tau^{(n-2k-1)} \psi_{X,j} = \theta_X^{(k+1)} \tau^{(n-2k-2)} e'_j.$$

この両辺に右から $\theta_D'^{(k)}$ を掛けると, Lemma 4.7 の交換関係に注意して, 次を得る:

$$\begin{aligned} & (-)^k \theta_X^{(k)} \theta_D'^{(k)} \tau^{(n-2k-1)} e'_i \psi_{X,j} \\ &= (-)^k \theta_X^{(k+1)} \theta_D'^{(k)} \tau^{(n-2k-2)} e'_i e'_j - (-)^{k-1} (n-2k) \theta_X^{(k)} \theta_D'^{(k-1)} \tau^{(n-2k)} e'_i e'_j. \end{aligned}$$

$\Delta_k, \Delta_k^\dagger$ の定義に注意すると, これから Lemma 4.6 の第一式が得られる. 第二式の証明は Lemma 3.6 とほぼ同じである. $\square$

Theorem 4.1 は古典的な場合と同様の手順で Propositions 4.4, 4.5 からすぐに得られる. また Theorem 4.3 (1) も “因数定理” Lemma 3.7 に注意するとやはり Proposition 4.5 からの単純な帰結である.

Theorem 4.3 (2) の証明は以下のようなになる. 次のような行列 P を考えると, Lemma 4.6 から, $P \cdot X = 0$ が成立する:

$$P = \sum_{i=0}^m (2i-1)!! \Delta_{m-i}.$$

ここで $(2i-1)!!$ は次のように定める:

$$(2i-1)!! = (2i-1; -2)_i = (2i-1)(2i-3) \cdots 3 \cdot 1.$$

そこで次の行列を考える:

$$\begin{aligned} \Delta^*(u) &= \frac{1}{u} \{ \Delta(u) \cdot (u-1; -2)_{1/2} - (-)^m P \} \\ &= \frac{1}{u} \sum_{k=0}^m (-)^k \Delta_k \{ (u-1; -2)_{m-k} - (-)^{m-k} (2m-2i-1)!! \}. \end{aligned}$$

これは u に関する多項式である. この $\Delta^*(u)$ について, Proposition 3.8 に相当する次の等式が成立する. Lemma 3.7 に注意すると, これから Theorem 4.3 (2) が分かる.

Proposition 4.8. 次の等式が成立する:

$$\Delta^*(u) \cdot ({}^tXD - uI) = \gamma^*(u)I + (-)^m P.$$

特に

$$\Delta^*(u) \cdot ({}^tXD - uI)X = \Delta^*(u) \cdot X(D{}^tX - uI) = \gamma^*(u)X.$$

4.3. 次で定める Capelli determinant $C(u)$ は $U(\mathfrak{gl}_n)$ の中心元としてよく知られている:

$$C(u) = \det(E + \text{diag}(n-1, n-2, \dots, 0) - uI).$$

ここで, 要素が必ずしも可換でない行列 $\Phi = (\Phi_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ に対して, 行列式を次のように定めている (column-determinant):

$$\det(\Phi) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) \Phi_{\sigma(1)1} \Phi_{\sigma(2)2} \cdots \Phi_{\sigma(n)n}.$$

この $C(u)$ と我々の $\gamma(u)$ との間に Corollary 3.10 に相当する次の関係式が成立する:

Proposition 4.9. 次の等式が成立する:

$$\gamma(u)\gamma(u-1) = (-)^n \lambda(C(u)).$$

Remark. この等式は n が偶数の場合には [HU, (11.3.12)] で与えられている.

この Proposition 4.9 は Theorem 4.1 と 次の $C(u)$ に関する Newton 型の関係式 ([U2]) とを比較することで導くことができる:

$$\frac{C(u) - C(u-1)}{C(u)} = \sum_{r=0}^{\infty} u^{-1-r} \text{tr}(E^r).$$

5. Newton's formulas for the skew Capelli elements. 前節の Corollary 4.2 から, skew Capelli elements C_k^Λ の関係式および具体的な表示を得ることができる.

一般線型群 GL_n の Alt_n 上の多項式環 $\mathcal{P}(\text{Alt}_n)$ への自然な表現 λ は次の既約分解を持つ:

$$\mathcal{P}(\text{Alt}_n) = \sum_{\mu} \rho_n^\mu.$$

ここで μ は $\mu = (b_1, b_1, b_2, b_2, \dots)$ という形の Young 図形を動く. また ρ_n^μ は μ でパラメトライズされる GL_n の既約表現である. この既約分解から k 次 skew Capelli element C_k^Λ は次のふたつの性質で特徴づけられる: (i) C_k^Λ は普遍包絡環 $U(\mathfrak{gl}_n)$ の k 次の中心元である. (ii) $\lambda(C_k^\Lambda) = \gamma_k$.

これに注意すると, Corollary 4.2 から skew Capelli elements に関する次の関係式を導くことができる:

Theorem 5.1. (Newton's formula for the skew Capelli elements) $0 \leq k \leq n/2$
 に対し、次の等式が成立する:

$$\sum_{i=0}^k (-)^i C_{k-i}^\Lambda \cdot Q_{n-2k+2}^i(E) = (n-2k)C_k^\Lambda.$$

Proof. Corollary 4.2 の $0 \leq k \leq n/2$ のときの等式を解くことにより、次のような γ_k の $Q_u^i({}^tXD)$ による表示を得る:

$$2^k k! \gamma_k = \det \begin{pmatrix} Q_n^1({}^tXD) & 2 & & & 0 \\ Q_{n-2}^2({}^tXD) & Q_{n-2}^1({}^tXD) & 4 & & \\ Q_{n-4}^3({}^tXD) & Q_{n-4}^2({}^tXD) & Q_{n-4}^1({}^tXD) & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2k-2 \\ Q_{n-2k+2}^k({}^tXD) & Q_{n-2k+2}^{k-1}({}^tXD) & Q_{n-2k+2}^{k-2}({}^tXD) & \cdots & Q_{n-2k+2}^1({}^tXD) \end{pmatrix}.$$

Skew Capelli element の定義の一意性に注意すると、この等式を C_k^Λ の $Q_u^i(E)$ による表示と見なしてよいことが分かる:

$$(5.1) \quad 2^k k! C_k^\Lambda = \det \begin{pmatrix} Q_n^1(E) & 2 & & & 0 \\ Q_{n-2}^2(E) & Q_{n-2}^1(E) & 4 & & \\ Q_{n-4}^3(E) & Q_{n-4}^2(E) & Q_{n-4}^1(E) & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2k-2 \\ Q_{n-2k+2}^k(E) & Q_{n-2k+2}^{k-1}(E) & Q_{n-2k+2}^{k-2}(E) & \cdots & Q_{n-2k+2}^1(E) \end{pmatrix}.$$

Corollary 4.2 を解いたのと逆の操作を行えば、Theorem を得る. $\square$

Skew Capelli element C_k^Λ の一般的な表示は [KW] で初めて (5.1) の形で与えられた.

REFERENCES

- [Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.
- [Ca2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.
- [D] D. Ž. Đoković, *On the product of two alternating matrices*, Amer. Math. Monthly **98** (1991), 935–936.
- [Ge] I.M. Gelfand, *Center of the infinitesimal groups*, Mat. Sb. Nov. Ser. **26** (68) (1950), 103–112; English transl. in “Collected Papers” Vol. II, pp.22–30.
- [Hi] 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店, 1992.
- [H] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 823.

- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.
- [I1] M. Itoh, *Explicit Newton's formula for $\mathfrak{gl}_n$* , J. Alg. **208** (1998), 687–697.
- [I2] ———, *The Capelli elements for the orthogonal Lie algebras*, preprint (1999).
- [IU] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, preprint (1999).
- [KW] K. Kinoshita and M. Wakayama, *Explicit Capelli identities for skew symmetric matrices*, preprint (1998).
- [M1] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), 923–943.
- [M2] ———, *Yangian and Laplace operators for classical Lie algebras*, Confronting the Infinite (ed. Carey et al.), Proceeding of Adelaide Conference, World Scientific, Singapore, 1995, pp. 239–245.
- [M3] ———, *Stirling partitions of the symmetric group and Laplace operators for orthogonal Lie algebra*, Discrete Math. **180** (1998), 281–300.
- [MN] A. Molev and M. Nazarov, *Capelli identities for classical Lie algebras*, Math. Ann. **313** (1999), 315–357.
- [MNO] A. Molev, M. Nazarov and G. Olshanskii, *Yangians and classical Lie algebras*, Russian Math. Surveys **51** (1996), 205–282.
- [N1] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.
- [N2] ———, *Yangians and Capelli identities*, Kirillov's Seminar on Representation Theory (ed. G.I. Olshanski), AMS Translations, Series 2, vol. 181, 1998, pp. 139–163.
- [NT] M. Nazarov and V. Tarasov, *Yangians and Gelfand-Zetlin bases*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **30** (1994), 459–478.
- [NUW] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$* , Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.
- [Ok] A. Okounkov, *Quantum immanants and higher Capelli identities*, Transformation Groups **1** (1996), 99–126.
- [U1] T. Umeda, *The Capelli identities, a century after*, Sugaku **46** (1994), 206–227; (in Japanese); English transl. in “Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants”, AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu
- [U2] ———, *Newton's formula for $\mathfrak{gl}_n$* , Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3169–3175.
- [U3] ———, *On the proof of the Capelli identities*, preprint 1997.
- [U4] ———, *On Turnbull identity for skew symmetric matrices*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (to appear).
- [Wy] H. Weyl, *The Classical Groups, their Invariants and Representations*, Princeton Univ. Press, 1946.
- [Z] D.P. Želobenko, *Compact Lie Groups and their Representations*, Transl. Math. Monographs **40** (Amer. Math. Soc.), 1973.