表現論シンポジウム講演集, 1999
pp.111-119

Coadjoint orbit 上の Fiber Bundle と可換偏微分作用素の族について

熊本大学理学部 池田 薫

平成11 年 10 月 19 日

§1 Introduction

可換偏微分作用素の族の研究は可積分系の量子化の研究と表裏一体の関係である [2],[11]。Olshanetsky, Adler, Kostant 等によりいわゆるソリトン方程式の可積分性があきらかにされた [1],[7],[10]。この中で今回の結果の古典的対応物である coadjoint orbit 法について若干述べておきたい [7]。coadjoint orbit 法は一般の半単純リー代数の対称代数 (座慓環) の上に可積分系を構成する理論であるが今回はリー代数として (半単純でないが)$gl(n,\mathbf{C})$、その上の可積分系として戸田格子が現われる場合に即して説明したい。次の方程式を (A 型の) 戸田格子という。

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} \ddot{q}_1 = e^{q_2-q_1} \\ \ddot{q}_i = e^{q_{i+1}-q_i} - e^{q_i-q_{i-1}}, \quad 2 \le i \le n-1 \\ \ddot{q}_n = -e^{q_n-q_{n-1}} \end{cases}
$$

戸田格子の相空間に Poisson bracket を

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

で定義する。戸田格子の Lax 行列を

$$
(1.2)\qquad \tilde{L} = \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ e^{q_2-q_1} & p_2 & 1 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e^{q_n-q_{n-1}} & p_n \end{pmatrix}
$$

とする。戸田格子 (1.1) は $\tilde{L}$ をもちいて

$$
(1.3)\qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t} = [(\tilde{L})_+, \tilde{L}]
$$

とかける。ここで $n \times n$ 行列 A にたいして $(A)_+$ をその上三角部分への射影とする。戸田格子は (1.3) 単独で考えるよりも (1.3) ふくむ一群の方程式系

$$
(1.4)\qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t_j} = [(\tilde{L}^j)_+, \tilde{L}], \quad j = 1, \dots, n-1
$$

を扱ったほうが自然である。(1.4) を戸田格子 hierarchy という。戸田格子の相空間上の点を $P=(q,p)$ とする。すなわち $q=(q_1,\ldots,q_n), p=(p_1,\ldots,p_n)$。Lax 行列を $\tilde{L}(P)$ とかきその特性多項式を

$$\det(\lambda-\tilde{L}(P))=\lambda^n+\mathcal{D}_{n-1}(P)\lambda^{n-1}+\cdots+\mathcal{D}_1(P)\lambda+\mathcal{D}_0(P) \tag{1.5}$$

とする。つぎの Hamiltonian 方程式系は戸田格子 hierarchy(1.4) を与える。

$$\frac{\partial f}{\partial t_{n-j-1}}=\{\mathcal{D}_j(P),f\},\quad j=0,\ldots,n-1 \tag{1.6}$$

ここで $f=f(P)$ は P の C^∞ 関数。さらに $\mathcal{D}_j(P)$ たちは互いに Poisson 可換、すなわち

$$\{\mathcal{D}_i(P),\mathcal{D}_j(P)\}=0,\quad i,j=0,\ldots,n-1 \tag{1.7}$$

である。次に Lax 行列たちを $GL(n)$ 軌道により類別する。すなわち $\tilde{L}_1,\tilde{L}_2$ を戸田格子の Lax 行列としたとき $\tilde{L}_1\sim\tilde{L}_2$ をある $g\in GL(n)$ が存在して $\tilde{L}_1=g\tilde{L}_2g^{-1}$ と定義する。この軌道を coadjoint orbit という。くわしくは [7] を参照されたい。$\tilde{L}_1$ と $\tilde{L}_2$ が同じ軌道上にあったとする。すなわちある $g\in GL(n)$ が存在し $\tilde{L}_1=g\tilde{L}_2g^{-1}$ とすると

$$\det(\lambda-\tilde{L}_1)=\det(\lambda-\tilde{L}_2)$$

である。従って Lax 行列のひとつの coadjoint orbit は戸田格子の相空間 $\mathbf{R}^{2n}$ 内の解析的多様体

$$\mathcal{D}_j(P)=M_j,\quad j=0,\ldots,n-1, \tag{1.8}$$

ここで $M_j, j=0,\ldots,n-1$ は実定数、に対応する。戸田格子の相空間 $\mathbf{R}^{2n}$ はこの coadjoint orbit に対応する解析的多様体による葉層構造をもつ。

さて量子化の場合に話を戻そう。G.Heckman と E.Opdam の root 系に付随した可換偏微分作用素の研究 [5] さらに大島、落合、関口による可換偏微分作用素の対称性に関する研究 [9] さらに長谷川による R 行列の手法による研究 [4] がある。今回は Givental が量子コホモロジーの研究 [3] に際し用いた量子化戸田格子に関する偏微分作用素の族 [6] の可換性の証明を行った。すなわち

$$\det(\lambda-L)=\lambda^n+D_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+D_1\lambda+D_0, \tag{1.9}$$

ここで

$$L=\begin{pmatrix} i\partial_1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ e^{ix_1-ix_2} & i\partial_2 & 1 & \ldots & 0\\ \ddots & \ddots & \ddots & \ldots & \\ 0 & \ldots & \ldots & e^{ix_{n-1}-ix_n} & i\partial_n \end{pmatrix}$$

(L は operator 成分の行列であるが行列式は、各単項式が非可換な生成元を含んでいないので well-defined である) としたとき

定理

$$[D_i, D_j] = 0, \quad i, j = 0, \ldots, n-1.$$

量子化戸田格子の代数的枠組はすでに Kostant による Whittaker 加群の理論のなかで与えられている [8]。彼は複素数体上の半単純リー代数の普遍展開環の中心から Borel 部分代数の展開環へのいわゆる一般化され Harish-Chandra 準同型により量子化された Hamiltonian を構成した。量子化された Hamiltonian の同時固有ベクトルが Whittaker ベクトルである。また [9] にあらわれる偏微分作用素の適当な極限をとると定理の偏微分作用素が得られる。しかし今回の偏微分作用素の可換性は Kostant の示した枠組からただちに従う事実ではない。また n 次元の偏微分作用素の可換性は代数的枠組から離れた解析的な証明が与えられるはずである。さらに Whittaker ベクトルを解析的な実体として捉えることが出来る。

§2. Coadjoint orbit 上の Fourier 展開

Ω を $\mathbf{R}^{2n}$ のなかの開集合とする。Ω 上の"Fourier 展開" された関数の集合を $\mathcal{L}^2(\Omega)$ とする。すなわち

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \{\int_{P\in\Omega} a(P)e^{ipx}dp | a(P) \in L^2(\Omega)\}, \tag{2.1}$$

ただし $P = (q,p) \in \mathbf{R}^{2n}$ である。$a(P)$ の定義により $\mathcal{L}^2(\Omega)$ の元は x の関数として意味をもつ。さらに I, J を $I \times J \subset \Omega$ をみたす適当な n 次元の閉区間としたときつぎがなりたつ。

Proposition 2.1 $\mathcal{L}^2(\Omega)$ は通常の L^2 関数の空間を含む。すなわち

$$L^2(I) \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$$

proof. 簡単のため $I = J$ と仮定する。$f(x) \in L^2(\Omega)$ とする。$\mathbf{R}^n$ 上の関数 $\tilde{f}(x)$ を

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.2}$$

と定義する。さらに Ω 上の関数 $a(P)$ を

$$a(P) = \begin{cases} \tilde{f}(q)e^{-ipq} & \text{if } p \in I \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.3}$$

$p \in I$ にたいして I_p を

$$I_p = \{q \in \mathbf{R}^n | (q,p) \in \Omega\}$$

とする。$I\times I\subset\Omega$ より $I\subset I_p$ である。Fourier 逆変換をもちいると

$$\int_{P\in\Omega}a(P)e^{ipx}dP=\int_{p\in I}\int_{q\in I_p}\{\tilde{f}(q)e^{-ipq}dq\}e^{ipx}dp$$

$$=\int_{p\in I}\int_{q\in I}\{f(q)e^{-ipq}dq\}e^{ipx}dp=Cte.f(x).$$

一方

$$\int_{P\in\Omega}|a(P)|^2dP=\int_{p\in I}\int_{q\in J}|f(q)|^2dqdp=|J|\|f\|_{L^2}^2<\infty.$$

より $a(P)\in L^2(\Omega)$。 Q.E.D.

偏微分作用素の $\mathcal{L}^2(\Omega)$ への作用を考える。その際偏微分作用素の係数は e^{ipx} なる形のものであることを仮定する。$f(x)=\int_{P\in\Omega}a(P)e^{ipx}dP\in\mathcal{L}^2(\Omega)$ としたとき明らかに

$$\partial_j f(x)=\int_{P\in\Omega}ip_j a(P)e^{ipx}dP \tag{2.4}$$

となる。さらに

(2.5)
$$e^{ip'x}f(x)=\int_{P\in\Omega}a(P)e^{i(p+p')x}dP=\int_{P\in\Omega\cap(\Omega+(0,p'))}a(P-(0,p'))e^{ipx}dP$$

となり掛け算作用素は積分領域をずらす働きがある。

つぎに $\mathcal{L}^2(\Omega)$ の dual を考えよう。Ω 上 Fourier 展開された関数

$$f(x)=\int_{P\in\Omega}a(P)e^{ipx}dP\in\mathcal{L}^2(\Omega)$$

を次のように解釈する。すなわち e^{ipx} を $P\in\Omega$ 上の fiber とみなし $f(x)$ は $a(P)$ という L^2 関数の重みをかけて fiber をたし上げたものとみなす。このとき自然に $\mathcal{L}^2(\Omega)$ の dual,$\mathcal{L}^{2*}(\Omega)$, がつぎで定義出来る。

$$\mathcal{L}^{2*}(\Omega)=\{\int_{P\in\Omega}b(P)\delta_P(x-q)dP|b(P)\in L^2(\Omega)\} \tag{2.6}$$

ここで $\delta_P(x-q)$ は $P=(q,p)$ における fiber$\{e^{ipx}\}$ では delta 関数 $\delta(x-q)$ で作用し他の点の fiber $\{e^{ip'x}\}$ では 0 になるものとする。

$$f(x)=\int_{P\in\Omega}a(P)e^{ipx}dP\in\mathcal{L}^2(\Omega),T(x)=\int_{P\in\Omega}b(P)\delta_P(x-q)dP\in\mathcal{L}^{2*}(\Omega)$$

としたときその pairing は

$$=\int_x\int_{P\in\Omega}\int_{P'\in\Omega}b(P')\delta(x-q')\delta(P-P')a(P)e^{ipx}dPdP'dx$$

$$=\int_x\int_{P'\in\Omega}b(P')\delta(x-q')a(P')e^{ip'x}dP'dx$$

$$= \int_{P'\in\Omega} a(P')b(P')e^{ip'q'}dP'$$

となる。$a(P), b(P) \in L^2(\Omega)$ より最後の積分は意味をもつ。$\mathcal{L}^{2*}(\Omega)$ は $\mathcal{L}^2(\Omega)$ の dual であることおよび (2.4),(2.5) よりつぎがなりたつ。

Proposition 2.2 $T(x) = \int_{P\in\Omega} b(P)\delta_P(x-q)dP \in \mathcal{L}^{2*}(\Omega)$ としたとき

$$\partial_j T(x) = \int_{P\in\Omega} (-ip_j)b(P)\delta_P(x-q)dP \tag{2.7}$$

$$e^{ip'x}T(x) = \int_{P\in\Omega\cap(\Omega+(0,p'))} e^{ip'q}b(P')\delta_{P'}(x-q')dP' \tag{2.8}$$

が成り立つ。

proof. まず (2.7) を示す。δ 関数の定義により

$$< \partial_j\delta(x-q), e^{ipx} >=< \delta(x-q), -\partial_j e^{ipx} >$$

$$=< (-ip_j)\delta(x-q), e^{ipx} > \tag{2.9}$$

さらに

$$< \delta(x-q), e^{ipx} >= e^{ipq} \tag{2.10}$$

がなりたつ。Pairing の定義および (2.9) から

$$< \partial_j \int_{P\in\Omega} b(P)\delta_P(x-q)dP, \int_{P'\in\Omega} a(P')e^{ip'x}dP' >$$

$$= \int_{P\in\Omega}\int_{P'\in\Omega} b(P)a(P') < \partial_j\delta_P(x-q), e^{ip'x} > dP'dP$$

$$= \int_{P\in\Omega}\int_{P'\in\Omega} b(P)a(P')(-ip'_j)\delta(P-P') < \delta(x-q), e^{ip'x} > dP'dP$$

$$= \int_{P\in\Omega}\int_{P'\in\Omega} (-ip_j)b(P)a(P')\delta(P-P') < \delta(x-q), e^{ip'x} > dP'dP$$

$$=< \int_{P\in\Omega} (-ip_j)b(P)\delta_P(x-q)dP, \int_{P'\in\Omega} a(P')e^{ip'x}dP' > .$$

よって (2.7) が示せた。つぎに (2.8) を示す。やはり pairing の定義と (2.10) より

$$= \int_{P'\in\Omega}\int_{P''\in\Omega} b(P')a(P'')dP''dP'$$

$$= \int_{P'\Omega}\int_{P''\in\Omega} b(P')a(P'') < \delta_{P'}(x-q'), e^{i(p+p')x} > dP''dP'$$

$$= \int_{P'\in\Omega}\int_{P''\in\Omega+(0,p)} b(P')a(P''-(0,p)) < \delta_{P'}(x-q'), e^{ip''x} > dP''dP'$$

$$= \int_{P'\in\Omega}\int_{P''\in\Omega+(0,p)} b(P')a(P''-(0,p))\delta(P'-P'')$$

$$\times < \delta(x-q'), e^{ip''x} > dP''dP'$$

$$= \int_{P'\in\Omega\cap(\Omega+(0,p))} b(P')a(P'-(0,p))e^{ip'q'}dP'$$

一方

$$< \int_{P'\in\Omega\cap(\Omega+(0,p))} e^{ipq'}b(P')\delta_{P'}(x-q')dP',$$

$$\int_{P''\in\Omega} a(P'')e^{ip''x}dP'' >$$

$$= \int_{P'\in\Omega\cap(\Omega+(0,p))}\int_{P''\in\Omega} e^{ipq'}b(P')a(P'')$$

$$\times < \delta_{P'}(x-q'), e^{ip''x} > dP''dP'$$

ここで P'' から $P''-(0,p)$ に変数変換すると

$$= \int_{P'\in\Omega\cap(\Omega+(0,p))}\int_{P''\in\Omega+(0,p)} e^{ipq'}b(P')a(P''-(0,p))$$

$$\times < \delta_{P'}(x-q'), e^{ip''x-ipx} > dP''dP'$$

$$\int_{P'\in\Omega\cap(\Omega+(0,p))}\int_{P''\in\Omega+(0,p)} b(P')a(P''-(0,p))\delta(P'-P'')$$

$$\times < \delta(x-q'), e^{i(p''-p)x} > dP''dP'$$

$$= \int_{P'\in\Omega\cap(\Omega+(0,p))} e^{ipq'}b(P')a(P'-(0,p))e^{ip'q'-ipq'}dP'$$

$$= \int_{P'\in\Omega\cap(\Omega+(0,p))} b(P')a(P'-(0,p))e^{ip'q'}dP'$$

よって (2.8) を得た。Q.E.D.

つぎに $S \subset \mathbf{R}^{2n}$ を k 次元実解析的多様体とする。$k \leq n$ とする。$k = n$ としよう。S 上の点 P_0 を非退化な点とする。すなわち P_0 の十分小さな $2n$ 次元近傍 Ω をとれば陰関数の定理がなりたち $\Omega\cap S = \{P = (q,p) \in \Omega | p \in \Omega_0, q = q(p)\}$ とあらわせる。ここで Ω_0 は Ω の p 空間への射影。$\mathcal{L}^2(S\cap\Omega)$ および $\mathcal{L}^{2*}(S\cap\Omega)$ の定義は

$$\mathcal{L}^2(S\cap\Omega) = \{\int_{p\in\Omega_0} a(p)e^{ipx}dp | a(p) \in L^2(\Omega_0)\} \tag{2.11}$$

$$\mathcal{L}^{2*}(S\cap\Omega) = \{\int_{p\in\Omega_0} b(p)\delta_p(x-q(p))dp | b(p) \in L^2(\Omega_0)\} \tag{2.12}$$

となる。$\mathcal{L}^2(S\cap\Omega)$ と $\mathcal{L}^{2*}(S\cap\Omega)$ との pairing および偏微分作用素の作用の仕方は前出の $\mathcal{L}^2(\Omega), \mathcal{L}^{2*}(\Omega)$ のときと同じ。$\mathcal{L}^2(S\cap\Omega_0)$ は x の関数として意味をもつ。しかし $\mathcal{L}^{2*}(S\cap\Omega_0)$ は δ 関数の積分で定義されていて $\mathcal{L}^2(S\cap\Omega)$ の dual としての意味しか持っていない。そこで $\mathcal{L}^{2*}(S\cap\Omega)$ の reguralityを上げ通常の L^2 空間が含まれていることを示そう。Proposition 2.1 の証明より p 空間の n 次元閉区間 $I\subset\Omega_0$ が存在して $\mathcal{L}^2(I)=L^2(I)$ となる。このような I にたいして

$$\mathcal{L}^{2*}(I)=\{\int_{p\in I}b(p)\delta_p(x-q(p))dp|b(p)\in L^2(I)\}$$

とすると

Proposition 2.2

$$\mathcal{L}^{2*}(I)\cong L^2(I)$$

がなりたつ。

proof. Plancherel の定理により $f(x)\in L^2(I)$ は Fourier 展開

$$f(x)=\int_{p\in I}a(p)e^{ipx}dp, a(p)\in L^2(I)$$

を持ち、よって $f(x)\in\mathcal{L}^2(I)$ とみなせる。$T=\int_{p\in I}b(p)\delta_p(x-q(p))dp$ とすると

$$= \int_{p\in I}a(p)b(p)e^{ipq(p)}dp \tag{2.13}$$

よって

$$\begin{aligned}||&\le\int_{p\in I}|a(p)||b(p)|dp\\ &\le ||a||_{L^2}||b||_{L^2}<\infty.\end{aligned}$$

再び Plancerel の定理により $||a||_{L^2}=||f||_{L^2}$. したがって T は $L^2(I)$ の有界な線形関数。よって Riesz の表現定理により $T\in L^2(I)$ とみなせる。この同一視による埋め込み写像を

$$\varphi:\mathcal{L}^{2*}\to L^2(I) \tag{2.14}$$

とかく。したがって $\mathcal{L}^{2*}(I)\cong\varphi(\mathcal{L}^2(I))$ は $L^2(I)$ の部分空間である。一方 $f(x)\in L^2(I)$ とすると $f(x)$ は Fourier 展開

$$f(x)=\int_{p\in I}b(p)e^{ipx}dp,\quad b(p)\in L^2(\Omega)$$

をもつ。Fourier 展開の一意性により $T_f\in\mathcal{L}^{2*}(I)$ が

$$T_f=\int_{p\in I}b(p)\delta_p(x-q(p))dp \tag{2.15}$$

により一意に定まる。(2.15) により埋め込み写像

$$\psi : L^2(I) \to \mathcal{L}^{2*}(I) \tag{2.16}$$

が定義できて $L^2(I) \cong \psi(L^2(I))$ は $\mathcal{L}^2(I)$ の部分空間である。よって $\mathcal{L}^{2*}(I) \cong L^2(I)$。Q.E.D.

Proposition 2.2 より $L^2(I) \subset \mathcal{L}^{2*}(S \cap \Omega)$. したがって一般論より

Proposition 2.3 偏微分作用素 P が $P = 0$ on $\mathcal{L}^{2*}(I)$ ならば $P = 0$。

つぎに $k0$ と n 次元閉区間 $J \subset \Omega_0$ が存在し

(i) J 上 $\mathcal{O}_\lambda$ の点は $P^\epsilon = (\epsilon q_1, \ldots, \epsilon q_n, p_1, \ldots, p_n)$ とかける。

(ii) $e_j, j = 1, \ldots, n$ を $\mathbf{R}^n$ の単位ベクトルとしたとき ϵ に依るある自然数 $N = N(\epsilon)$ が存在し

$$J + \epsilon \sum_{j=1}^{n} m_j e_j \subset \Omega_0 \tag{3.1}$$

が $|m_j|0$ を十分小さい正の数とする。実数 s は $-\delta < s < \delta$ の範囲を動くものとする。$\vec{\varepsilon}$ をゼロでない実ベクトルとし $(\vec{x})_j$ で $\vec{x}$ の第 j 成分とする。s が変化するときにできる coadjoint orbit の族 $\mathcal{O}_\lambda(s)$ すなわち

$$\mathcal{D}_j(P) = M_j(s), j = 0, \ldots, n-1$$

ただし $M_j(s)$ は

$$(\vec{\lambda} + \vec{\varepsilon})_j^n + M_{n-1}(s)(\vec{\lambda} + \vec{\varepsilon})_j^{n-1} + \cdots + M_0(s) = 0$$

をみたす係数とする。ここで $\vec{\lambda}$ は $\mathcal{O}_\lambda$ をさだめる方程式の根のなすベクトルとする。とくに

$$M_{n-1}(s) = -(\lambda_1 + \cdots \lambda_n) - s(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)$$

より s が $-\delta < s < \delta$ の範囲で動くと $\mathcal{O}_\lambda(s)_0$ は J のなかの n 次元閉区間 K を掃く。一方 $\mathcal{L}^{2*}$ の中でその support が $\mathcal{O}_{\lambda 0} \cap J$ に含まれているもののなす空間

$$\mathcal{L}^{2*}(\mathcal{O}_\lambda(s) \cap \Omega)_0$$

は D_j^ϵ 達の同時固有空間で

$$V = \oplus_{-\delta < s < \delta} \mathcal{L}^{2*}(\mathcal{O}_\lambda(s) \cap \Omega_0)_0$$

は同時固有ベクトルで張られる空間よって V の上で $[D_i^\epsilon, D_j^\epsilon] = 0$ よって section2 の Lemma より V は $L^2(K)$ を含んでいるので D_j^ϵ 達は $L^2(K)$ 上で可換である。よって一般論より D_j^ϵ 達は偏微分作用素として可換。さらに

$$[D_i^\epsilon, D_j^\epsilon] = 0$$

の左辺は ϵ に関して解析的だから $\epsilon = 1$ とすると

$$[D_i, D_j] = 0$$

Q.E.D.

参考文献

[1] M,Adler, On a trace functional for formal pesudo-differential operators and symplectic structure of the Kortveg de Vries type equations, Invent.Math.**50**(1979) 219-248

[2] O.,Chalykh, M.,Feigin, A.,Veselov, New integrable generalizations of Calgero-Moser quantum problem, Jour.Math.Phys. **39**(1998) 695-703

[3] A.,Givental, Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the Mirror conjecture, preprint

[4] K.,Hasegawa Ruijsenarrs' commuting difference system as commuting transfer matrices, Commun.Math.Phys. **187**(1997) 289-325

[5] G.,Heckman, E., Opdam, Root systems and hypergeometric functions I, Comp.Math.**64**(1987) 329-352

[6] K.,Ikeda, The fiberbundles on the coadjoint orbit and the commutative ring of partial differential operators, preprint

[7] B.,Kostant, The solution to a generalized Toda lattice and representation theory, Adv.Math.**34**(1979) 195-338

[8] B.,Kostant, On Whittaker vectors and representation theory, Invnt.Math. **48**(1978) 101-184

[9] H.,Ochiai, T.,Ohsima, H.,Sekiguchi, Commuting Families of symmetric differential operators, Proc.Japan Acad.**70**(1994),62-66.

[10] M.,Ol'shanetsky, A.,Perelomov, Explicit solutions of the classical generalized Toda models, Invent.Math.**54**(1979) 261-269

[11] M.Semenov-Tian-Shansky, Quantization of open Toda lattices, Dynamical Systems VII V.Arnold and S.Novikov(Eds) Encyclopaedia of Math.**16** (1994)