

等質空間における不連続群

小林 俊行 (TOSHIYUKI KOBAYASHI)

Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo, Meguro, Komaba, 153-8914, Tokyo, Japan

ABSTRACT. 簡約型等質空間 G/H (G, H は実簡約リー群) における不連続群の最近 10 年間における結果を概説する。

§1. 等質空間の CLIFFORD-KLEIN FORM

1.1. 最初に, 等質空間の Clifford-Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ が現れる背景を初等的に説明しよう。

M を多様体, J をその上の微分幾何構造 (複素構造, 擬リーマン構造, シンプレクティック構造, ...) とする。 $\widetilde{M}$ を M の普遍被覆多様体とし, 被覆写像を

$$p: \widetilde{M} \rightarrow M$$

と書く。基点 $o \in M$ を選び, $\bar{o} = p(o)$ と表す。 J を局所微分同相写像 p によって引き戻すことにより, $\widetilde{M}$ にも J が定義される。

さて, $\text{Diffeo}(\widetilde{M})$ を $\widetilde{M}$ の自己微分同相写像全体からなる群とし, その部分群として

$$G := \text{Aut}(\widetilde{M}, J)$$

を定義する。 J が複素構造ならば G は双正則変換群, J が擬リーマン構造ならば G は等長変換群に他ならない。擬リーマン構造など, いくつかの幾何構造に対しては G が “有限次元”, すなわちリー群になることが知られている。 M の基本群

$$\Gamma := \pi_1(M, \bar{o})$$

は被覆変換として $\widetilde{M}$ に固有不連続かつ自由 (用語は §2 参照) に作用するが, $\widetilde{M}$ 上の微分幾何構造 J の定義を思い起こせば, この作用は J を不変にしている。すなわち,

$$\Gamma \subset G$$

が成り立つ。ここで 次の条件を仮定する:

仮定 1.1. G は $\widetilde{M}$ に推移的 (transitive) に作用する。

G の閉部分群 H を

$$H := \{g \in G : g \cdot \bar{o} = \bar{o}\}$$

と定義すると, 仮定 1.1 より, 次の全単射写像が得られる:

$$G/H \xrightarrow{\sim} \widetilde{M}, \quad gH \mapsto g \cdot \bar{o}.$$

微分同相写像 $M \simeq \Gamma \backslash \widetilde{M}$ と合わせると, 次の命題が示された:

命題 1.2. 仮定 1.1 が成り立てば, M と両側剰余空間 $\Gamma \backslash G/H$ の間に自然な全単射写像が存在する:

$$\Gamma \backslash G/H \xrightarrow{\sim} M, \quad \Gamma gH \mapsto g \cdot \bar{o}.$$

ここで, 両側剰余空間 $\Gamma \backslash G/H$ とは, 群 G に以下の同値関係 $\sim$ を入れた同値類全体の集合である:

$$g \sim g' \Leftrightarrow g' = \gamma gh \text{ となる } \gamma \in \Gamma, h \in H \text{ が存在する.}$$

仮定 1.1 が満たされる (特に 命題 1.2 が成り立つ) いくつかの典型例を見てみよう:

例 1.3. M をリーマン面, J を M 上の複素構造とする。Klein-Poincaré-Koebe によるリーマン面の一意化定理より, M の普遍被覆 $\widetilde{M}$ は $\mathcal{H}$ (Poincaré の上半平面), $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ のいずれかに双正則同型である。例えば, M が種数 g のコンパクトなリーマン面ならば, $g \geq 2$, $g = 1$, $g = 0$ の場合に依じて $\widetilde{M} = \mathcal{H}, \mathbb{C}, \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ と双正則同型となっている。 $\widetilde{M} = \mathcal{H}, \mathbb{C}, \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ のとき, 双正則変換群 $G = \text{Aut}(\widetilde{M}, J)$ は,

$$\text{Aut}(\mathbb{C}, J) \equiv \text{Bihol}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$$

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}, J) \equiv \text{Bihol}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) \simeq PSL(2, \mathbb{C})$$

$$\text{Aut}(\mathcal{H}, J) \equiv \text{Bihol}(\mathcal{H}) \simeq PSL(2, \mathbb{R})$$

となる。いずれの場合も, G は $\widetilde{M} \simeq \mathbb{C}, \mathbb{P}^1\mathbb{C}, \mathcal{H}$ に推移的に作用しているので, 仮定 1.1 がみたされる。故に, 任意のリーマン面 M は, 上記の 3 種類のリー群 G のいずれかの両側剰余類 $\Gamma \backslash G/H$ として表される。このとき, $M \simeq \Gamma \backslash G/H$ の複素構造は G/H によって誘導され, その大域的な性質は基本群 $\pi_1(M) \simeq \Gamma$ によって規定されることに注意しておく。

例 1.4. 3 次元以上の完備なローレンツ多様体で定曲率 (断面曲率 $K = +1$) な空間を相対論的球空間形 (relativistic spherical space form) という。ここで, n 次元ローレンツ多様体 M とは, 符号 $(n-1, 1)$ の擬リーマン計量をもつ多様体のことである。Calabi と Markus は, 1960 年代初頭に「任意の相対論的球空間形は非コンパクトであり, その基本群は常に有限群である」という驚くべき現象 (Calabi-Markus 現象) を発見した ([6])。¹ M を相対論的球形, J をローレンツ計量とすると, 普遍被覆多様体 $\widetilde{M}$ の等長変換群 $\text{Aut}(\widetilde{M})$ は

$$\text{Aut}(\widetilde{M}, J) \simeq O(n+1, 1)$$

によって与えられ, これは $\widetilde{M} \simeq O(n+1, 1)/O(n, 1)$ に推移的に作用するので仮定 1.1 はみたされている。従って, Calabi-Markus 現象とは, 「等質多様体 $O(n+1, 1)/O(n, 1)$ に固有不連続に作用する $O(n+1, 1)$ の離散部分群が有限群に限る」という主張と同値になる。

¹その後, 個別のランク 1 の対称空間の Calabi-Markus 現象の研究が [24], [40], [41] などで行われ, 1989 年に一般的な必要十分条件 (系 3.9) が証明された ([12])。

例 1.5. M を完備かつ平坦な多様体, J をアファイン接続とする。このとき, $\widetilde{M} \simeq \mathbb{R}^n$ であり,

$$G = \text{Aut}(\widetilde{M}, J) \simeq GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$$

はやはり $\widetilde{M} \simeq \mathbb{R}^n$ に推移的に作用するので仮定 1.1 がみたされる。 $\widetilde{M} \simeq G/GL(n, \mathbb{R})$ の不連続群に関して, 「 M がコンパクトならば $\pi_1(M)$ は実質的に可解群であろう」という Auslander 予想があり, 現在も未解決問題である ([1], [10], [20], [27], [28], [30], [38])。ここでは立ち入らない。

§2. CLIFFORD-KLEIN 形と等質空間の不連続群の基本問題

2.1. 命題 1.2 を, 位相群の立場から見直してみよう。まず, 簡単に用語を復習する。

局所コンパクト位相群 Γ が局所コンパクト位相空間 X に連続に作用しているとする。 X の部分集合 S に対して, Γ の部分集合 Γ_S を

$$\Gamma_S := \{g \in \Gamma : g \cdot S \cap S \neq \emptyset\}$$

と定義する。 $p \in X$ に対して, $\Gamma_{\{p\}}$ は p における固定部分群である。また, 明らかに $\Gamma_X = \Gamma$ である。一般の集合 S に対して, Γ_S は部分群とは限らない単なる集合である。

定義 2.1. 1) 任意のコンパクト集合 S に対して Γ_S がコンパクトとなるとき, Γ の X への作用は固有 (proper) であるという (Palais [35])。

2) 任意のコンパクト集合 S に対して Γ_S が有限集合となるとき, Γ の X への作用は固有不連続 (properly discontinuous) あるいは真性不連続であるという。

3) 任意の点 $p \in X$ に対して $\Gamma_{\{p\}}$ が一点であるとき, Γ の X への作用は固定点がない (free) あるいは (あまり的確な訳語ではないが) 自由という。

2.2. 位相空間の部分集合に対して「コンパクト & 離散 $\Leftrightarrow$ 有限集合」であるから,

$$\text{作用が固有 \& } \Gamma \text{ が離散部分群} \Leftrightarrow \text{作用が固有不連続}$$

が成り立つ。従って, 作用の性質としては, 固有不連続性は固有な作用の特別な場合として捉えればよい。さらに, Γ が捻れ元のない (torsion free) 離散部分群ならば, Γ の有限部分群は $\{e\}$ に限る。従って, 次の初等的な補題が示された:

補題 2.2. 捻れ元のない離散部分群 Γ が局所コンパクト位相空間 X に連続に作用しているとする。このとき, Γ の作用が固有であることと, Γ の作用が固有不連続かつ自由であることは同値である。

上記の補題の仮定は, あまり強いものではないことが, 例えば次の Selberg の補題よりわかる:

補題 2.3 (Selberg, [37]). 線型リー群に含まれる有限生成の離散部分群 Γ は本質的に捻れ元がない。すなわち, 捻れ元を含まない部分群 Γ' であって, Γ/Γ' が有限集合となるような Γ' が存在する。

2.4. 以上の準備のもとに, 命題 1.2 で与えられた多様体を群論的に解釈しよう。

G がリー群 (あるいは, もっと一般に局所コンパクト位相群), H を G の閉部分群, Γ が G の離散部分群とする (G/H は単連結とは限らないが, 上記の $\widetilde{M} \simeq G/H$ がモ

デルになっている)。 Γ が等質空間 G/H に固有不連続かつ自由に作用するならば、両側剰余空間 $\Gamma \backslash G/H$ は商位相で Hausdorff であり、その商位相の上に自然な射影

$$G/H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$$

が局所微分同相になるような多様体の構造が一意的に存在する。このような多様体 $\Gamma \backslash G/H$ を等質空間 G/H のクリフォード-クライン形 (Clifford-Klein form) とよぶ。またこのとき、 Γ を等質空間における不連続群とよぶ。

2.5. Clifford-Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ は等質多様体 G/H と局所同型な多様体である。従って、等質空間における不連続群がどの程度豊富に存在するかという問題は、等質多様体 G/H の左 G -不変な微分幾何構造 (リー環で記述される) と局所的に同型な構造をもつ多様体は大域的にどのような制約があるかを調べることにほぼ対応する。

もう少し具体的に、等質空間における不連続群の基本問題を述べよう：

問題 A. 等質空間 G/H への離散部分群 Γ の作用が固有不連続になるための判定条件を決定せよ。

問題 B. 等質空間 G/H を与えたとき、コンパクトな (あるいは体積有限な) Clifford-Klein 形をもつかどうかを判定せよ。

問題 C. G/H を止めて Γ を動かすことによって得られる $\Gamma \backslash G/H$ の変形²を記述せよ。

2.6. 以降、 G が簡約線型リー群の場合に上記の問題を考える。 H がコンパクトの場合は、上記の問題に関して次の事実が知られている：

問題 A: H がコンパクトならば、

$$\Gamma \text{ が離散群} \Leftrightarrow \Gamma \text{ の } G/H \text{ への作用が固有不連続}$$

となるので、問題 A は無条件で成り立つことになる。

問題 B: 1960 年代初頭に、Borel, Harish-Chandra, Mostow-玉河によって常にコンパクトな Clifford-Klein 形が存在することが証明された ([4], [5], [31])。

問題 C: 簡単のため、 G を単純線型リー群とし、 H を G の極大コンパクト部分群とする。このとき、Selberg-Weil の局所剛性定理 (後に、Mostow, Margulis, Zimmer らによって、より強い形が得られている) より、 $\Gamma \backslash G/H$ が本質的に連続変形できるのは $\dim G/H = 2$ に限る。逆に、 $\dim G/H = 2$ のとき、その変形理論はリーマン面のモジュライやタイヒミラー空間として多くの研究がある。

2.7. G が簡約線型リー群、 H が非コンパクトな部分群の場合がここでのテーマである。問題 A については、満足すべき形で判定条件が証明された (§3 参照)。

問題 B については、完全な解答は得られていないが、最近 10 年間ほどの間に大きな進展があり、

- ・ 離散群のコホモロジーを使う手法 [12],
- ・ 特性類に関する Hirzebruch の比例性原理の一般化 [23],
- ・ リー群論的手法による部分群の比較定理と固有不連続の判定法を使う手法 [2], [17], [18], [34]
- ・ エルゴード理論や Ratner の理論を使う手法 [26], [43],
- ・ 調和写像を使う手法 [7],
- ・ ユニタリ表現論を使う手法 [29],

² H が非コンパクトの場合の定式化は、例えば [22] を参照。

など多くの分野との関わり合いが明らかになってきている(これらの概説には [20], [25] がある。また, [34] も参照)。特に, Margulis [29] による手法は, ユニタリ表現の制限 ([21] 参照) を用いるもので, 極小表現などの球関数の漸近挙動など表現論的にも面白い話題が関連しているが, §4 では紙面の関係上ごく簡単にふれることにする。

問題 C についてはここでは触れないが, 大まかな感じを述べると, H が非コンパクトであるゆえに Γ は比較的小さく, 従って G の内部で変形の余地がかなりある。従って, Selberg-Weil-Mostow-Margulis の剛性定理とは異なり, 高次元の既約 (非リーマン) 対称空間でも, 連続変形ができる場合がある ([18])。連続的な変形についてはまだ研究が始まったばかりである。例えば, 3次元のコンパクトなローレンツ定曲率空間の変形に関する Goldman の予想 ([9]) とその高次元への一般化が, 定理 A を用いて最近証明された ([22], [36])。

§3. 等質空間への離散群の作用の固有不連続性の判定条件

3.1. 簡約部分群の簡約型等質空間への作用が固有になるための判定条件の証明 (1989, 系 3.7 参照) において鍵になったアイディアは, 等質空間上ではなく, 群の内部で作用が固有かどうかを評価するという発想であり, それを実現するために群の有限次元表現を用いるというものであった。このアイディアを推し進めるために, 固定部分群や離散部分群が「群」であることさえ忘れてしまおうというのが, 次の2つの定義である。

定義 3.1 ([19], Definition 2.1.1). H と L を局所コンパクト位相群 G の部分集合とする。

- 1) G のコンパクトな部分集合 S が存在して, $L \subset SHS$ かつ $H \subset SLS$ となるとき, $L \sim H$ と書くことにする。
- 2) G の任意のコンパクトな部分集合に対して, $L \cap SHS$ が相対コンパクトであるとき, $L \curvearrowright H$ と書く³ことにする。

$\sim$ と $\curvearrowright$ の簡単な性質をまとめておく ([19], §2):

補題 3.2. H と L を局所コンパクト位相群 G の部分集合とする。

- 1) $\sim$ は同値関係を定める。
- 2) $\sim$ による同値類に対して, $\curvearrowright$ は矛盾なく定義される。すなわち, $H_1 \sim H_2$ ならば,

$$H_1 \curvearrowright L \Leftrightarrow H_2 \curvearrowright L.$$

- 3) $H \curvearrowright L \Leftrightarrow L \curvearrowright H$.

- 4) H と L が G の閉部分群ならば,

$$L \curvearrowright H \Leftrightarrow L \text{ は等質空間 } G/H \text{ に固有 (proper) に作用する.}$$

3.3. G を簡約線型リー群とする。 G のリー環 $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

をとり, $\mathfrak{p}$ の極大可換部分代数 $\mathfrak{a}$ を選ぶ。 G の実ランク $\mathbb{R}\text{-rank } G$ は $\dim \mathfrak{a}$ のことである。さらに,

$$d(G) := \dim \mathfrak{p}$$

³幾何では $\curvearrowright$ は横断交差を表す記号であり, ここでの用法は通常の用法と異なる。

とおく。ルート系 $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に関する Weyl 群を W_G と書き、正ルート系を一つ選んで、対応する dominant Weyl chamber を $\mathfrak{a}_+$ とする ($\mathfrak{a}_+$ は $\mathfrak{a}$ の閉錐である)。 $\mathfrak{a}_+$ は、ワイル群 W_G の $\mathfrak{a}$ 上の軌道空間 $\mathfrak{a}/W_G$ の完全代表系を与える。 K を $\mathfrak{g}$ に対応する G の極大コンパクト部分群とする。 $A_+ := \exp \mathfrak{a}_+$ とおくと、

$$G = KA_+K \quad (\text{Cartan 分解})$$

がなりたつ。そこで、Cartan 射影

$$\nu: G \rightarrow \mathfrak{a}_+$$

を $g \in K \exp(\nu(g))K$ という条件によって定義する。

w_0 を ワイル群 W_G の最長元とし、次の閉錐を定義する。

$$\mathfrak{b}_+ = \{X \in \mathfrak{a}_+ : X = -w_0 X\}.$$

例 3.3. $G = GL(n, \mathbb{R})$ の場合の Cartan 射影を計算してみよう。 $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の対角行列全体のなす可換部分代数を $\mathfrak{a}$ とする。 $\mathfrak{a} \simeq \mathbb{R}^n$ である。 $g \in GL(n, \mathbb{R})$ に対し、 $k_1, k_2 \in K = O(n)$ をうまく選んで

$$g = k_1 \exp \nu(g) k_2$$

と表されたとすると、

$${}^t g g = {}^t k_2 \exp \nu(g) {}^t k_1 k_1 \exp \nu(g) k_2 = k_2^{-1} \exp(2\nu(g)) k_2$$

となる。さて、 ${}^t g g$ は正定値対称行列だから、直交行列によって対角化でき、その固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ はすべて正である。従って、固有値の順序を適当に選べば、

$$2\nu(g) = \text{diag}(\log \lambda_1, \dots, \log \lambda_n)$$

となるので、 $GL(n, \mathbb{R})$ の Cartan 射影が計算された。

次の定理は、等質空間への作用が固有 (あるいは固有不連続) かどうかの判定条件を与える:

定理 A ([19], Theorem 3.4, Theorem 5.6). G は簡約線型リー群あるいは、その有限被覆とする。 $\nu: G \rightarrow \mathfrak{a}_+$ を Cartan 射影とする。 H, L を G の部分集合とする。

- 1) G において $H \sim L \iff \mathfrak{a}$ において $\nu(H) \sim \nu(L)$ 。
- 2) G において $H \pitchfork L \iff \mathfrak{a}$ において $\nu(H) \pitchfork \nu(L)$ 。

注意 3.4. (1) の $\Leftarrow$ と (2) の $\Rightarrow$ は自明。

注意 3.5. (1) の $\Rightarrow$ は、行列の摂動に対する固有値の変化に関して、行列のなす非コンパクト集合上においてもかなり良い一様評価ができることに対応している。この事実は、直接証明も可能であるが、「 $H \pitchfork L$ となる L を全て知れば、 H が $\sim$ を除いて復元される」という双対定理 ([19], Theorem 5.6) の系として証明される。

注意 3.6. 一般に $\pitchfork$ は定義の見かけ上の素朴さに反して具体的に判定しにくい条件であるが、群が可換ならば $\pitchfork$ は簡単に検証できる。特に、定理 A(2) の右側の「 $\mathfrak{a}$ において $\nu(H) \pitchfork \nu(L)$ 」という条件は $\nu(H)$ と $\nu(L)$ を具体的に記述すれば、容易に検証できる。

H が G において簡約な閉部分群とすると、一般性を失わずに、 $H \cap K$ は H において極大コンパクト部分群であり、 $\mathfrak{a}_H = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$ は $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ において極大可換部分空間であると仮定してよい。このとき、 W_G を法として、 $\nu(H) = \mathfrak{a}_H$ である。従って、定理 A より次の系が得られる⁴

⁴実際の順序は、系 3.7 (1989) を一般化して定理 A (1996) が得られた。

系 3.7([12]). H, L は 簡約線型リー群 G における簡約部分群とする。このとき次の 3 つの条件は同値である。

- i) G において $H \triangleleft L$.
- i') 部分群 H は等質空間 G/L に固有 (proper) に作用する。
- i'') 部分群 L は等質空間 G/H に固有 (proper) に作用する。
- ii) $\nu(H) \cap \nu(L) = \{0\}$.
- iii) 任意の $g \in G$ に対して $H \cap gLg^{-1}$ はコンパクトである。

系 3.7 において、条件 (iii) は、勝手な位相群に対して定義できる条件であり、明らかに (i) のための必要条件である。条件 (iii) は作用が固有であるという性質をどの程度近似しているのであろうか？条件 (iii) が proper な作用のための十分条件でない例は存在する ([16], Example 5)。しかし、 G がベキ零の場合には、簡約リー群の結果の類似が成り立ちそうである：

予想 3.8 (Lipsman 1995, [27]). G が単連結なベキ零リー群とすると、系の (i) と (iii) は同値である。

定理 A を簡約型等質空間 G/H (すなわち、 $H \subset G$ は実簡約リー群の組) に適用した結果を 2 つ述べておこう：

系 3.9 (Calabi-Markus 現象に対する判定条件; [12]). G/H に作用する固有不連続な無限離散群が存在するための必要十分条件は $\mathbb{R}\text{-rank } G > \mathbb{R}\text{-rank } H$ が成り立つことである。

系 3.10 (Benoist 1996, [2]). G/H に作用する固有不連続な非可換無限離散群が存在するための必要十分条件は任意の $w \in W_G$ に対して、 $w\mathfrak{a}_H \not\subset \mathfrak{b}_+$ が成り立つことである。

注意 3.11. $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ が A, D, E 型以外の場合には、 $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{a}_+$ となるので、系 3.9 と系 3.10 の判定条件は同値になる。

§4. コンパクトなクリフォード-クライン形の存在問題

H が非コンパクトな場合にも等質空間 G/H にはコンパクトなクリフォード-クライン形が存在する場合がある。この節では、定理 A を用いて得られる存在条件を手短に述べる (定理 B, 定理 C)。定理は抽象的な形で書かれるが、それを適用することによって得られる具体例は、概説記事 [20] の第 5 章の表を参照していただきたい。

定理 A によって固有不連続に作用する判定条件が決定されているので、今度は $\Gamma \backslash G/H$ がいつコンパクトになるかを判定すればよい。離散群 Γ のコホモロジー次元を介することにより、次の存在定理が得られる：

定理 B ([12]). G は 実簡約線型リー群、 H と L はともに G において簡約な閉部分群とする。組 (G, L, H) が以下の条件

$$\begin{aligned} (4.1)(a) \quad & \nu(L) \cap \nu(H) = \{0\}, \\ (4.1)(b) \quad & d(L) + d(H) = d(G), \end{aligned}$$

を満たすと仮定する。このとき、 L の捻れ元のない一様格子 Γ (常に存在する) をとれば、 $\Gamma \backslash G/H$ はコンパクトな Clifford-Klein 形となる。故に、等質多様体 G/H には

コンパクトな Clifford-Klein 形が存在する。さらに, L が半単純のとき, G/H には体積 $\text{Vol}(\Gamma \backslash G/H)$ が有限である非コンパクト Clifford-Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ も存在する。

注意 4.2. H と L は対称な役割を果たしているので, 上の仮定 (4.1)(a),(b) が成り立っていれば, 等質多様体 G/L にもコンパクトな Clifford-Klein 形 及び体積有限な非コンパクト Clifford-Klein 形が存在する。

注意 4.3. H がコンパクトな場合は, $L = G$ とすると定理 B の仮定 4.1 (a), (b) が満たされる。従って H がコンパクトの場合の 定理 B は, Borel の結果 [4] に対応する (ただし, 別証明を与えているわけではない)。

例 4.4. $(G, H, L) = (SO(2n, 2), U(n, 1), SO(2n, 1))$ は定理 B の仮定をみたす。従って, 等質空間 $SO(2n, 2)/U(n, 1)$ や $SO(2n, 2)/SO(2n, 1)$ にはコンパクトなクリフォード-クライン形が存在する。このような (G, H, L) の表は [20], Corollary 5.6⁵を参照されたい。

予想 4.5 ([20], Open problems). 簡約型等質空間 G/H にコンパクトなクリフォード-クライン形 $\Gamma \backslash G/H$ が存在するならば定理 B の仮定を満たす連結な部分群 L が存在する。(ただし, Γ の Zariski 閉包がこのような L に一致するとは限らない。)

この予想を肯定的に支持する結果として, Benoist (1996) [2], Margulis (1997) [29], Labourie-Mozes-Zimmer [26], 小野-小林 (1990) [23], 小林 (1989) [12], 小林 (1992) [17], Oh-Witte (1999)[34], Zimmer(1994) [43] などがあるが, まだ現時点では未解決である。既に §2.7 で触れたように, これらの中には全く異なる分野を基盤として証明された手法がいくつかある。その適用例にはしばしば重なりも見られる ([20], 第 5 章の解説を参照) が, 現時点でもっとも適用範囲が広いのは次の定理である:

定理 C ([17]). G/H を 簡約型等質空間とする。 G において簡約な閉部分群 L で以下の 2 条件を満たすものが存在すると仮定する:

$$(4.6)(a) \quad \nu(L) \subset \nu(H),$$

$$(4.6)(b) \quad d(L) > d(H).$$

このとき, G/H にはコンパクトな Clifford-Klein 形が存在しない。

定理 B の仮定を満たす実半単純対称空間 G/H はかなり存在するが, 複素半単純対称空間では局所的に群多様体の場合を除いて存在しない。従って, 予想 4.5 の特別な場合として次の事実が予想される:

予想 4.7. $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ は複素既約半単純対称空間とする。 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ がコンパクト Clifford-Klein 形をもつための必要十分条件は $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が群多様体と局所的に同型であることである。

定理 C を適用することにより, 大部分の複素対称空間に対して, 予想 4.7 が正しいことがわかる:

命題 4.7.1 ([17], Example 1.9). 予想 4.7 は $SO(m, \mathbb{C})/SO(m-1, \mathbb{C})$ (m は偶数) $SL(2n, \mathbb{C})/Sp(n, \mathbb{C})$ ($n \geq 2$), $E_{6,\mathbb{C}}/F_{4,\mathbb{C}}$ 以外のすべての既約な複素半単純対称空間に対して正しい。

また, Benoist (1996) は系 3.10 を用いて次の命題を証明した。

⁵[11] で得られた例のほか, 散在する例外的な組 (G, H, L) が付け加わっている。

命題 4.7.2 ([2]). m が 4 の倍数ならば, 予想 4.7 は $SO(m, \mathbb{C})/SO(m-1, \mathbb{C})$ に対して成り立つ。

命題 4.7.1 と 命題 4.7.2 で残されたケースに対して, 予想 4.7 は現在未解決である。

4.8. 定理 C の別の応用例として, 随伴表現による Lie 環の軌道を考えよう。Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X を一つ選び, X を通る随伴軌道

$$\text{Ad}(G)X = \{\text{Ad}(g)X : g \in G\}$$

は, $\mathfrak{g}$ の部分多様体となり, G の等質空間 G/G_X と同一視される。ここで, G_X は $\{g \in G : \text{Ad}(g)X = X\}$ によって定義される固定部分群である。 G が半単純リー群ならば, Killing 形式によって $\mathfrak{g}$ と双対空間 $\mathfrak{g}^*$ を同一視でき, 随伴軌道 $\text{Ad}(G)X$ には, G -不変なシンプレクティック構造が定義される。

さて, $\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ が半単純な線型変換を与えると, $\text{Ad}(G)X$ を半単純軌道とよぶ。このとき, G_X は簡約な部分群になり, $\text{Ad}(G)X$ には G -不変な擬リーマン計量が存在する。定理 C をこの場合に適用することにより, 次の幾何的な結果が得られる。

定理 D ([16], [17]). 半単純軌道 $\text{Ad}(G)X$ にコンパクトなクリフォード-クライン形が存在するならば, $\text{Ad}(G)X$ には G -不変な複素構造が存在する。さらに, 上記のシンプレクティック構造や擬リーマン計量と両立する G -不変な擬 Kähler 構造⁶が存在する。

一方, 半単純軌道であるが, 不変な複素構造を持たない典型例には

$$G/H = GL(n+m, \mathbb{R})/(GL(n, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R}))$$

のようなパラ等質空間とよばれるクラスがある。この例では

$$X = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathfrak{gl}(n+m, \mathbb{R})$$

を通る半単純軌道 $\text{Ad}(G)X$ である。一般に, $\text{ad}(X)$ の固有値がすべて実数であるような X を通る半単純軌道 $\text{Ad}(G)X$ はパラ等質空間 G/H の構造をもつ。このとき, $\mathbb{R}\text{-rank } G = \mathbb{R}\text{-rank } G_X$ となるので, パラ等質空間 G/G_X には無限不連続群が存在せず (Calabi-Markus 現象), 従ってクリフォード-クライン形は決してコンパクトになりえない。

半単純軌道が複素構造を持ち, さらに半単純対称空間の構造をもつ空間は Berger の分類では $\frac{1}{2}$ -Kähler 対称空間とよばれている。例えば, 等質空間

$$SO(2n, 2m)/U(n, m)$$

は $\frac{1}{2}$ -Kähler 対称空間の例である。この例において, $n, m \geq 1$ のときは, 固定部分群が非コンパクトであることに注意しよう。 $n = 1$ または $m = 1$ ならば, コンパクトなクリフォード-クライン形が存在することが定理 B よりわかる。

定理 D は, 最初, G/G_X が (本質的に) 楕円型軌道であることを示すことによって証明された。そのアイデアを簡単に説明しよう ([17]):

⁶計量が正定値のかわりに不定値も許容するという点を除いて Kähler 計量と同じように定義される。

- イ) $\mathrm{ad}(X)$ の実固有値が減り、純虚数固有値が増えるように X を (あるやり方で) 新しい元 Y に取り替えると、 G/G_Y は擬ケーラー等質多様体の構造をもつ。
- ロ) 定理 A を用いると、変換群 G の離散部分群 Γ が G/G_X に固有不連続に作用しているならば、 Γ は G/G_Y にも固有不連続に作用することが示される。
- ハ) Serre のスペクトラル系列を用いて比較すると、 $\Gamma \backslash G/G_X$ より $\Gamma \backslash G/G_Y$ の方がコンパクトになりやすいことが示される。
- ニ) 従って、 $\Gamma \backslash G/G_X$ がコンパクトと仮定すれば、 $G_X = G_Y$ が結論される。

その後、Benoist と Labourie は、シンプレクティック幾何の手法を用いるという全く異なるアイデアによって、定理 D の別証明を与えた [3]。なお、彼らの手法は、固定部分群に $\mathbb{R}$ と同型な正規部分群が含まれているという仮定に基づいているため、半単純対称空間には適用できない⁷。

4.9. 最後に、最近、さまざまな手法が適用できる例として多くの人が研究している $SL(n)/SL(m)$ の場合のコンパクトなクリフォード-クライン形の存在問題に触れよう。

この方向の最初の例は、定理 C を $G = SL(3, \mathbb{C})$, $H = SL(2, \mathbb{C})$, $L = SU(2, 1)$ に適用することによって示された次の結果である (1990):

命題 4.9 ([16]). $SL(3, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{C})$ にはコンパクトなクリフォード-クライン形が存在しない。

また、Benoist (1996) は系 3.10 を用いて次の命題を示した:

命題 4.10 ([2]). $SL(3, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{R})$ にはコンパクトなクリフォード-クライン形が存在しない。

この命題は、最近 Oh-Witte (1999) によって次のように拡張された:

命題 4.11 ([34]). $SL(3, \mathbb{R})$ の非コンパクトかつ非余コンパクトな部分群 H に対して、 $SL(3, \mathbb{R})/H$ にはコンパクトなクリフォード-クライン形が存在しない。

命題 4.9, 命題 4.10 をそれぞれを高次元の場合に述べると、

定理 E ([17]). $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。 $n > \frac{3}{2}m + 2$ ならば $SL(n, F)/SL(m, F)$ にはコンパクトなクリフォード-クライン形が存在しない。

定理 4.12 (Benoist). $n = m + 1$ かつ m は偶数ならば $SL(n, \mathbb{R})/SL(m, \mathbb{R})$ にはコンパクトなクリフォード-クライン形が存在しない。

また、Zimmer (1994) は $\Gamma \backslash SL(n)/SL(m)$ における $SL(n-m)$ の作用のエルゴード性を用いるという手法で、次の定理を示した。

定理 4.13 (Zimmer [43]). $n \gg 2m$ ならば $SL(n, F)/SL(m, F)$ にはコンパクトなクリフォード-クライン形が存在しない。

ただし、定理 4.13 は定理 E より弱い結果になっている。

一方、Margulis (1997) は $SL(n)$ のユニタリ表現を $SL(m)$ に制限してその漸近挙動を調べるという表現論的手法で次の定理を示した。

定理 4.14 (Margulis [29]). $\varphi : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$ を既約表現とする。 $n \geq 4$ ならば $SL(n, \mathbb{R})/\varphi(SL(2, \mathbb{R}))$ にはコンパクトなクリフォード-クライン形が存在しない。

⁷ 半単純対称空間 G/H において、 H が $\mathbb{R}$ を正規部分群として含むならば、 $\mathbb{R}$ -rank $G = \mathbb{R}$ -rank H となり、Calabi-Markus 現象が起こる。

⁸ 実際は、偶奇によって、もう少し良い評価ができる; [20] 参照。

REFERENCES

- [1] L. Auslander, *The structure of compact locally affine manifolds*, Topology **3** (1964), 131-139.
- [2] Y. Benoist, *Actions propres sur les espaces homogenes reductifs*, Annals of Math. **144** (1996), 315-347.
- [3] Y. Benoist and F. Labourie, *Sur les espaces homogenes modeles de varietes compactes*, I. H. E. S. Publ. Math. **76** (1992), 99-109.
- [4] A. Borel, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111-122.
- [5] A. Borel and Harish-Chandra, *Arithmetic subgroups of algebraic groups*, Annals of Math. **75** (1962), 485-535.
- [6] E. Calabi and L. Markus, *Relativistic space forms*, Annals of Math. **75** (1962), 63-76.
- [7] K. Corlette, *Harmonic maps, rigidity and Hodge theory* (1994), ICM-94, invited talk.
- [8] Friedland, *Properly discontinuous groups on certain matrix homogeneous spaces*, Preprint.
- [9] W. M. Goldman, *Nonstandard Lorentz space forms*, J. Differential Geometry **21** (1985), 301-308.
- [10] W. Goldman and Y. Kamishima, *The fundamental group of a compact flat space form is virtually polycyclic*, J. Differential Geometry **19** (1984), 233-240.
- [11] T. Kobayashi, *Properly discontinuous actions on homogeneous spaces of reductive type*, Seminar Reports of Unitary Representation Theory **8** (1988), 17-22.
- [12] ———, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), 249-263.
- [13] ———, *Discontinuous groups and homogeneous spaces with indefinite metric*, 第 36 回幾何学シンポジウム報告集 (1989), 104-116.
- [14] ———, *Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type*, Seminar Reports of Unitary Representation Theory **10** (1990), 41-45.
- [15] ———, *Discontinuous group in a non-Riemannian homogeneous space*, 数理研講究録 **737** (1990), 1-24.
- [16] ———, *Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type*, Proceedings of the International Conference on Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras (1990 August-September, at Fuji-Kawaguchiko) (1992), World Scientific, Singapore, 59-75.
- [17] ———, *A necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of reductive type*, Duke Math. J. **67** (1992), 653-664.
- [18] ———, *On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with noncompact isotropy subgroups*, J. Geometry and Physics **12** (1993), 133-144.
- [19] ———, *Criterion of proper actions on homogeneous space of reductive groups*, J. Lie Theory **6** (1996), 147-163.
- [20] ———, *Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, Lecture Notes of the European School 1994 on Group Theory, Algebraic and Analytic Methods in Representation Theory, Eds. H. Schlichtkrull and B. Ørsted, Perspectives in Mathematics **17**, Academic Press, 1996, pp. 99-165, ISBN 0-12-625440-0.
- [21] ———, *Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications*, I, II, III, Part I, Inventiones Mathematicae **117** (1994), 181-205, Part II, Annals of Math. **147** (1998), 709-729; Part III, Invent. Math. **131** (1998), 229-256.
- [22] ———, *Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds*, Math. Ann. **310** (1998), 394-408.
- [23] T. Kobayashi and K. Ono, *Note on Hirzebruch's proportionality principle*, J. Fac. Soc. University of Tokyo **37** (1990), 71-87.
- [24] R. S. Kulkarni, *Proper actions and pseudo-Riemannian space forms*, Advances in Math. **40** (1981), 10-51.
- [25] F. Labourie, *Quelques résultats récents sur les espaces localement homogènes compacts*, Symposia Mathematica (en l'honneur d'Eugenio Calabi) (P. de Martolomeis, F. Tricerri and E. Vesentini, eds.), vol. XXXVI, Cambridge University Press, 1996, pp. 15 pages.
- [26] F. Labourie, S. Mozes and R. J. Zimmer, *On manifolds locally modelled on non-Riemannian homogeneous spaces*, preprint.
- [27] R. Lipsman, *Proper actions and a compactness condition*, J. Lie Theory **5** (1995), 25-39.

- [28] G. A. Margulis, *Free completely discontinuous groups of affine transformations*, Soviet Math. Dokl. **28-2** (1983), 435–439.
- [29] ———, *Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients*, Bul. Soc. math. France **125** (1997), 447–456.
- [30] J. Milnor, *On fundamental groups of complete affinely flat manifold*, Advances in Math. **25** (1977), 178–187.
- [31] G. D. Mostow and T. Tamagawa, *On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces*, Ann. Math. **76** (1962), 446–463.
- [32] H. Oh, *Tempered subgroups and representations with minimal decay of matrix coefficients*, Bull. Soc. Math. France **126** (1998), 355–380.
- [33] H. Oh and D. Witte, *Cartan-decomposition subgroups of $SO(2, n)$* , preprint (1999).
- [34] ———, *New examples of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of $SO(2, n)$* , preprint (1999).
- [35] R. S. Palais, *On the existence of slices for actions of noncompact Lie groups*, Ann. Math. **73** (1961), 295–323.
- [36] F. Salein, *Variétés anti-de Sitter de dimension 3 possédant un champ de Killing non trivial*, C. R. Acad. Sci. Paris **324** (1997), 525–530.
- [37] A. Selberg, *On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces*, Contributions to functional theory, Bombay, 1960, pp. 147–164.
- [38] G. Tomanov, *The virtual solvability of the fundamental group of a generalized Lorentz space form*, J. Differential Geometry (1990), 539–547.
- [39] N. R. Wallach, *Two problems in the theory of automorphic forms*, Open Problems in Representation Theory, 1988, pp. 39–40, Proceedings at Katata, 1986.
- [40] J. A. Wolf, *The Clifford-Klein space forms of indefinite metric*, Ann. Math. **75** (1962), 77–80.
- [41] ———, *Isotropic manifolds of indefinite metric*, Comment. Math. Helv. **39** (1964), 21–64.
- [42] ———, *Spaces of constant curvature*, 5th ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, 1984.
- [43] R. J. Zimmer, *Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 159–168.