表現論シンポジウム講演集, 1999
pp.25-86

ARTHUR-SELBERG 跡公式— 構成と応用 —

今野 拓也 (TAKUYA KONNO)

Contents

1. 導入

$\mathbf{G}$ を実 Lie 群とし、Γ をその離散部分群で商空間 $\Gamma\backslash\mathbf{G}$ がコンパクトであるようなものとする。$\mathbf{G}$ 上の右不変測度 dg を固定し、それと各点が測度 1 を持つ Γ 上の測度による $\Gamma\backslash\mathbf{G}$ 上の商測度を再び dg と書く。

$$\int_{\mathbf{G}} f(g)\,dg = \int_{\Gamma\backslash\mathbf{G}} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma g)\,dg.$$

$f \in C_c^\infty(\mathbf{G})$ に対して、Hilbert 空間 $L^2(\Gamma\backslash\mathbf{G})$ 上の $\mathbf{G}$ の右正則表現 R によって得られる作用素 $(\phi \in L^2(\Gamma\backslash\mathbf{G}))$

$$[R(f)\phi](x) := \int_{\mathbf{G}} f(g)\phi(xg)\,dg = \int_{\Gamma\backslash\mathbf{G}} \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)\Big)\phi(y)\,dy$$

は核函数

$$K(x,y) := \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)$$

を持つ積分作用素である。$\Gamma\backslash\mathbf{G}$ がコンパクトなのでこれは Hilbert-Schmidt class だが、更に Duflo-Labesse の議論 [A1, Cor.4.2], [DL, I.1.11] により、$f_i', f_i'' \in C_c^\infty(\mathbf{G})$ $(1 \le i \le r)$ があって $f = \sum_{i=1}^r f_i' * f_i''$ と書ける。よって

$$R(f) = \sum_{i=1}^r R(f_i')\circ R(f_i'')$$

は **trace class** でありそのトレースは、Γ 内の共役類の集合を $\mathfrak{O}(\Gamma)$, γ の Γ 及び $\mathbf{G}$ での中心化群を各々 Γ_γ, $\mathbf{G}_\gamma$ と書けば

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}R(f) &= \int_{\Gamma\backslash\mathbf{G}} K(x,x)\,dx = \sum_{\{\gamma\}\in\mathfrak{O}(\Gamma)} \sum_{\delta\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} \int_{\Gamma\backslash\mathbf{G}} f(x^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta x)\,dx \\ &= \sum_{\{\gamma\}\in\mathfrak{O}(\Gamma)} \int_{\mathbf{G}_\gamma\backslash\mathbf{G}} \int_{\Gamma_\gamma\backslash\mathbf{G}_\gamma} f(x^{-1}\gamma x)\,dy\,dx \\ &= \sum_{\{\gamma\}\in\mathfrak{O}(\Gamma)} a(\gamma)I(\gamma,f),\end{aligned}$$

$$a(\gamma) := \mathrm{meas}(\Gamma_\gamma\backslash\mathbf{G}_\gamma), \quad I(\gamma,f) := \int_{\mathbf{G}_\gamma\backslash\mathbf{G}} f(x^{-1}\gamma x)\,dx$$

で与えられる。また、R は $\mathbf{G}$ の既約ユニタリ表現の直和に分解し、各既約表現 π の R での重複度 $a(\pi)$ は有限であることもわかる。

$$\mathrm{tr}R(f) = \sum_{\pi\in\Pi(\mathbf{G})} a(\pi)I(\pi,f).$$

ここで $\Pi(\mathbf{G})$ は $\mathbf{G}$ の既約ユニタリ表現の同型類の集合であり、$I(\pi) = \mathrm{tr}\pi$ は π の distribution character である。こうして Selberg 跡公式の原型 [Se]

$$\sum_{\{\gamma\}\in\mathfrak{O}(\Gamma)} a(\gamma)I(\gamma,f) = \sum_{\pi\in\Pi(\mathbf{G})} a(\pi)I(\pi,f) \tag{1.1}$$

が得られる。この左辺を **幾何サイド**、右辺を **スペクトルサイド** と呼ぶ。

跡公式はこのように構成が単純なことと Frobenius 相互律の拡張とも思える明確な構造によって、様々な変形を生み、幅広い分野で活用されている。その広がりの大きさは、それを包括的に解説することが不可能に思われるほどである。従ってこの講演でもそのような多様な応用にはふれず、これらの分派の一つである Arthur-Selberg 跡公式に話題を絞る。Arthur-Selberg 跡公式は種々の跡公式の中で、$\Gamma\backslash\mathbf{G}$ が測度有限だがコンパクトでない場合への (講演者の知る限り) 唯一の拡張である。この方向への拡張は Selberg 自身も [Se] の中で示唆しているが、それが完全に解決されるにはかなりの時間と労力を要した。何より $\Gamma\backslash\mathbf{G}$ がコンパクトでないため $L^2(\Gamma\backslash\mathbf{G})$ のスペクトル分解が非常に非自明な問題になる。本質的に $\mathbf{G}$ が簡約 Lie 群で Γ がその数論的部分群である場合に限り、この問題は Langlands によって解決された [L2]。この結果と Selberg 自身が示唆した核函数の截頭の巧妙な高次元化により、Arthur は Selberg 跡公式の高次化、いわゆる Arthur-Selberg 跡公式の構成に成功した [A1], [A2], [Lab] ([CLL])。

こうして得られた跡公式はその収束性においてきわめて弱く、たとえばそのテスト函数として $\mathbf{G}$ 上の二乗可積分函数などを取ることはできない。しかし保型形式の研究やその Artin 予想や Hasse-Weil 予想への応用に際しては、跡公式は他の群の跡公式や、志村多様体の ℓ-進コホモロジーに対する Lefschetz-Grothendieck 跡公式などと比較するものであって、個々の公式の収束性についての強い情報は必要ない。これが、解析的に見れば満足な跡公式が得られない非コンパクトな場合にまである意味で "強引に" 跡公式を拡張する動機である。

一方でこうした応用のためには跡公式を比較に適した形に書かなければならない。まず Arthur がそうしているように $\mathbf{G}$ 及び Γ を、代数体 F 上の簡約代数群 G のアデール群 $G(\mathbb{A}_F)$ と $G(F)$ で各々置き換えた状況を考える。さらに跡公式の両辺の各項を大域的な意味を持つ定数 $a(\gamma), a(\pi)$ と局所的な超函数の Euler 積

$$I(\gamma,f) = \prod_v I_v(\gamma,f_v), \quad I(\pi,f) = \prod_v I_v(\pi_v,f_v)$$

の積の形に書かねばならない [A5], [A8]。これにより保型形式の研究にとって基本的な Hecke 環の可換性が跡公式に組み込まれる。次に異なる群 G と G' の跡公式の間の比較では、それらの群上のテスト函数 $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ と $f' \in C_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$ の間の対応が与えられているわけではなく、それらの $\mathrm{Ad}(G(\mathbb{A}))$ 不変ないわゆる invariant 超函数での値の間の対応のみが与えられる。そこで収束を保証するための截頭操作によって $\mathrm{Ad}(G(\mathbb{A}))$ 不変性が失われている跡公式を、G 自身に加えて Levi 部分群上の invariant 超函数も使うことで invariant にする必要がある [A3], [A10], [A11]。この間、最初の原始的な跡公式を得るまでと、それからこの invariant 跡公式を引き出すまでにそれぞれ 10 年近い歳月がかかっている。しかしこれにより可解拡大に対する $GL(n)$ 上の保型形式の base change リフトの構成など、以前は期待さえできなかったほどの成果が達成された。

$GL(n)$ 以外の群の場合には異なる保型表現が全く同一の数論的寄与を持つ、いわゆる L 不可分性の現象が起きる。これは G の ($\overline{F}$ 上の) 共役類の幾何と跡公式を支配する $G(F)$ ないしは $G(\mathbb{A})$ の共役類の間に隔たりがあることに起因すると予想されている。そこで G のガロワコホモロジーのデータから定まる endocopic 群と呼ばれるより次元の低い簡約群を導入し、G 自身及びそれらの共役類の幾何のみから定まる寄与の和として G の跡公式を書く **安定化** が必要である [L4], [Ko2], [Ko3]。p 進群の調和解析の困難によりこれが

達成されているのは目下のところ $SL(2)$ [LL] や $U(3)_{E/F}$ [Ro2] だけだが、Waldspurger による $Sp(2)$ の場合を始めとしていくつかの進展も見られる [A14], [Ko6]。

これらを踏まえて今回の解説では、まず第一部でこの Arthur-Selberg 跡公式の構成について簡潔に述べる。§2 ではアデール群を扱う理由を説明し、$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ 上の右正則表現の核函数を、共役類のデータとスペクトル分解のデータで各々記述する。こうして得られた核函数は残念ながら対角集合 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上可積分でないため、§3 ではそれぞれに並行した截頭操作を施して収束する積分の等式を得る (Arthur-Selberg 跡公式)。§4 ではこうして得られた等式の幾何サイドを、(1.1) のような和の形に書く方法を解説する。和の各項はある大域的な意味を持つ定数と局所的なウェイト付き軌道積分の Euler 積の積になる。§5 ではスペクトルサイドに対する類似の表記を得る。截頭操作が積分領域の制限として明示されていた幾何サイドに対して、スペクトルサイドのそれは Eisenstein 級数に截頭作用素を施すという陰伏的な形を取る。この截頭された Eisenstein 級数を表現に結びつけるには截頭のパラメタを無限大にとばすしかないが、それでは跡公式の項は発散してしまう。そこでパラメタを無限大にとばした際の漸近挙動を見ることで目的を達成する。上でふれた共役で不変ないわゆる invariant 跡公式を作る理論については §6 で解説する。第二部ではこうして得られた跡公式の応用を二つ紹介する。§7 では跡公式の比較によって異なる群上の保型形式の間の "リフティング" を得る例として、$GL(n)$ の可解拡大に対する base change リフトの構成 [AC] を扱う。これによりリフトの構成を跡公式の比較に持ち込むメカニズムを解説する。最後に §8 では跡公式を使って実対称空間の数論商に作用する Hecke 作用素の Lefschetz 数を計算した [A13] の結果を紹介する。これは [LR], [Ko5], [Lau] などで使われている志村多様体の ℓ 進コホモロジーの計算のための**久賀・佐藤・伊原 Langlands** の方法の下敷きになっている。ここでは、このような幾何的な応用の一番の核である、テスト函数の選択によって跡公式が著しく単純化する現象を見ていただきたい。

なお跡公式には連結簡約群 G に対してだけでなく、それを G の外部自己同型 θ でひねった状況を考える **twisted 跡公式** がある。保型形式のリフトの構成や保型形式そのものの記述などの目的にはこの twsited 版がきわめて重要であるため、そのために記述が煩雑になることは承知の上でこの原稿でもできる限り twisted 跡公式に拡げて話を進めた。特に幾何サイドについての話はほぼ完全に twisted 版に広がっている。一方でスペクトルサイドはあまり完全な文献が見あたらなかったことと私の力量不足により、twisted になっているのは最初の粗い χ 展開までである。これについては近い将来の課題としたい。

以上のように Arthur-Selberg の跡公式は、Langlands らによる鋭い洞察と相まって保型形式の整数論に、Selberg が意図したあるいはそれ以上の革命的な発展をもたらしている。特に、志村・谷山によって示唆された保型形式と Galois 表現やモチーフとの関連を実現する鍵としての役割は非常に大きい。その中で、一見アデール群上の議論に尽きるように思われる跡公式の比較は、実 Lie 群をはじめとする局所体上の簡約群の表現論の発展に強く依存している。これらの分野が相互関連しつつ進展することにより、保型形式の整数論的構造についてのより深い理解が進むことが期待されている。

最後になったがこのような場所で跡公式について話す機会を与えてくださった松本久義氏に深く感謝したい。

Part I. Arthur-Selberg 跡公式の構成

2. アデール群の導入と核函数

2.1. **アデール群.** F を代数体、すなわち有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大とする。$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ や p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ (p は素数) という同値でない完備化を持つように、F も可算無限個の完備化の同値類を持つ。この各同値類 v のことを F の **素点** と呼び、対応する完備化を $F_v \hookleftarrow F$ と書く。$F_v \simeq \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) となる v を実素点 (resp. 複素素点) といい、それらをまとめ

て無限素点という。それ以外の素点 v を有限素点と言うが、このとき F_v はある p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大である。従って F_v は整数環と呼ばれる極大コンパクト部分環 $\mathcal{O}_v$ を持ち、それは唯一つの極大イデアル $\mathfrak{p}_v$ を持つ局所環である。剰余体 $\kappa_v = \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$ はある有限体 $\mathbb{F}_{q_v}$ になる。そこで F_v 上の絶対値で、$\mathfrak{p}_v$ の任意の生成元 ϖ_v での値が q_v^{-1} であるものを $|\,|_v$ と書く。v が実素点の時には $|\,|_v$ として通常の絶対値を、v が複素素点の時には $|z|_v := z\bar{z}$ と取ることにする。無限素点を全て含む素点の有限集合 S に対して

$$\mathbb{A}(S) = \mathbb{A}_F(S) := \prod_{v\in S} F_v \times \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v$$

は直積位相に関して局所コンパクト位相環になり、$\{\mathbb{A}(S)\}_S$ は明らかに位相的帰納系 ($S \subset S'$ の時 $\mathbb{A}(S) \hookrightarrow \mathbb{A}(S')$ が連続) をなす。この帰納系の位相的帰納極限

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_F := \varinjlim_{S} \mathbb{A}(S)$$

が F の **アデール環** である [W]。従って $\mathbb{A}$ の元は $\prod_v F_v$ の元 $(x_v)_v$ であって、有限個を除く全ての v での成分 x_v が $\mathcal{O}_v$ に入っているようなものである。$F_\infty := \prod_{v\,;\,\text{無限素点}} F_v$, $\mathbb{A}_f := \{(x_v)_v \in \mathbb{A} \,|\, x_v = 0,\ \forall v;\ \text{無限素点}\}$ などと書く。

G を F 上定義された線型代数群とする。このような群の構造については [BoT] が詳しい。G のみによる素点の有限集合 S_G であって、任意の $v \notin S_G$ で $G_v := G \otimes_F F_v$ が "良い" $\mathcal{O}_v$ 構造を持つものがある。そのような v では $\mathbf{K}_v := G(\mathcal{O}_v)$ が定義可能で、$G(F_v)$ の極大コンパクト部分群になる。このとき G のアデール群を上と同様に位相的帰納極限

$$G(\mathbb{A}) := \varinjlim_{S\supset S_G} \left(\prod_{v\in S} G(F_v) \times \prod_{v\notin S} \mathbf{K}_v\right)$$

と定義する [Tm]。これは局所コンパクト位相群で、対角埋め込み $G(F) \ni \gamma \mapsto (\gamma)_v \in G(\mathbb{A}) \subset \prod_v G(F_v)$ により $G(F)$ を離散部分群として含む。G が半単純のとき、$G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ は測度有限だが、G が F 上非等方的つまり $G(F)$ が半単純元のみからなるとき以外はコンパクトでない [BH]。特に $\mathbb{G}_m(\mathbb{A}) = GL(1, \mathbb{A})$ を F の **イデール群** といい、$\mathbb{A}^\times$ と書く。これは $\mathbb{A}$ の単数群

$$\{(x_v)_v \in \mathbb{A} \,|\, \text{有限個を除く全ての } v \text{ で } x_v \in \mathcal{O}_v^\times = \mathcal{O}_v \setminus \mathfrak{p}_v\}$$

に一致するが、その位相は $\mathbb{A}$ の部分集合としての相対位相とは異なる。

$$\mathbb{A}^\times \ni x = (x_v)_v \longmapsto |x|_{\mathbb{A}} := \prod_v |x_v|_v \in \mathbb{R}_+^\times$$

は定義可能 (本質的に有限積) で $\mathbb{A}^\times$ 上のイデールノルムと呼ばれる。

以下 G は連結かつ簡約であるとする。G の中心 Z_G に含まれる極大 F-split トーラスを A_G とし、$A_G(F_\infty)$ の極大 $\mathbb{R}$ ベクトル部分群を $\mathfrak{A}_G$ と書く。$L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ 上の右正則表現 $R_G = R$ の既約部分表現を $G(\mathbb{A})$ の **L^2 保型表現** と呼ぶ。$G(\mathbb{A}_f)$ の開コンパクト部分群 K に対して、$\Gamma_K := G(F) \cap K$ は $G(F_\infty)$ の数論的部分群であり、$G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K$ は $\Gamma_K\backslash G(F_\infty)$ 型の数論商の有限個の合併になっている。

ここで **$\Gamma_K\backslash G(F_\infty)$ 上の保型形式を考える代わりに $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の保型形式を考察する理由** は何であろうか。$G(\mathbb{A})$ の L^2 保型表現 π は $G(F_v)$ の既約ユニタリ表現 (V_v, π_v) たちの族 $\{\pi_v\}_v$ であって、有限個を除く全ての v で π_v が $\mathbf{K}_v$ 球表現 ($V_v^{\mathbf{K}_v} \neq \{0\}$) となっているようなものの制限テンソル積

$$\bigotimes_v{}' \pi_v := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\bigotimes_v \xi_v \,|\, \xi_v \in V_v,\ \text{有限個を除く全ての } v \text{ で } \xi_v \in V_v^{\mathbf{K}_v}\}$$

(の完備化) になっている。アデール群を考えるのは、π をその局所成分の族 $\{\pi_v\}_v$ で記述するためである。実際、Hecke は $GL(1)$ の保型指標 χ をその無限成分 $\chi_\infty = \bigoplus_{v\,;\,\text{無限素点}} \chi_v$ と不分岐有限成分 $\{\chi_v \,|\, v \text{ は有限素点、} \chi_v|_{\mathbf{K}_v} \text{ は自明}\}$ によって記述することに成功し、更にいわゆる Hecke 理論を提起することによって同様の手法が $GL(2)$ 上の保型形式に対しても有効であろうことを示唆した。この示唆は Jacquet、Langlands、Weil、Piatetskii-Shapiro、Shalika によってある意味で実現された。すなわち $GL(n)$ の cuspidal 保型表現はその **任意の有限個を除く** 局所成分たちで完全に決まることが知られている [JS, Th.4.4]。しかし $GL(n)$ 以外の群ではこの性質は成り立たない。また $GL(n)$ であっても $n \geq 2$ では保型形式の分類で重要な働きをする L 函数は残りの有限個の局所成分に依存してしまう。これらの理由から一般には保型表現の全ての局所成分を考察する必要があり、無限成分と不分岐成分しか "見えない" $\Gamma\backslash G(F_\infty)$ の設定の代わりにアデール群を考えるわけである。

跡公式を記述する立場から言い換えれば、これは跡公式の各項を局所的な項たちの Euler 積の形に書く必要による。無限成分と不分岐成分だけで跡公式のスペクトルサイドを記述すれば、それらの成分を共有する異なる保型表現たちの寄与を切り分けることができない。結果、本来は単純な局所的超函数たちの Euler 積の有限個の和で書けるべきものが正体不明の大域的な項として残り、不必要に事態を見にくくしてしまう。以上が我々が Osborne-Warner らによる $\Gamma\backslash G(F_\infty)$ の状況での跡公式の記述 [OW] には触れず、Arthur の結果に焦点を絞る理由である。見ての通りこれらはいずれも保型形式の整数論からの要請であり、対称空間の数論商の微分幾何的な考察などには必ずしも適用されないことを断っておく。

2.2. **Twisted 跡公式の設定、幾何的核函数.** **以下特に断らない限り G の (閉) 部分群としては F 上定義されたもののみを考えることにする。** $G(\mathbb{A})$ 上の不変測度 dx を一つ固定する。

有限素点 v では $C_c^\infty(G(F_v))$ はコンパクト台を持ち局所定数、すなわち各点 $x \in G(F_v)$ に対してそのある近傍上で定数であるような函数のなすベクトル空間を表す。$v \notin S_G$ では $C_c^\infty(G(F_v))$ は $\mathbf{K}_v$ の特性函数 f_v^0 を含む。

$$C_c^\infty(G(\mathbb{A})) := \mathrm{Span}\Big\{\bigotimes_v f_v \,\Big|\, f_v \in C_c^\infty(G(F_v)),\ \text{有限個を除く全ての } v \text{ で } f_v = f_v^0\Big\}$$

が跡公式のテスト函数の空間である。

G の極小放物型部分群とその Levi 分解 $P_0 = M_0U_0$ を固定し、θ を G の F 上定義された位数有限の自己同型であって (P_0, M_0) を保つものとする。また $G(F)\mathfrak{A}_G$ への制限が自明な $G(\mathbb{A})$ のユニタリ指標 ω を取る。これらは $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ に

$$[R(\theta)\phi](x) := \phi(\theta^{-1}(x)),\quad [R(\omega)\phi](x) := \omega(x)\phi(x),\quad \phi \in L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$$

と作用する。我々の考える **twisted 跡公式** [KS] は $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ の元 f に付随する作用素

$$\begin{aligned}
[R(f)R(\theta)R(\omega)\phi](x) &= \int_{G(\mathbb{A})} f(y)\omega(\theta^{-1}(xy))\phi(\theta^{-1}(xy))\,dy \\
&= \int_{G(\mathbb{A})} f(x^{-1}\theta(y))\omega(y)\phi(y)\,dy \\
&= \int_{\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \int_{\mathfrak{A}_G} f(x^{-1}\theta(zy))\,dz\,\omega(y)\phi(y)\,dy \\
&= \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \omega(y) \sum_{\gamma\in G(F)} \int_{\mathfrak{A}_G} f(zx^{-1}\gamma\theta(y))\,dz\,\phi(y)\,dy
\end{aligned}$$

に適用される。これは $\theta(\pi) := \pi\circ\theta^{-1}$ が $\omega\otimes\pi$ に同型であるような保型表現 (ないしはその L パケットまたは Arthur パケット) をひろうためである。たとえば、[LL] では $GL(2)$ で θ は自明だが ω が二次拡大に付随する sign 指標の場合を考察することにより、$SL(2)$ 上の保型形式についての情報を得ている。

さて上の作用素は

$$K(x,y)=\omega(y)\sum_{\gamma\in G(F)}\int_{\mathfrak{A}_G} f(zx^{-1}\gamma\theta(y))\,dz$$

を持つ積分作用素である。以下では簡単のために

$$C_c^\infty(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G) := \left\{ f\in C^\infty(G(\mathbb{A})) \;\middle|\; \begin{array}{ll} (i) & f(zg)=f(g),\ \forall z\in\mathfrak{A}_G,\ g\in G(\mathbb{A}), \\ (ii) & \mathrm{supp}(f) \text{ は } \mathfrak{A}_G \text{ を法としてコンパクト.} \end{array} \right\}$$

とおき、$f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)$ に対して作用素

$$\begin{aligned}[R(f)R(\theta)R(\omega)\phi](x) &= \int_{\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} f(y)\omega(\theta^{-1}(xy))\phi(\theta^{-1}(xy))\,dy \\ &= \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} K(x,y)\phi(y)\,dy \\ K(x,y) &:= \omega(y)\sum_{\gamma\in G(F)} f(x^{-1}\gamma\theta(y))\end{aligned}$$

を考える。この $K(x,y)$ を **幾何的核函数** という。

$\mathrm{Ad}_\theta(g)x := gx\theta(g)^{-1}$ と書く。$G(F)$ のこの Ad_θ 作用による $G(F)$ 内の各軌道を **θ 共役類** と呼ぶ。非連結簡約群 $G\rtimes\langle\theta\rangle$ における $\gamma\rtimes\theta\in G(F)\rtimes\theta$ の Jordan 分解を

$$\gamma\rtimes\theta=\gamma_s\rtimes\theta\cdot\gamma_u=\gamma_u\cdot\gamma_s\rtimes\theta$$

と書こう。$\gamma=\gamma_s$ のとき γ は **θ 半単純** であるという。$G(F)$ 内の θ 半単純 θ 共役類の集合を $\mathfrak{O}_\theta(G)$ で表す。各 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}_\theta(G)$ に対して $\gamma_s\in\mathfrak{o}$ となるような $\gamma\in G(F)$ の集合を $\bar{\mathfrak{o}}$ とする。このとき

$$K_\mathfrak{o}(x,y) := \omega(y)\sum_{\gamma\in\bar{\mathfrak{o}}} f(x^{-1}\gamma\theta(y))$$

とおけば、明らかに

$$K(x,y)=\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}_\theta(G)} K_\mathfrak{o}(x,y)$$

である。さらに $G(\mathbb{A})$ の $C_c^\infty(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)$ への作用 $\mathrm{Ad}_{\theta\omega}$ を $(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(g)f)(x) := \omega(g)f(g^{-1}x\theta(g))$ と定めて

$$K_\mathfrak{o}(x,x)=\sum_{\gamma\in\bar{\mathfrak{o}}}(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(x)f)(\gamma)$$

と見るのが自然である。

2.3. Langlands の Eisenstein 級数の理論とスペクトル核函数. スペクトル核函数を記述するには Eisenstein 級数による $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ のスペクトル分解の結果が必要である。原論文 [L2] は実 Lie 群を数論的部分群で割った状況で書かれているが、[MW] にアデール版がある (F が有限体上の一変数函数体の場合や、G が直交群などのように非連結な場合も扱われている)。まずは少し記号を準備する。

簡単のために $A_0 := A_{M_0}$, $\mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}_{M_0}$ などと書き、$\mathfrak{A}_0$ の Lie 環を $\mathfrak{a}_0$ と書く。P_0 を含む放物型部分群を標準放物型部分群と呼ぶ。標準放物型部分群 P は標準 Levi 部分群と呼ばれる M_0 を含む Levi 成分 M を唯一つ持つ。$\mathfrak{A}_M$ を M のルートで消えている $\mathfrak{A}_0$ の部分群と見なし、その Lie 環を $\mathfrak{a}_M\subset\mathfrak{a}_0$ と書く。対数写像 $\mathfrak{A}_M\to\mathfrak{a}_M$ は準同型 $H_M : M(\mathbb{A})\to\mathfrak{a}_M$

に延びる。その核を $M(\mathbb{A})^1 \supset M(F)$ と書く。これにより $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}} = \mathfrak{a}^*_M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ は $M(\mathbb{A})$ の指標

$$M(\mathbb{A}) \ni m \longmapsto m^\lambda := \exp\langle \lambda, H_M(m)\rangle \in \mathbb{C}^\times$$

と同一視される。$G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群 $\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v$ を、任意の標準放物型部分群 $P = MU$ に対して岩澤分解 $M(\mathbb{A}) = U_0^M(\mathbb{A})M_0(\mathbb{A})\mathbf{K}^M$ が成り立つように取る。但し、$U_0^M := U_0 \cap M$, $\mathbf{K}^M := \mathbf{K} \cap M(\mathbb{A})$ などと書いた。これを使って先の H_M を

$$H_P : G(\mathbb{A}) \ni umk \longmapsto H_M(m) \in \mathfrak{a}_M, \quad u \in U(\mathbb{A}),\, m \in m(\mathbb{A}),\, k \in \mathbf{K}$$

と延ばしておく。

2.3.1. *Cuspidal data* と擬 *Eisenstein* 級数 *(wave packet)*. $P = MU$ を放物型部分群とするとき、$U(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の局所可積分函数 ϕ の P に沿っての **定数項** を

$$\phi_P(g) := \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug)\, du, \quad g \in G(\mathbb{A})$$

と定義する。L^2**-カスプ形式** の空間 $L^2_0(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ を $\phi \in L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ であって、任意の (標準) 放物型部分群 $P \subsetneq G$ に対して ϕ_P がほとんど至るところで消えているものたちからなる空間とする。これは $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の直和に分解することが知られている (Piatetskii-Shapiro)。より正確には $G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ 上のカスプ形式の空間 $\mathcal{A}_0(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ は $L^2_0(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ の稠密部分群になっており、$\mathcal{A}_0(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ は $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ化可能許容表現 (既約 $(\mathfrak{g}(F_\infty)_{\mathbb{C}}, \mathbf{K}_\infty)$ 加群と $G(\mathbb{A}_f)$ の既約許容表現のテンソル積) の直和に分解する。以下では $\mathcal{A}_0(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ に現れる許容表現 π とその $L^2_0(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ での完備化を同じ記号で表し、それぞれの π-isotypic 部分空間を $\mathcal{A}_0(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))_\pi$, $L^2_0(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))_\pi$ で表す。更に $\mathfrak{F}$ を $\mathbf{K}$ タイプの有限集合として、これらの中で $\mathbf{K}$ が $\mathfrak{F}$ の元で作用するベクトルからなる部分空間を各々 $\mathcal{A}_0(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}}_\pi$, $L^2_0(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}}_\pi$ と書けば、これらは同一の有限次元空間になる。標準 Levi 部分群 M と $L^2_0(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))$ に現れる $M(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現 ρ の組 (M, ρ) の $G(F)$ 共役類 $\mathfrak{X}$ を G の **cuspidal datum** といい、その集合を $\mathfrak{X}(G)$ と書く。

$P = MU$ を標準放物型部分群とし、$\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}(M)$ を取る。$(L, \rho) \in \mathfrak{X}$ 及び $\mathbf{K}^L$ タイプの有限集合 $\mathfrak{F}_L$ に対して

$$\mathcal{PW}^{M,\mathfrak{F}_L}_{(L,\rho)} := \left\{ \begin{array}{c} \phi : (\mathfrak{a}^M_L)^*_{\mathbb{C}} \ \to \mathrm{Ind}^{P(\mathbb{A})}_{Q(\mathbb{A})} \mathcal{A}_0(L(F)\mathfrak{A}_L\backslash L(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}_L}_\rho \\ \text{Paley-Wiener タイプ} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{PW}^M_{(L,\rho)} := \bigcup_{\mathfrak{F}_L} \mathcal{PW}^{M,\mathfrak{F}_L}_{(L,\rho)}$$

とおく。$Q = LV$ は L を Levi 部分群に持つ標準放物型部分群である。$\phi \in \mathcal{PW}^M_{(L,\rho)}$ に付随する擬 Eisenstein 級数を

$$\theta_\phi(g) := \sum_{\delta \in Q(F)\backslash P(F)} \widehat{\phi}(\delta g), \quad \widehat{\phi}(g) := \int_{\lambda \in i(\mathfrak{a}^M_L)^*} \phi(g) e^{\langle \lambda, H_Q(g)\rangle}\, d\lambda$$

と定める。

定理 2.1 ([MW] II.1). *(1)* $\theta_\phi \in L^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}}$, $\forall \phi \in \mathcal{PW}^{M,\mathfrak{F}_L}_{(L,\rho)}$。但し、$\mathfrak{F} = \mathrm{Ind}^{\mathbf{K}}_{\mathbf{K}^L} \mathfrak{F}_L$。

(2) $\{\theta_\phi \mid \phi \in \mathcal{PW}^M_{(L,\rho)}, (L,\rho) \in \mathfrak{X}\}$ の張る $L^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))$ の閉部分空間を $L^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\mathfrak{X}}$ と書けば

$$L^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A})) = \widehat{\bigoplus}_{\mathfrak{X}\in\mathfrak{X}(M)} L^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\mathfrak{X}}.$$

2.3.2. 離散スペクトルから誘導された空間の正規直交基底. $M(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現で $\mathfrak{A}_M$ 上自明なものたちの同型類の集合を $\Pi(M(\mathbb{A})^1)$ と書く。$L^2(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))$ は $M(\mathbb{A})$ の既約表現の直和に分解する部分空間 $L^2_d(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))$ と連続スペクトルからなる部分空間 $L^2_c(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))$ の直和である。実際 $L^2_d(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))$ は $M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A})$ 上の二乗可積分な保型形式の空間 $\mathcal{A}^2(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))$ を稠密部分空間として含み、その既約分解は保型形式の空間の既約許容表現の直和への分解から来る。$\pi \in \Pi(M(\mathbb{A})^1)$ に対してその $\mathcal{A}^2(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))$ 及び $L^2_d(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))$ での isotypic 部分空間を各々 $\mathcal{A}(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))_\pi$, $L^2(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))_\pi$ と書く。$\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ で π をひねった表現 $(e^\lambda \otimes \pi)(m) := m^\lambda \pi(m)$, $(m \in M(\mathbb{A}))$ を π_λ と書けば、誘導表現 $\mathcal{I}_P(\pi_\lambda) := \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})} \mathcal{A}(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))_{\pi_\lambda}$ が $\mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_\pi$ 上に実現できる。

$$[\mathcal{I}_P(\pi_\lambda, g)\phi](x) := \phi(xg)e^{\langle\lambda+\rho_P, H_P(xg)\rangle}e^{-\langle\lambda+\rho_P, H_P(x)\rangle}.$$

同様に L^2 誘導表現 $I_P(\pi_\lambda)$ が $L^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_F\backslash G(\mathbb{A}))_\pi$ に実現される。

さて、$\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}(M)$ と **K** タイプの有限集合 $\mathfrak{F}$ を取り、

$$\mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\pi,\mathfrak{X}} := \mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_\pi \cap L^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\mathfrak{X}},$$
$$\mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}}_{\pi,\mathfrak{X}} := \mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_\pi \cap L^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{X}}$$

などと書く。もちろん後者は有限次元で

$$\mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_\pi = \bigoplus_{\mathfrak{X}\in\mathfrak{X}(M)} \mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\pi,\mathfrak{X}},$$
$$\mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\pi,\mathfrak{X}} = \bigcup_{\mathfrak{F}} \mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}}_{\pi,\mathfrak{X}}$$

である。そこで $\mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}}_{\pi,\mathfrak{X}}$ の正規直交基底の族 $\{\mathfrak{B}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\mathfrak{X}}\}_{\mathfrak{F}}$ で $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ のとき $\mathfrak{B}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\mathfrak{X}} \subset \mathfrak{B}^{\mathfrak{F}'}_{\pi,\mathfrak{X}}$ となるものを取っておく。

2.3.3. *Eisenstein* 級数とスペクトル分解 [MW, VI]. (G, M_0) の Weyl 群を $W^G = W$ と書く。$w \in W$ の $G(F)$ での代表元を取っておき、それも w で表す。M を M' に移す $w \in W$ たちのうちで wW^M の中で最短なものたちの集合を $W_{M,M'}$ と書く。$W_{M,M'}$ が空でないとき P と P' は **associated** であるという。標準 Levi 部分群 L に対して $W_M(L)$ で、$w \in W_M$ で M を L の標準 Levi 部分群に送るものたちの集合を表す。$\phi \in \mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_\pi$, $w \in W_{M,M'}$ 及び実部が十分正な $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ に対して

$$E(x, \phi_\lambda) := \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \phi(\delta x)e^{\langle\lambda+\rho_P, H_P(\delta x)\rangle}$$

$$[M(w, \pi_\lambda)\phi_\lambda](x) := \int_{U'(\mathbb{A})\cap w(U)(\mathbb{A})\backslash U'(\mathbb{A})} \phi(w^{-1}ux)e^{\langle\lambda+\rho_P, H_P(w^{-1}ux)\rangle}\, du \cdot e^{-\langle w(\lambda)+\rho_{P'}, H_{P'}(x)\rangle}$$

と定める。これらは絶対収束し、全 $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ に有理型に解析接続される。その極以外では $E(x, \phi_\lambda)$ は $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の保型形式になり、$M(w, \pi_\lambda)$ は $\mathcal{I}_P(\pi_\lambda)$ から $\mathcal{I}_{P'}(w(\pi_\lambda))$ への intertwining 作用素になっている。さらに次の函数等式が成り立つ。

(1) $h \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ (Hecke 環) に対して $E(x, I_P(\pi_\lambda, h)\phi_\lambda) = R(h)E(x, \phi_\lambda)$。
(2) $E(x, M(w, \pi_\lambda)\phi_\lambda) = E(x, \phi_\lambda)$, $\forall w \in W_M(G)$。

(3) $w \in W_{M,M'}$, $w' \in W_{M',M''}$ のとき $M(w'w, \pi_\lambda) = M(w', w(\pi_\lambda))M(w, \pi_\lambda)$。
この Eisenstein 級数が誘導空間 $I_P(\pi_\lambda) \to \lambda \in i(\mathfrak{a}_M^G)^*$ のセクションの空間から $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ への intertwiner を与える。すなわち

定理 2.2 ([MW] Th.VI.2.1). 標準 *Levi* 部分群 M と $L^2_d(M(F)\mathfrak{A}_G\backslash M(\mathbb{A}))$ の既約成分 $\pi \in \Pi(M(\mathbb{A})^1)$ の元 π の組 (M, π) の $G(F)$ 共役類 $[M, \pi]$ を G の *discrete datum* という。M の $G(F)$ 共役類及び P の *associated class* を各々 $[M]$, $[P]$ と書く。族 $F = \{F_{P'}\}_{P' \in [P]}$ で

(1) $F_{P'} : i(\mathfrak{a}_{M'}^G)^* \to L^2(U'(\mathbb{A})M'(F)\mathfrak{A}_{M'}\backslash G(\mathbb{A}))_{\pi'}$ は可測函数。但し $(M', \pi') \in [M, \pi]$。
(2) $F_{P'}(w(\lambda)) = M(w, \pi_\lambda)F_P(\lambda)$, $w \in W_{M,M'}$ (特に $w(\pi) = \pi'$)。
(3)
$$\|F\|^2 := \sum_{(M',\pi') \in [M,\pi]} \frac{1}{|W_M(G)|} \int_{i(\mathfrak{a}_{M'}^G)^*} \|F_{P'}(\lambda')\|^2 \, d\lambda < \infty.$$

を満たすものたちのなす *Hilbert* 空間を $\widehat{L}_{[M,\pi]}$ と書く。ここで (3) の積分の中のノルムは $L^2(U'(\mathbb{A})M'(F)\mathfrak{A}_{M'}\backslash G(\mathbb{A}))$ のそれである。このとき $\widehat{L}_{[M,\pi]}$ の適当な稠密部分空間上で

$$F \longmapsto \sum_{(M',\pi') \in [M,\pi]} \frac{1}{|W_{M'}(G)|} \int_{i(\mathfrak{a}_{M'}^G)^*} E(x, F_{P'}(\lambda')) \, d\lambda'$$

で与えられる $G(\mathbb{A})$ 同変なユニタリ埋め込み $\widehat{L}_{[M,\pi]} \hookrightarrow L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ があり、その像を $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))_{[\pi]}$ と書くとき、

$$L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})) = \widehat{\bigoplus}_{[M,\pi]} L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))_{[\pi]}.$$

特に $[G, \pi]$ の形の *discrete datum* の寄与は $L^2_d(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ の既約分解にすぎない。

2.3.4. スペクトル核函数. $(M, \pi) \mapsto (\theta(M), \omega^{-1} \otimes \theta(\pi))$ で安定な cuspidal data の集合を $\mathfrak{X}_{\theta\omega}(G)$ と書く。やはり、$(M, \pi) \mapsto (\theta(M), \omega^{-1} \otimes \theta(\pi))$ で安定な discrete datum $[M, \pi]$ と cuspidal datum $\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}_{\theta\omega}(G)$ それに $\mathbf{K}$ タイプの有限集合 $\mathfrak{F}$ を固定する。まずは $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)^{\mathfrak{F}}$ に対して $R(f)R(\theta)R(\omega)$ の $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}}_{[\pi],\mathfrak{X}}$ への制限の核函数を形式的に計算する。この部分空間の元は 定理 2.2 の条件を満たすような函数

$$F : i(\mathfrak{a}_M^G)^* \longrightarrow L^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}}_{[\pi],\mathfrak{X}}$$

を使って

$$\Phi_F(x) := \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} E(x, F(\lambda)) \, d\lambda$$

と書けている。但し、定理 2.2 の条件 (2) と Eisenstein 級数の函数等式 (2) を使った。2.3.2 により $F(\lambda) = \sum_{\phi \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\mathfrak{X}}} \langle F(\lambda), \phi_\lambda \rangle \phi_\lambda$ と展開すれば

$$\begin{aligned}
[R(f)R(\theta)R(\omega)\Phi_F](x) &= R(f)R(\theta)R(\omega) \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \sum_{\phi \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\mathfrak{X}}} \langle F(\lambda), \phi_\lambda \rangle E(x, \phi_\lambda) \, d\lambda \\
&= \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \sum_{\phi \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{F}}_{\pi,\mathfrak{X}}} R(f)R(\theta)R(\omega)E(x, \phi_\lambda) \langle F(\lambda), \phi_\lambda \rangle \, d\lambda
\end{aligned}$$

ここで 函数等式 (1) から

$$\begin{aligned}
R(f)R(\theta)R(\omega)E_P^G(x, \phi_\lambda) &= R(f)R(\theta)E_P^G(x, \omega\phi_\lambda) = R(f)E^G_{\theta(P)}(x, \theta(\omega\phi_\lambda)) \\
&= E^G_{\theta(P)}(x, I_{\theta(P)}(\theta(\omega\pi_\lambda), f)\theta(\omega\phi_\lambda))
\end{aligned}$$

であり、$\mathfrak{a}_M^G$ 上の "Fourier 逆公式" から

$$\langle F(\lambda), \phi_\lambda\rangle = \left\langle \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} E(y, F(\mu))\, d\mu, \overline{E(y, \phi_\lambda)} \right\rangle$$

だから、上式は

$$\int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{\pi,\mathfrak{X}}^{\mathfrak{F}}} E(x, I_{\theta(P)}(\theta(\omega\pi_\lambda), f)\theta(\omega\phi_\lambda)) \left\langle \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} E(y, F(\mu))\, d\mu, \overline{E(y, \phi_\lambda)} \right\rangle$$

$$= \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{\pi,\mathfrak{X}}^{\mathfrak{F}}} E(x, I_{\theta(P)}(\theta(\omega\pi_\lambda), f)\theta(\omega\phi_\lambda))\overline{E(y, \phi_\lambda)}\Phi_F(y)\, dy$$

となる。つまり $R(f)R(\theta)R(\omega)$ の $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))_{[\pi],\mathfrak{X}}^{\mathfrak{F}}$ への制限は核函数

$$K_{[\pi],\mathfrak{X}}^{\mathfrak{F}}(x, y) := \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{\pi,\mathfrak{X}}^{\mathfrak{F}}} E(x, I_{\theta(P)}(\theta(\omega\pi_\lambda), f)\theta(\omega\phi_\lambda))\overline{E(y, \phi_\lambda)}\, d\lambda$$

を持つ。

$\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}_{\theta\omega}(G)$ に対して

$$K_{\mathfrak{X}}(x, y) := \sum_{P\,;\,\text{標準的}} \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \frac{1}{|W_M(G)|} \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{[\pi],\mathfrak{X}}} E(x, I_{\theta(P)}(\theta(\omega\pi_\lambda), f)\theta(\omega\phi_\lambda))\overline{E(y, \phi_\lambda)}\, d\lambda$$

とおく。π が $L_d^2(M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A}))$ に現れないときには $\mathfrak{B}_{\pi,\mathfrak{X}} := \bigcup_{\mathfrak{F}} \mathfrak{B}_{\pi,\mathfrak{X}}^{\mathfrak{F}}$ は空集合である。相応の収束の議論を経て、核函数のもう一つの表示

$$K(x, y) = \sum_{\mathfrak{X}\in\mathfrak{X}_{\theta\omega}(G)} K_{\mathfrak{X}}(x, y)$$

を得る。これを **スペクトル核函数** という。

3. 截頭された核函数と基本恒等式

導入で述べたように、G が F 半単純ランクを持つ場合には上の核函数の対角集合上の積分

$$\int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} K(x, x)\, dx$$

は収束しない。そこで以下のように核函数を截頭し、積分が収束するようにする。

3.1. 粗い $\mathcal{O}$ 展開. まず幾何サイドを考える。ルートに関する記号を用意しよう。A_0 の P_0 でのルートの集合を Σ_0、その中の単純ルートの集合を Δ_0 と書く。Δ_0 の各元に対するコルートの集合を $\Delta_0^\vee$ とする。これらはそれぞれ $\mathfrak{a}_0^*$ 及び $\mathfrak{a}_0$ の部分集合と見なされる。$P = MU$ が標準放物型部分群の時、$\Delta_0 \setminus \Delta_0^M$ の元を $\mathfrak{a}_M \subset \mathfrak{a}_0$ に制限して得られる $\mathfrak{a}_M^*$ の (非自明な) 元の集合を Δ_M と書く。$\alpha \in \Delta_M$ を与える $\beta \in \Delta_0$ のコルート $\beta^\vee \in \mathfrak{a}_0$ の分解 $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^M \oplus \mathfrak{a}_M$ における $\mathfrak{a}_M$ 成分として $\alpha^\vee$ を定める。こうして得られる "コルート" の集合を $\Delta_M^\vee$ と書く。これは $\mathfrak{a}_M^G$ の基底になるが、それに対する $(\mathfrak{a}_M^G)^*$ の双対基底を $\widehat{\Delta}_M = \{\varpi_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta_M\}$ と書く。最後に $X \in \mathfrak{a}_0$ に対して $X = X_M + X^M$, $X_M \in \mathfrak{a}_M$, $X^M \in \mathfrak{a}_0^M$ などと書く。

さて、$T\in\mathfrak{a}_0$ として

$$\mathfrak{A}_0(T)^M := \{a\in\mathfrak{A}_0 \,|\, \alpha(H_0(a))>\alpha(T),\ \forall\alpha\in\Delta_0^M\}$$

とおく。ただし、$H_0:=H_{M_0}$ である。$G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の reduction theory によれば、$U(\mathbb{A})$ と $M_0(\mathbb{A})^1$ のコンパクト部分集合 ω_1,ω_2 があって、$T_0\in\mathfrak{a}_0$ が十分負なら

$$G(\mathbb{A})=G(F)\mathfrak{S}(T_0),\quad \mathfrak{S}(T_0)=\omega_1\omega_2\mathfrak{A}_0(T_0)\mathbf{K}$$

が成り立つ [Go]。従って $G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ 上の積分の中で収束性を脅かすのは $\mathfrak{A}_0^G(T_0)$ 成分についてのそれである。これをカットオフするために次のような構成をする。

$P=MU$ が θ 不変な標準放物型部分群のとき、$\mathfrak{a}_M(\theta):=(1-\theta)\mathfrak{a}_M$ とおく。$X\in\mathfrak{a}_M$ の直和分解 $\mathfrak{a}_M=\mathfrak{a}_M^\theta\oplus\mathfrak{a}_M(\theta)$ ($\mathfrak{a}_M^\theta$ は θ 不変部分) における $\mathfrak{a}_M^\theta$ 成分及び $\mathfrak{a}_M(\theta)$ 成分を各々 X^θ, $X(\theta)$ と書く。

$$_\theta\tau_P := \{X\in\mathfrak{a}_0 \,|\, \alpha(X_M^\theta)>0,\ \forall\alpha\in\Delta_M\} \text{ の特性函数},$$

$$_\theta\widehat{\tau}_P := \{X\in\mathfrak{a}_0 \,|\, \varpi(X^\theta)>0,\ \forall\varpi\in\widehat{\Delta}_M\} \text{ の特性函数}$$

と定める。$L^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ 上の右移動作用素 $R_P(f)R_P(\theta)R_P(\omega)$ の核函数は

$$K_P(x,y):=\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}_\theta(G)}K_{P,\mathfrak{o}}(x,y),$$

$$K_{P,\mathfrak{o}}(x,y):=\omega(y)\sum_{\gamma\in P(F)\cap\mathfrak{o}}\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})}f(x^{-1}\gamma u\theta(y))\,du$$

で与えられる。 これを使って **截頭された核函数** を

$$k^T(x,f):=\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}_\theta(G)}k_{\mathfrak{o}}^T(x,f),$$

$$k_{\mathfrak{o}}^T(x,f):=\sum_{\theta(P)=P\supset P_0}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_M^G)^\theta}\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x,\delta x)\,{}_\theta\widehat{\tau}_P(H_0(\delta x)-T)$$

と定義する。

定理 3.1 ([A1] Th.7.1 (θ, $\omega=1$), [CLL] Th.3.1.2 と 5.1 の最後の注意). $T\in\mathfrak{a}_0$ を supp$f$ に対して十分正に取れば

$$J^T(f):=\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}_\theta(G)}J_{\mathfrak{o}}^T(f),\quad J_{\mathfrak{o}}^T(f):=\int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})}k_{\mathfrak{o}}^T(x,f)\,dx$$

は絶対収束する。

証明のアイディアを示す。まず次のような $G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ の分割を用意する。$Q\subset P$ を標準放物型部分群とする。$T\in\mathfrak{a}_0$ に対して、

$$F_Q^P(\bullet,T):=Q(F)\{x\in\mathfrak{S}^P(T_0)\,|\,\varpi(H_0(x)-T)\leq 0,\ \forall\varpi\in\widehat{\Delta}_0^Q\} \text{ の特性函数}$$

とし、$\mathfrak{I}_Q^P(x,T):=F_Q^P(x,T)\tau_Q^P(H_0(x)-T)$ とおけば

$$\sum_{Q;\,Q\subset P}\ \sum_{\delta\in Q(F)\backslash P(F)}\mathfrak{I}_Q^P(\delta x,T)=1,\quad \forall x\in G(\mathbb{A}).$$

これから

$$k_{\mathfrak{o}}^T(x,f)=\sum_{\substack{Q\subset P\\ \theta(P)=P}}\ \sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_M^G)^\theta}K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x,\delta x)\mathfrak{I}_Q^P(\delta x,T)\,{}_\theta\widehat{\tau}_P(H_0(\delta x)-T). \tag{3.1}$$

次に Q に含まれる最大の θ 不変標準放物型部分群を Q^θ と書いて、

$$
{}_\theta\sigma_Q^P := \left\{ X \in \mathfrak{a}_0 \;\middle|\; \begin{array}{ll} (i) & \alpha(H_L) > 0,\ \forall\alpha \in \Delta_L^M, \\ (ii) & \alpha(H_L) \le 0,\ \forall\alpha \in \Delta_L \setminus \Delta_L^M, \\ (iii) & \varpi(H^\theta) > 0,\ \forall\varpi \in \widehat{\Delta}_{L^\theta}. \end{array} \right\} \text{ の特性函数}
$$

とおく。これを使って ${}_\theta\mathfrak{J}_Q^P(x,T) := F_Q^P(x,T)_\theta\sigma_Q^P(H_0(x)-T)$ とおけば、

$$
\sum_{R;\,R\supset P} {}_\theta\mathfrak{J}_Q^P(x,T) = \mathfrak{J}_Q^P(x,T)
$$

が成り立ち、従って (3.1) は

$$
k_{\mathfrak{o}}^T(x,f) = \sum_{Q\subset R} \sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)} {}_\theta\mathfrak{J}_Q^P(\delta x,T) \sum_{\substack{Q\subset P\subset R\\ \theta(P)=P}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_M^G)^\theta} K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x,\delta x)
$$

となる。

結局

$$
\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}_\theta(G)} \sum_{Q\subset R} \int_{Q(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \Big|{}_\theta\mathfrak{J}_Q^P(x,T) \sum_{\substack{Q\subset P\subset R\\ \theta(P)=P}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_M^G)^\theta} K_{P,\mathfrak{o}}(x,x)\Big|\, dx
$$

が絶対収束することを示せばよい。これは被積分函数内の ${}_\theta\mathfrak{J}_Q^P(x,T)$ が消えないような $H_0(x)$ たちのなす錐体の上で、残りのファクター

$$
\sum_{\substack{Q\subset P\subset R\\ \theta(P)=P}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_M^G)^\theta} \sum_\gamma \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} f(x^{-1}u\gamma\theta(x))\,du
$$

が急減少 (Poisson の和公式を $\mathrm{Lie}\,U(F) \subset \mathrm{Lie}\,U(\mathbb{A})$ に適用して示される) であることから従う。

3.2. 粗い χ 展開 — 基本恒等式. 今度はスペクトルサイドを考える。幾何サイドの場合と同様に $R_P(f)R_P(\theta)R_P(\omega)$ のスペクトル核函数

$$
K_P(x,y) := \sum_{\mathfrak{X}\in\mathfrak{X}_{\theta\omega}(G)} K_{P,\mathfrak{X}}(x,y),
$$

$$
K_{P,\mathfrak{X}}(x,y) := \sum_{Q=LV\subset P} \sum_{\pi\in\Pi(L(\mathbb{A}))} \frac{1}{|W_L^M(M)|}
$$
$$
\int_{i(\mathfrak{a}_L^G)^*} \sum_{\phi\in\mathfrak{B}_{[\pi],\mathfrak{X}}} E_{\theta(Q)}^P(x, I_{\theta(Q)}(\theta(\omega\pi_\lambda),f)\theta(\omega\phi_\lambda))\overline{E_Q^P(y,\phi_\lambda)}\,d\lambda
$$

が得られる。ここで $E_Q^P(x,\phi_\lambda)$ は $E_Q(x,\phi_\lambda)$ の定義で G を P で置き換えて得られる Eisenstein 級数である。これを使って

$$
k^T(x,f) := \sum_{\mathfrak{X}\in\mathfrak{X}_{\theta\omega}(G)} k_{\mathfrak{X}}^T(x,f),
$$

$$
k_{\mathfrak{X}}^T(x,f) := \sum_{\theta(P)=P} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_M^G)^\theta} \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} K_{P,\mathfrak{X}}(\delta x,\delta x)_\theta\hat{\tau}_P(H_0(\delta x)-T)
$$

と定める。定理 3.1 から

$$\int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})}\sum_{\mathfrak{X}\in\mathfrak{X}_{\theta\omega}(G)} k^T_{\mathfrak{X}}(x,f)\,dx$$

が絶対収束することはわかっており、ここでの目標は積分と $\mathfrak{X}$ についての和を入れ替えることである。そのために **截頭作用素** を導入する。$T\in\mathfrak{a}_0$ と標準放物型部分群 P に対して

$$(\wedge^{T,P}\phi)(x):=\sum_{Q=LV\subset P}(-1)^{\dim\mathfrak{a}_L^M}\sum_{\delta\in Q(F)\backslash P(F)}\widehat{\tau}^P_Q(H_0(\delta x)-T)\phi_Q(\delta x)$$

とおく。ここで ϕ は $U(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の局所可積分函数である。$\wedge^{T,G}=\wedge^T$ は $L^2_0(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ 上恒等写像であるような、$L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ 上の射影になっており、微分も含めて緩増加な $G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ 上の函数を急減少函数に持っていく [A2]。

P, Q が標準放物型部分群で $\theta(P)=P$ のとき

$$\sum_{P_1\supset P}{}_\theta\sigma^{P_1}_Q=\tau^P_Q\,{}_\theta\widehat{\tau}^P_Q$$

が成り立つことに注意すれば、**基本恒等式** [A2, Lem.2.2], [CLL, Prop.9.1.3]

$$\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}K_P(\delta x,\delta x)_\theta\widehat{\tau}_P(H_0(\delta x)-T)$$
$$=\sum_{Q,P_1;\,Q\subset P\subset P_1}\sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)}{}_\theta\sigma^{P_1}_Q(H_0(\delta x)-T)\wedge^{T,Q}K_P(\delta x,\delta x)$$

が得られる。これと $\wedge^{T,Q}$ の最後の性質から次を得る。

定理 3.2 ([A2] Th.2.1 (θ, $\omega=1$), [CLL] Chapt.15). $\mathfrak{X}\in\mathfrak{X}_{\theta\omega}(G)$ に対して

$$J^T_{\mathfrak{X}}(f):=\sum_{Q\subset P_1}\int_{Q(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})}{}_\theta\sigma^{P_1}_Q(H_0(x)-T)\sum_{\substack{P;\,Q\subset P\subset P_1\\ \theta(P)=P}}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}^G_M)^\theta}\wedge^{T,Q}K_{P,\mathfrak{X}}(x,x)\,dx$$

は収束し、

$$J^T(f)=\sum_{\mathfrak{X}\in\mathfrak{X}_{\theta\omega}(G)}J^T_{\mathfrak{X}}(f)$$

が成り立つ。

注意 3.3. θ 及び ω が自明ならば、$J^T_{\mathfrak{X}}(f)$ の右辺の Q, P_1 についての和は $Q=P_1=G$ の時以外消えている。つまり、

$$J^T(f)=\sum_{\mathfrak{X}\in\mathfrak{X}(G)}\int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})}\wedge^T K(x,x)\,dx$$

が成り立つ。しかし、一般の場合には $Q\subset P_1$ は $Q\subset P\subset P_1$ となる θ 安定な P が一つしかないものに限ることしかできない。

以上から Arthur-Selberg 跡公式

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}_\theta(G)}J^T_{\mathfrak{o}}(f)=\sum_{\mathfrak{X}\in\mathfrak{X}_{\theta\omega}(G)}J^T_{\mathfrak{X}}(f)\tag{3.2}$$

が得られた。

4. 細かい $\mathfrak{o}$ 展開 [A8]

このセクションの目的は (3.2) の左辺の各項を "計算する" ことである。[JL] では、$GL(2)$ の跡公式の各項を各素点での局所的な超函数の Euler 積と大域的な量の積に書いている。この形の跡公式が保型形式の整数論に多くの成果をもたらしており、ここでの計算とはそのような表記を得ることを意味している。

4.1. **"原点" T_1.** (3.2) の両辺を T の函数として見てみよう。θ 不変な標準放物型部分群の組 $Q \subset P$ に対して $\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_0$ 上の函数 ${}_\theta\Gamma_Q^P$ を

$$ {}_\theta\Gamma_Q^P(X,Y) := \sum_{\substack{P_1;\, Q\subset P_1\subset P\\ \theta(P_1)=P_1}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_{M_1}^M)^\theta}\, {}_\theta\tau_Q^{P_1}(X)\, {}_\theta\widehat{\tau}_{P_1}^P(X-Y) $$

と定める。これは (3.2) の構成に使われたカットオフ函数 ${}_\theta\widehat{\tau}_P$ の変動を表している。

$$ {}_\theta\widehat{\tau}_Q^P(X-Y) = \sum_{\substack{P_1;\, Q\subset P_1\subset P\\ \theta(P_1)=P_1}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_{M_1}^M)^\theta}\, {}_\theta\widehat{\tau}_Q^{P_1}(X)\, {}_\theta\Gamma_{P_1}^P(X,Y). \tag{4.1} $$

特に

$$ k_{\mathfrak{o}}^{T+X}(x,f) = \sum_{\substack{Q\subset P\\ \theta(P)=P,\, \theta(Q)=Q}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_L^M)^\theta} \tag{4.2} $$
$$ \times \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \sum_{\gamma\in Q(F)\backslash P(F)} {}_\theta\Gamma_P^G(H_0(\delta x),X)\, {}_\theta\widehat{\tau}_Q^P(H_0(\gamma\delta x)-T) K_{Q,\mathfrak{o}}(\gamma\delta x,\gamma\delta x) $$

がわかる。ところが、$x = uamk$, $u\in U(\mathbb{A})$, $a\in\mathfrak{A}_M^G$, $m\in M(\mathbb{A})^1$, $k\in\mathbf{K}$ のとき、

$$ \begin{aligned} K_{Q,\mathfrak{o}}^f(x,x) &= \sum_{\gamma\in L(F)\cap\mathfrak{o}} \int_{V(\mathbb{A})} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(amk)f)(\gamma v)\,dv \\ &= \omega(ma) \sum_{\gamma\in L(F)\cap\mathfrak{o}} \int_{V^M(\mathbb{A})}\int_{U(\mathbb{A})} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(k)f)(a^{-1}m^{-1}\gamma v u'\theta(ma))\,du'\,dv \\ &= a^{2\rho_P}\omega(m) \sum_{\gamma\in L(F)\cap\mathfrak{o}} \int_{V^M(\mathbb{A})} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(a)f_P^k)(m^{-1}\gamma v\theta(m))\,dv \\ &= a^{2\rho_P} K_{Q^M,\mathfrak{o}^M}^{M,\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(a)f_P^k}(m,m), \end{aligned} $$
$$ f_P^k(m) := m^{\rho_P}\int_{U(\mathbb{A})} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(k)f)(mu)\,du, \quad m\in M(\mathbb{A}) $$

であるから、$J_{\mathfrak{o}}^{T+X}(f)$ を定義する $G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ 上の積分を (4.2) の $P(F)\backslash G(F)$ 上の和と合わせて $U(F)\backslash U(\mathbb{A})\times\mathfrak{A}_M^G\times M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1\times\mathbf{K}$ 上の積分で書くことにより、

$$ \begin{aligned} J_{\mathfrak{o}}^{T+X}(f) = \sum_{\substack{P\supset P_0\\ \theta(P)=P}} \int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1} \sum_{\substack{Q;\, P_0\subset Q\subset P\\ \theta(Q)=Q}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_L^M)^\theta}\, {}_\theta\widehat{\tau}_Q^P(H_0(\gamma m)-T) \\ \times \int_{\mathfrak{A}_M^G} {}_\theta\Gamma_P^G(H_P(a),X)\int_{\mathbf{K}} K_{Q^M,\mathfrak{o}^M}^{M,\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(a)f_P^k}(\gamma m,\gamma m)\,dk\,da\,dm \end{aligned} $$

となる。ここで 2 行目の二重積分は

$$ \int_{(\mathfrak{a}_M^G)^\theta} {}_\theta\Gamma_P^G(H,X)\omega(\exp H)\,dH \int_{\mathfrak{A}_M^G(\theta)}\int_{\mathbf{K}} K_{Q^M,\mathfrak{o}^M}^{M,\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(a)f_P^k}(\gamma m,\gamma m)\,dk\,da $$

と分かれるから、後者の積分の中で

$$\begin{aligned}\overline{f}_P(m) &:= \int_{\mathfrak{A}_M^G(\theta)} \int_{\mathbf{K}} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(a) f_P^k)(m)\, dk\, da \\ &= m^{\rho_P} \int_{\mathbf{K}} \int_{\mathfrak{A}_M^G(\theta)} \omega(ak) \int_{U(\mathbb{A})} f(k^{-1}a^{-1}\theta(a) m u \theta(k))\, du\, da\, dk\end{aligned}$$

と書けば結局

$$\begin{aligned}J_{\mathfrak{o}}^{T+X}(f) &= \sum_{\substack{P \supset P_0 \\ \theta(P)=P}} \int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1} \sum_{\substack{Q;\, P_0 \subset Q \subset P \\ \theta(Q)=Q}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_L^M)^\theta} K_{Q^M, \mathfrak{o}^M}^{M, \overline{f}_P}(\gamma m, \gamma m)_\theta \widehat{\tau}_P(H_0(\gamma m) - T)\, dm \\ &\qquad \times \int_{(\mathfrak{a}_M^G)^\theta} {}_\theta\Gamma_P^G(H, X) \omega(\exp H)\, dH \\ &= \sum_{\substack{P \supset P_0 \\ \theta(P)=P}} J_{\mathfrak{o}^M}^{M,T}(\overline{f}_P) \int_{(\mathfrak{a}_M^G)^\theta} {}_\theta\Gamma_P^G(H, X) \omega(\exp H)\, dH\end{aligned}$$

を得る (参考 6.1)。ここで ${}_\theta\Gamma_P^G(H, X)$ は $H \in (\mathfrak{a}_M^G)^\theta$ 上でコンパクト台を持つから、最後の積分は X についての多項式函数になる。$J_{\mathfrak{x}}^T(f)$ についても類似の議論を経て結局、$J_{\mathfrak{o}}^T(f)$, $J_{\mathfrak{x}}^T(f)$, **及び** (3.2) **の両辺は** $T \in \mathfrak{a}_0$ **の多項式函数である** ことがわかる。

さて我々は $\mathrm{Norm}(A_0, G)(F)/M_0(F)$ の代表系 $W \subset G(F)$ を固定していた。G が F 上スプリットしているときを除き $W \subset \mathbf{K}$ とできるとは限らないが 、各 $w \in W$ に対して $\mathring{w} \in \mathbf{K}$ であって

$$\mathrm{Ad}(\mathring{w})(a) = \mathrm{Ad}(w)(a), \quad \forall a \in A_0(\mathbb{A})$$

となるものが取れる。言い換えれば $w \in W$ は $w = \mathring{w} m_w$, $m_w \in M_0(\mathbb{A})$ と書ける。$\alpha \in \Delta_0$ に対して G_α をそれで生成される F ランクが 1 の部分群とする。$r_\alpha \in G_\alpha(F)$ であったから, $h_\alpha \in \mathbb{R}$ があって $H_{P_0}(r_\alpha^{-1}) = h_\alpha \cdot \alpha^\vee$ と書ける。これを使って

$$T_1 := \sum_{\alpha \in \Delta_0} h_\alpha \cdot \varpi_\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_0$$

とおく。G がスプリットしていれば、これは本当の原点 $0 \in \mathfrak{a}_0$ にできる。多項式函数 $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$, $J_{\mathfrak{x}}^T(f)$ の原点 T_1 での値、つまり定数項を各々 $J_{\mathfrak{o}}(f)$, $J_{\mathfrak{x}}(f)$ と書く。T_1、従って $J_{\mathfrak{o}}(f)$, $J_{\mathfrak{x}}(f)$ とも M_0 及び $\mathbf{K}$ に依存していることを注意しておく。

4.1.1. 第二の粗い O 展開. 実は $k_{\mathfrak{o}}^T(x, f)$ の積分は計算できない。そこで $k_{\mathfrak{o}}^T(x, f)$ を

$$j_{\mathfrak{o}}^T(x, f) := \sum_{\substack{P;\, P_0 \subset P \subset G \\ \theta(P)=P}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_M^G)^\theta} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} j_{P,\mathfrak{o}}(\delta x)_\theta \widehat{\tau}_P(H_0(\delta x) - T),$$

$$j_{P,\mathfrak{o}}(x) := \omega(x) \sum_{\gamma \in M(F) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\nu \in U^{\gamma_s\theta}(F)\backslash U(F)} \int_{U^{\gamma_s\theta}(\mathbb{A})} \phi(x^{-1}\nu^{-1}\gamma u \theta(\nu x))\, du$$

で置き換える。 ここで $U^{\gamma_s\theta}$ は U 内の $\mathrm{Ad}(\gamma_s) \circ \theta$ の固定点からなる閉部分群である。$k_{\mathfrak{o}}^T(x, f)$ の場合と同様にして、$T \in \mathfrak{a}_0$ が十分正の時 $j_{\mathfrak{o}}^T(x, f)$ の $G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ 上の積分は絶対収束し、T についての多項式函数を定めることがわかる。さらに

$$K_{P,\mathfrak{o}}(x, x) = \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} j_{P,\mathfrak{o}}(ux)\, du$$

から、

$$J^T_{\mathfrak{o}}(f) = \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} j^T_{\mathfrak{o}}(x, f)\, dx$$

である。

幾何サイドの変形は標準的である。すなわち Jordan 分解により $\mathfrak{o}$ の項を $G_{\gamma_s,\theta}$ 上のユニポテント項に帰着する。そのためにまず少し記号を準備する。$\mathcal{F}_\theta$ で M_0 を含む (標準的とは限らない) 放物型部分群 P であって $\theta(P)$ と P が $G(F)$ 共役であるようなものの集合を表す。P_0 は θ 安定なので標準放物型部分群 P が $\mathcal{F}_\theta$ に属することと $\theta(P) = P$ は同値だが、標準的でない P に対してはそうとは限らない。$P \in \mathcal{F}_\theta$ は M_0 を含むような Levi 成分 M_P を唯一つ持つ。$\mathcal{L}_\theta := \{M_P \,|\, P \in \mathcal{F}_\theta\}$ と書く。さらに $L \in \mathcal{L}_\theta$ に対して

$$\mathcal{F}_\theta(L) := \{P \in \mathcal{F}_\theta \,|\, M_P \supset L\}, \quad \mathcal{L}_\theta(L) := \{M \in \mathcal{L}_\theta \,|\, M \supset L\},$$
$$\mathcal{P}_\theta(L) := \{P \in \mathcal{F}_\theta \,|\, M_P = L\}$$

とおく。$P \in \mathcal{F}_\theta$ に対して、$g \in M_P(F)\backslash G(F)$ であって $\mathrm{Ad}(g)\circ\theta(P) = P$, $\mathrm{Ad}(g)\circ\theta(M_P) = M_P$ となるものが唯一つある。特に $\theta_P := \mathrm{Ad}(g) \circ \theta|_{\mathfrak{a}_{M_P}}$ は定義可能である。

4.2. **Jordan 分解.** さて $Q = LV \in \mathcal{F}_\theta$ が標準的なとき、$j_{Q,\mathfrak{o}}(x)$ を計算する。$\mathfrak{o}$ の代表 σ で、ある θ 不変標準放物型部分群 $P_1 = M_1U_1$ の Levi 成分 $M_1(F)$ に含まれるが、その θ 不変な真放物型部分群には含まれていないものを取る。$\gamma \in \overline{\mathfrak{o}} \cap L(F)$ の定義から P_1 に associated な θ 不変標準放物型部分群 $Q_1 = L_1V_1$ があって、ある $w \in W^\theta_{M_1,L_1}$ による σ の像に γ_s は $L(F)$ 共役 : $\mathrm{Ad}_\theta(\mu)\gamma_s = w(\sigma)$, $\exists\mu \in L(F)$。これと Jordan 分解の性質から

$$\gamma = \mathrm{Ad}_\theta(\mu^{-1})w(\sigma\nu), \quad \nu \in \mathcal{U}_{G_{\sigma,\theta}}(F) \cap w^{-1}(L)(F)$$

と書ける。ここで $G_{\sigma,\theta}$ は σ の θ **中心化群** $G^{\sigma\theta} = \{g \in G \,|\, \mathrm{Ad}_\theta(g)\sigma = \sigma\}$ の単位元の連結成分であり、$\mathcal{U}_{G_{\sigma,\theta}}$ はその F 有理的なユニポテント元の集合の Zariski 閉包である (F ユニポテント多様体)。表記の一意性のために w と μ は各々

$$W^\theta_{M_1}(L, G_{\sigma,\theta}) := \left\{ w \in W_{M_1}(L)^\theta \;\middle|\; \begin{array}{l} \bullet\ \ w^{-1}(\alpha) > 0,\ \forall\alpha \in \Delta^L_{w(M_1)}, \\ \bullet\ \ w(\beta) > 0,\ \forall\beta \in \Sigma_{(P_1)_{\sigma,\theta}} \end{array} \right\},$$

及び $(w(G_{\sigma,\theta}) \cap L)(F)\backslash L(F)$ を走るものとし、和の重複度 $\iota^G_\theta(\sigma) := [G^{\sigma\theta}(F) : G_{\sigma,\theta}(F)]$ で割っておく。この表記を $j_{Q,\mathfrak{o}}(x)$ に適用して、

$$\begin{aligned} j_{Q,\mathfrak{o}}(x) = \iota^G_\theta(\sigma)^{-1} & \sum_{w\in W^\theta_{M_1}(L,G_{\sigma,\theta})} \ \sum_{\mu\in(w(G_{\sigma,\theta})\cap L)(F)\backslash L(F)} \ \sum_{\eta\in V^{\mathrm{Ad}_\theta(\mu^{-1})w(\sigma)\theta}(F)\backslash V(F)} \\ & \sum_{\nu\in w^{-1}(L)(F)\cap\mathcal{U}_{G_{\sigma,\theta}}(F)} \int_{V^{\mathrm{Ad}_\theta(\mu^{-1})w(\sigma)\theta}(\mathbb{A})} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(\eta x)f)(\mathrm{Ad}_\theta(\mu^{-1})w(\sigma\nu)v)\, dv \\ = \iota^G_\theta(\sigma)^{-1} & \sum_{w\in W^\theta_{M_1}(L,G_{\sigma,\theta})} \ \sum_{\pi\in(w(G_{\sigma,\theta})\cap Q)(F)\backslash Q(F)} \\ & \sum_{\nu\in w^{-1}(L)(F)\cap\mathcal{U}_{G_{\sigma,\theta}}(F)} \int_{(w^{-1}(V)\cap G_{\sigma,\theta})(\mathbb{A})} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(\pi x)f)(w(\sigma\nu v))\, dv. \end{aligned}$$

これを代入して π についての和を $\xi := w^{-1}(\pi)$ についての和に書けば

$$\sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)} j_{Q,\mathfrak{o}}(x)_\theta\hat{\tau}_Q(H_0(\delta x)-T) = \iota^G_\theta(\sigma)^{-1} \sum_{w\in W^\theta_{M_1}(L,G_{\sigma,\theta})} \sum_{\xi\in(w^{-1}(Q)\cap G_{\sigma,\theta})(F)\backslash G(F)}$$

$$\sum_{\nu\in w^{-1}(L)(F)\cap\mathcal{U}_{G_{\sigma,\theta}}(F)} \int_{(w^{-1}(V)\cap G_{\sigma,\theta})(\mathbb{A})} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(\xi x)f)(\sigma\nu v)_\theta\hat{\tau}_Q(H_0(w\xi x)-T)\,dv$$

を得る。$G_{\sigma,\theta}$ の標準放物型部分群 $w^{-1}(Q)\cap G_{\sigma,\theta}$ を R と書けば、結局 $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$ は

$$\iota^G_\theta(\sigma)^{-1}\int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\substack{R\subset G_{\sigma,\theta}\\ \text{標準的}}} \sum_{\xi\in R(F)\backslash G(F)} \sum_{\nu\in\mathcal{U}_{M_R}(F)}$$

$$\int_{U_R(\mathbb{A})} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(\xi x)f)(\sigma\nu v)\,dv \sum_{\substack{Q,\,w\in W^\theta_{M_1}(L,G_{\sigma,\theta})\\ w^{-1}(Q)\cap G_{\sigma,\theta}=R}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}^G_L)^\theta}{}_\theta\hat{\tau}_Q(H_0(w\xi x)-T)\,dx$$

$\mathcal{F}_\theta(M_1)_R := \{P\in\mathcal{F}_\theta(M_1)\,|\,P_{\sigma,\theta}=R\}$ と書いて

$$=\iota^G_\theta(\sigma)^{-1}\int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\substack{R\subset G_{\sigma,\theta}\\ \text{標準的}}} \sum_{\xi\in R(F)\backslash G(F)} \sum_{\nu\in\mathcal{U}_{M_R}(F)} \int_{U_R(\mathbb{A})} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(\xi x)f)(\sigma\nu v)\,dv$$

$$\times\sum_{P\in\mathcal{F}_\theta(M_1)_R} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}^G_M)^\theta}{}_\theta\hat{\tau}_P(H_0(\xi x)-w_P^{-1}(T-T_1)-T_1)\,dx.$$

ここで $w_P\in W^\theta$ は $w_P(P)$ が標準的になるようなものとする。簡単な変数変換により、これは

$$\iota^G_\theta(\sigma)^{-1}\int_{G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})}\int_{G_{\sigma,\theta}(F)\mathfrak{A}^\theta_G\backslash G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})} \sum_{\substack{R\subset G_{\sigma,\theta}\\ \text{標準的}}} \sum_{\delta\in R(F)\backslash G_{\sigma,\theta}(F)}$$

$$\sum_{\nu\in\mathcal{U}_{M_R}(F)}\int_{U_R(\mathbb{A})} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(\delta xy)f)(\sigma\nu v)\,dv \tag{4.3}$$

$$\sum_{P\in\mathcal{F}_\theta(M_1)_R} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}^G_M)^\theta}{}_\theta\hat{\tau}_P(H_0(\delta xy)-w_P^{-1}(T-T_1)-T_1)\,dx\,dy$$

となる。これを $G_{\sigma,\theta}$ のユニポテントな項で表そう。

4.3. **ユニポテントな場合への帰着.** $(P_1)_{\sigma,\theta}$ は $G_{\sigma,\theta}$ の極小放物型部分群である。$(G_{\sigma,\theta},(M_1)_{\sigma,\theta})$ に、$(M_1)_{\sigma,\theta}$ に関して良い位置にある $G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_\sigma$ を加えたデータに対して、G の場合と同様に $\mathfrak{a}_{M_1}=\mathfrak{a}_{(M_1)_{\sigma,\theta}}$ の原点 $T_{1,\sigma}$ が定まる。$T\in\mathfrak{a}_0$ に対して、$T-T_1+T_{1,\sigma}\in\mathfrak{a}_0$ の $\mathfrak{a}_{M_1}$ での像を T_σ と書く。このとき [A8, §§4, 5] のコンビナトリクスにより、(4.3) の最後の行は

$$\sum_{\substack{S\in\mathcal{F}^{G_{\sigma,\theta}}_\theta((M_1)_{\sigma,\theta})\\ S\supset R}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}^S_R)^\theta}{}_\theta\hat{\tau}^S_R(H_R(\delta x)-T_\sigma)_\theta\Gamma^G_S(H_S(\delta x)-T_\sigma,\mathcal{Y}^T_S(\delta x,y))$$

と書ける。ここで $\mathcal{Y}_S^T(x,y)$ の定義は上記文献を参照。これにより、$J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ は

$$\begin{aligned}
J_{\mathfrak{o}}^T(f) =&\iota_\theta^G(\sigma)^{-1} \int_{G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\substack{S;\,(P_1)_{\sigma,\theta}\subset S\subset G_{\sigma,\theta}\\ \theta(S)=S}} \int_{G_{\sigma,\theta}(F)\mathfrak{A}_G^\theta\backslash G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})} \sum_{\substack{R;\,(P_1)_{\sigma,\theta}\subset R\subset S\\ \theta(R)=R}} \\
&\sum_{\delta\in R(F)\backslash G_{\sigma,\theta}(F)} \omega(xy) \sum_{\nu\in\mathcal{U}_{M_R}(F)} \int_{U_R(\mathbb{A})} f(y^{-1}\sigma x^{-1}\delta^{-1}\nu v\theta(\delta xy))\,dv \\
&\times(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^S)^\theta}\,{}_\theta\widehat{\tau}_R^S(H_R(\delta x)-T_\sigma)\,{}_\theta\Gamma_S^G(H_S(\delta x)-T_\sigma,\mathcal{Y}_S^T(\delta x,y))\,dx\,dy \\
=&\iota_\theta^G(\sigma)^{-1} \int_{G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\substack{S;\,(P_1)_{\sigma,\theta}\subset S\subset G_{\sigma,\theta}\\ \theta(S)=S}} \int_{G_{\sigma,\theta}(F)\mathfrak{A}_G^\theta\backslash G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})} \sum_{\substack{R;\,(P_1)_{\sigma,\theta}\subset R\subset S\\ \theta(R)=R}} \sum_{\xi\in S(F)\backslash G_{\sigma,\theta}(F)} \\
&\sum_{\mu\in R^{M_S}(F)\backslash M_S(F)} \omega(xy) \sum_{\nu\in\mathcal{U}_{M_R}(F)} \int_{U_R(\mathbb{A})} f(y^{-1}\sigma\mathrm{Ad}_\theta(x^{-1}\xi^{-1}\mu^{-1})(\nu v)\theta(y))\,dv \\
&\times(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^S)^\theta}\,{}_\theta\widehat{\tau}_R^S(H_R(\mu\xi x)-T_\sigma)\,{}_\theta\Gamma_S^G(H_S(\mu\xi x)-T_\sigma,\mathcal{Y}_S^T(\mu\xi x,y))\,dx\,dy \\
=&\iota_\theta^G(\sigma)^{-1} \int_{G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\substack{S;\,(P_1)_{\sigma,\theta}\subset S\subset G_{\sigma,\theta}\\ \theta(S)=S}} \int_{S(F)\mathfrak{A}_G^\theta\backslash G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})} \sum_{\substack{R;\,(P_1)_{\sigma,\theta}\subset R\subset S\\ \theta(R)=R}} \\
&\sum_{\mu\in R^{M_S}(F)\backslash M_S(F)} \omega(xy) \sum_{\nu\in\mathcal{U}_{M_R}(F)} \int_{U_R(\mathbb{A})} f(y^{-1}\sigma\mathrm{Ad}_\theta(x^{-1}\mu^{-1})(\nu v)\theta(y))\,dv \\
&\times(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^S)^\theta}\,{}_\theta\widehat{\tau}_R^S(H_R(\mu x)-T_\sigma)\,{}_\theta\Gamma_S^G(H_S(\mu x)-T_\sigma,\mathcal{Y}_S^T(\mu x,y))\,dx\,dy
\end{aligned}$$

となる。この中の x についての積分に岩澤分解 $G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A}) = U_S(\mathbb{A})\mathfrak{A}_S M_S(\mathbb{A})^1\mathbf{K}_\sigma$ の積分公式を適用して

$$\begin{aligned}
J_{\mathfrak{o}}^T(f) =&\iota_\theta^G(\sigma)^{-1} \int_{G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\substack{S;\,(P_1)_{\sigma,\theta}\subset S\subset G_{\sigma,\theta}\\ \theta(S)=S}} \int_{\mathbf{K}_\sigma} \int_{\mathfrak{A}_S/\mathfrak{A}_G^\theta} \\
&\int_{M_S(F)\backslash M_S(\mathbb{A})^1} \sum_{\substack{R;\,(P_1)_{\sigma,\theta}\subset R\subset S\\ \theta(R)=R}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^S)^\theta} \sum_{\mu\in R^{M_S}(F)\backslash M_S(F)} \omega(m) \\
&\sum_{\nu\in\mathcal{U}_{M_R}(F)} \int_{U_R^{M_S}(\mathbb{A})} \Phi_{S,a,k,y}^T(\mathrm{Ad}_\theta(m^{-1}\mu^{-1})(\nu v_1))\,{}_\theta\widehat{\tau}_R^S(H_R(\mu m)-T_\sigma)\,dv_1\,dm\,da\,dk\,dy
\end{aligned}$$

$$=\iota_\theta^G(\sigma)^{-1} \int_{G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\substack{S;\,(P_1)_{\sigma,\theta}\subset S\subset G_{\sigma,\theta}\\ \theta(S)=S}} \Big(\int_{\mathbf{K}_\sigma} \int_{\mathfrak{A}_S/\mathfrak{A}_G^\theta} J_{\mathrm{unip}}^{M_S,T_\sigma}(\Phi_{S,a,k,y}^T)\,da\,dk\Big)\,dy \tag{4.4}$$

を得る。但し、$\mathfrak{o}=\{1\}$ に対する $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ を $J_{\mathrm{unip}}^T(f)$ と書いた。また

$$\Phi_{S,a,k,y}^T(m) = m^{\rho_S} \int_{U_S(\mathbb{A})} \omega(k)(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y)f)(\sigma\mathrm{Ad}_\theta(k^{-1})(mv_2))\,dv_2\cdot\omega(a)\,{}_\theta\Gamma_S^G(H_S(a)-T_\sigma,\mathcal{Y}_S^T(k,y)).$$

さて、上の式を $T = T_1$ に specialize しよう。このとき $Q \in \mathcal{F}_\theta(M_1)_S$ に対して ${}_\theta\Gamma_S^G(X,\mathcal{Y}_S^{T_0}(k,y)) = {}_\theta\Gamma_Q^G(X,-H_Q(ky)+T_1-T_{1,\sigma})$ が成り立つので、(4.4) の中の a に

ついての積分は

$$ {}_\theta v'_S(ky, T_1 - T_{1,\sigma}) := \sum_{Q \in \mathcal{F}_\theta(M_1)_S} {}_\theta v'_Q(ky, T_1 - T_{1,\sigma}), $$

$$ {}_\theta v'_Q(ky, T) := \int_{(\mathfrak{a}_L^G)^\theta} {}_\theta\Gamma_Q^G(X, -H_Q(ky) + T)\omega(\exp X)\, dX $$

のみである。そこで

$$ \Phi_{S,y,T}(m) := m^{\rho_S} \int_{\mathbf{K}_\sigma} \int_{U_S(\mathbb{A})} \omega(k \exp T_\sigma)(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y)f)(\sigma \mathrm{Ad}_\theta(k^{-1})(mu))_\theta v'_S(ky, T)\, du\, dk $$

とおけば、

$$ J_{\mathfrak{o}}(f) = \iota_\theta^G(\sigma)^{-1} \int_{G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\substack{S;\, (P_1)_{\sigma,\theta} \subset S \subset G_{\sigma,\theta} \\ \theta(S) = S}} J_{\mathrm{unip}}^{M_S}(\Phi_{S,y,T_1 - T_{1,\sigma}})\, dy $$

である。これと $G_{\sigma,\theta}(F)$ 共役な S に対しては $J_{\mathrm{unip}}^{M_S}(\Phi_{S,y,T_1-T_{1,\sigma}})$ は一定であることに注意して、結局

$$ J_{\mathfrak{o}}(f) = \iota_\theta^G(\sigma)^{-1} \int_{G_{\sigma,\theta}(\mathbb{A})\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A})} \Bigg(\sum_{R \in \mathcal{F}_\theta^{G_{\sigma,\theta}}((M_1)_{\sigma,\theta})} \frac{|(W^{M_R})^\theta|}{|(W^{G_{\sigma,\theta}})^\theta|} J_{\mathrm{unip}}^{M_R}(\Phi_{R,y,T_1 - T_{1,\sigma}}) \Bigg)\, dy \tag{4.5} $$

が得られた。

4.4. **ウェイト付き軌道積分**. まず今後の組み合わせ論的な構成の中で重要な役割を果たす (G, M) 族を導入する。$Q = LV \subset P = MU$ を θ 不変な標準放物型部分群の組とする。Δ_L^M 内の $\langle\theta\rangle$ 軌道の集合を $\Delta_{L,\theta}^M$ と書くとき $\{(\alpha^\vee)^\theta\}_{\alpha \in \Delta_{L,\theta}^M}$ は $(\mathfrak{a}_L^M)^\theta$ の基底になっていることに注意して、$i\mathfrak{a}_L^*$ 上のある種の分母函数を

$$ {}_\theta\theta_Q^P(\lambda) := \frac{1}{\mathrm{meas}((\mathfrak{a}_L^M)^\theta / \mathbb{Z}[\{(\alpha^\vee)^\theta\}_{\alpha \in \Delta_{L,\theta}^M}])} \prod_{\alpha \in \Delta_{L,\theta}^M} \lambda(\alpha^\vee), $$

$$ {}_\theta\widehat{\theta}_Q^P(\lambda) := \frac{1}{\mathrm{meas}((\mathfrak{a}_L^M)^\theta / \mathbb{Z}[\{(\varpi_\alpha^\vee)^\theta\}_{\alpha \in \Delta_{L,\theta}^M}])} \prod_{\alpha \in \Delta_{L,\theta}^M} \lambda(\varpi_\alpha^\vee) $$

と定める。ここで $\{\varpi_\alpha^\vee\}_{\alpha \in \Delta_L^M}$ は Δ_L^M に対する $\mathfrak{a}_L^M$ の双対基底である。$(\alpha^\vee)^\theta$ $(\alpha \in \Delta_{M,\theta})$ は $(\mathfrak{a}_M^*)^\theta$ 上の線型形式だが、その零点たちのなす超平面として $(\alpha^\vee)^\theta$ に付随する壁が定義される。$(\mathfrak{a}_M^*)^\theta$ から全ての $(\alpha^\vee)^\theta$ の壁を除いた集合の各連結成分が $(\mathfrak{a}_M^*)^\theta$ 内の部屋である。この部屋たちは $\mathcal{P}_\theta(M)$ の元と一対一に対応している。$i(\mathfrak{a}_M^*)^\theta$ 上の滑らかな函数族 $\{c_P(\lambda)\}_{\mathcal{P}_\theta(M)}$ が **(G, M) 族** であるとは、$P, P' \in \mathcal{P}_\theta(M)$ が $(\mathfrak{a}_M^*)^\theta$ 内の隣り合った部屋に対応していて $\lambda \in i(\mathfrak{a}_M^*)^\theta$ がこれらの部屋を分ける壁に属するとき $c_P(\lambda) = c_{P'}(\lambda)$ が成り立つこととする。$\{c_P(\lambda)\}_{P \in \mathcal{P}_\theta(M)}$ を (G, M) 族とするとき、ある $P \in \mathcal{P}_\theta(M)$ を含む $Q \in \mathcal{F}_\theta$ に対して

$$ c'_Q(\lambda) := \sum_{P_1;\, P_1 \supset Q} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_L^{M_1})^\theta} \frac{c_{P_1}(\lambda_{M_1})}{{}_\theta\widehat{\theta}_Q^{P_1}(\lambda)_\theta \theta_{P_1}^G(\lambda)} \tag{4.6} $$

とおく。ここで、$\lambda_{M_1} \in i\mathfrak{a}_{M_1}^*$ ならば (G, M) 族の定義から $c_P(\lambda_M)$ は $P \in \mathcal{P}_\theta^{P_1}(M)$ の取り方によらない。その値を $c_{P_1}(\lambda_M)$ と書いた。

補題 4.1 ([A3] Lem.6.1, 6.2, 6.3). $\{c_P(\lambda)\}_{P\in\mathcal{P}_\theta(M)}$ が (G,M) 族であるとする。
(1) $c'_Q(\lambda)$ は $i\mathfrak{a}_L^*$ 上の滑らかな函数に延びる。
(2)

$$c_M(\lambda) := \sum_{P\in\mathcal{P}_\theta(M)} \frac{c_P(\lambda)}{{}_\theta\theta_P^G(\lambda)}$$

は $i(\mathfrak{a}_M^*)^\theta$ 上の滑らかな函数に延びる。
(3) $\{c_P(\lambda)\}_{P\in\mathcal{P}_\theta(M)}$, $\{d_P(\lambda)\}_{P\in\mathcal{P}_\theta(M)}$ が (G,M) 族の時

$$(cd)_M(\lambda) = \sum_{Q\in\mathcal{F}_\theta(M)} c_M^L(\lambda) d'_Q(\lambda).$$

例えば $x\in G(\mathbb{A})$ に対して、

$${}_\theta v_Q(\lambda,x) := e^{-\lambda(H_Q(x))}, \quad Q\in\mathcal{P}_\theta^P(L)$$

は (M,L) 族である。これに補題を適用して得られる函数

$${}_\theta v_L^P(\lambda,x) := \sum_{Q\in\mathcal{P}_\theta^P(L)} \frac{v_Q(\lambda,x)}{{}_\theta\theta_Q^P(\lambda)}$$

を使って ${}_\theta v_L^P(x) := \lim_{\lambda\to 0} v_L^P(\lambda,x)$ とおく。

さて、S を F の素点の有限集合とし、$F_S=\prod_{v\in S}F_v$ とおく。$M\in\mathcal{L}_\theta$ を取り、$\gamma\in M(F_S)$ が $G_{\gamma_s,\theta}\subset M$ を満たすとする。このとき、$f\in C_c^\infty(G(F_S))$ の (M,γ) での **ウェイト付き軌道積分** を

$$\begin{aligned}{}_\theta J_M(\gamma,f) :=& |D_\theta(\gamma)|_S^{1/2}\int_{M(F_S)^1\mathfrak{A}_G\backslash G(F_S)}\int_{\mathfrak{o}_{\gamma,\theta}(M(F_S))} \mathrm{Ad}_{\theta\omega}(x)f(\mu)_\theta v_M(x)\,d\mu\,dx \\ =& |D_\theta(\gamma)|_S^{1/2}\int_{G_{\gamma,\theta}(F_S)\backslash G(F_S)} \mathrm{Ad}_{\theta\omega}(x)f(\gamma)\,{}_\theta v_M(x)\,dx\end{aligned}$$

と定義する。ここで $|x|_S := \prod_{v\in S}|x_v|_v$, $(x_v)\in F_S^\times$ であり、

$$D_\theta(\gamma) = D_\theta^G(\gamma) := \prod_{v\in S}\det(1-\mathrm{Ad}(\gamma_{v,s})\circ\theta|\mathfrak{g}(F_v)/\mathfrak{g}_{\gamma_{v,s},\theta}(F_v))$$

と書いた。$\mathfrak{g}_{\sigma,\theta}$ は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ 内の $\mathrm{Ad}(\sigma)\circ\theta$ の 0 固有空間である。また

$$\mathfrak{o}_{\gamma,\theta}(M(F_S)) := \{\mathrm{Ad}_\theta(m)\gamma \,|\, m\in M(F_S)\}$$

である。これが収束することは [A9, Lem.2.1] と $\mathfrak{o}_{\gamma,\theta}(M(F_S))$ 上の不変測度が $G(F_S)$ 上の Radon 測度であること (Deligne-Rao の定理 [Rao]) から保証される。一般の $\gamma\in M(F_S)$ に対しては ${}_\theta J_M(\gamma,f)$ はある種の極限

$${}_\theta J_M(\gamma,f) := \lim_{a\to 1}\sum_{L\in\mathcal{L}_\theta(M)} {}_\theta r_M^L(\gamma,a)_\theta J_L(a\gamma,f)$$

として定義される ([A9, §§3-7])。ここで ${}_\theta r_M^L(\gamma,a)$ は (L,M) 族

$$r_{PM}^L(\lambda,\gamma,a) := \prod_{\beta\in\Delta_{M,\theta}^L} |\beta^\theta(a)-\beta^\theta(a)^{-1}|_S^{\beta^\vee(\lambda^\theta)_\theta\rho(\beta,\gamma_u)}$$

から 補題 4.1 によって定まる函数 $r_M^L(\lambda,\gamma,a)$ の $\lambda=0$ での値である。${}_\theta\rho(\beta,\gamma_u)$ は $r_{PM}^L(\lambda,\gamma,a)$ が (L,M) 族になるように定まるものである。通常の軌道積分

$$J_G(\gamma,f) = |D(\gamma)|_S^{1/2}\int_{I_\gamma(F)\backslash G(F)} f(x^{-1}\gamma x)\,dx, \quad \gamma\in G(F_S),\ f\in C_c^\infty(G(F_S))$$

補題 4.1 ([A3] Lem.6.1, 6.2, 6.3). $\{c_P(\lambda)\}_{P\in\mathcal{P}_\theta(M)}$ が (G,M) 族であるとする。
(1) $c'_Q(\lambda)$ は $i\mathfrak{a}_L^*$ 上の滑らかな函数に延びる。
(2)

$$c_M(\lambda) := \sum_{P\in\mathcal{P}_\theta(M)} \frac{c_P(\lambda)}{{}_\theta\theta_P^G(\lambda)}$$

は $i(\mathfrak{a}_M^*)^\theta$ 上の滑らかな函数に延びる。
(3) $\{c_P(\lambda)\}_{P\in\mathcal{P}_\theta(M)}$, $\{d_P(\lambda)\}_{P\in\mathcal{P}_\theta(M)}$ が (G,M) 族の時

$$(cd)_M(\lambda) = \sum_{Q\in\mathcal{F}_\theta(M)} c_M^L(\lambda)d'_Q(\lambda).$$

例えば $x\in G(\mathbb{A})$ に対して、

$${}_\theta v_Q(\lambda,x) := e^{-\lambda(H_Q(x))},\quad Q\in\mathcal{P}_\theta^P(L)$$

は (M,L) 族である。これに補題を適用して得られる函数

$${}_\theta v_L^P(\lambda,x) := \sum_{Q\in\mathcal{P}_\theta^P(L)} \frac{v_Q(\lambda,x)}{{}_\theta\theta_Q^P(\lambda)}$$

を使って ${}_\theta v_L^P(x) := \lim_{\lambda\to 0} v_L^P(\lambda,x)$ とおく。

さて、S を F の素点の有限集合とし、$F_S=\prod_{v\in S}F_v$ とおく。$M\in\mathcal{L}_\theta$ を取り、$\gamma\in M(F_S)$ が $G_{\gamma_s,\theta}\subset M$ を満たすとする。このとき、$f\in C_c^\infty(G(F_S))$ の (M,γ) での **ウェイト付き軌道積分** を

$$\begin{aligned}{}_\theta J_M(\gamma,f) :=&|D_\theta(\gamma)|_S^{1/2}\int_{M(F_S)^1\mathfrak{A}_G\backslash G(F_S)}\int_{\mathfrak{o}_{\gamma,\theta}(M(F_S))}\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(x)f(\mu)\,{}_\theta v_M(x)\,d\mu\,dx\\ =&|D_\theta(\gamma)|_S^{1/2}\int_{G_{\gamma,\theta}(F_S)\backslash G(F_S)}\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(x)f(\gamma)\,{}_\theta v_M(x)\,dx\end{aligned}$$

と定義する。ここで $|x|_S:=\prod_{v\in S}|x_v|_v$, $(x_v)\in F_S^\times$ であり、

$$D_\theta(\gamma)=D_\theta^G(\gamma):=\prod_{v\in S}\det(1-\mathrm{Ad}(\gamma_{v,s})\circ\theta|\mathfrak{g}(F_v)/\mathfrak{g}_{\gamma_{v,s},\theta}(F_v))$$

と書いた。$\mathfrak{g}_{\sigma,\theta}$ は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ 内の $\mathrm{Ad}(\sigma)\circ\theta$ の 0 固有空間である。また

$$\mathfrak{o}_{\gamma,\theta}(M(F_S)):=\{\mathrm{Ad}_\theta(m)\gamma\,|\,m\in M(F_S)\}$$

である。これが収束することは [A9, Lem.2.1] と $\mathfrak{o}_{\gamma,\theta}(M(F_S))$ 上の不変測度が $G(F_S)$ 上の Radon 測度であること (Deligne-Rao の定理 [Rao]) から保証される。一般の $\gamma\in M(F_S)$ に対しては ${}_\theta J_M(\gamma,f)$ はある種の極限

$${}_\theta J_M(\gamma,f):=\lim_{a\to 1}\sum_{L\in\mathcal{L}_\theta(M)}{}_\theta r_M^L(\gamma,a)\,{}_\theta J_L(a\gamma,f)$$

として定義される ([A9, §§3-7])。ここで ${}_\theta r_M^L(\gamma,a)$ は (L,M) 族

$$r_{PM}^L(\lambda,\gamma,a):=\prod_{\beta\in\Delta_{M,\theta}^L}|\beta^\theta(a)-\beta^\theta(a)^{-1}|_S^{\beta^\vee(\lambda^\theta)\,{}_\theta\rho(\beta,\gamma_u)}$$

から 補題 4.1 によって定まる函数 $r_M^L(\lambda,\gamma,a)$ の $\lambda=0$ での値である。${}_\theta\rho(\beta,\gamma_u)$ は $r_{PM}^L(\lambda,\gamma,a)$ が (L,M) 族になるように定まるものである。通常の軌道積分

$$J_G(\gamma,f)=|D(\gamma)|_S^{1/2}\int_{I_\gamma(F)\backslash G(F)}f(x^{-1}\gamma x)\,dx,\quad \gamma\in G(F_S),\ f\in C_c^\infty(G(F_S))$$

に対しては $\gamma \in M(F_S)$ の時 descent

$$J_G(\gamma, f) = J_M(\gamma, \overline{f}^{(P)}), \quad \overline{f}^{(P)}(m) := m^{\rho_P} \int_{U(F_S)} \int_{\mathbf{K}_S} f(kmuk^{-1})\, dk\, du$$

が成り立っていた。次の補題はウェイト付き軌道積分に対するその類似である。

補題 4.2 ([A9] Cor.8.7). $\gamma = \gamma_s \gamma_u \in M(F_S)$ が

- $\gamma_s \in G(F)$,
- $\mathfrak{a}_{G^M_{\gamma_s,\theta}} = \mathfrak{a}_M$,
- $G_{\gamma,\theta}(F_S) \subset G_{\gamma_s,\theta}(F_S)$

を満たすとき、

$$_\theta J_M(\gamma, f) = |D_\theta(\gamma_s)|_S^{1/2} \int_{G_{\gamma_s,\theta}(F_S)\backslash G(F_S)} \sum_{R \in \mathcal{F}^{G_{\sigma,\theta}}(M_{\sigma,\theta})} {}_\theta J^{M_R}_{M_{\sigma,\theta}}(\gamma_u, \Phi_{R,y,T})\, dy$$

が成り立つ。ここで

$$\Phi_{R,y,T}(m) = m^{\rho_R} \int_{\mathbf{K}_\sigma} \int_{U_R(F_S)} \omega(k \exp T_\sigma)(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y) f)(\sigma \mathrm{Ad}(k^{-1})(mu))_\theta v'_R(ky, T)\, du\, dk.$$

これらの準備の下で (4.5) を計算する。まず素点の有限集合 S を十分大きく取ることにより、

(4.7)
$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \frac{1}{[G^{\sigma\theta}(F) : G_{\sigma,\theta}(F)]}$$
$$\times \int_{G_{\sigma,\theta}(F_S)\mathfrak{A}_G\backslash G(F_S)} \Bigg(\sum_{R \in \mathcal{F}_\theta^{G_{\sigma,\theta}}((M_1)_{\sigma,\theta})} \frac{|(W^{M_R})^\theta|}{|(W^{G_{\sigma,\theta}})^\theta|} J^{M_R}_{\mathrm{unip}}(\Phi_{R,y,T_1 - T_{1,\sigma}}) \Bigg)\, dy$$

であるとしてよい。[A7] において、Arthur は $J_{\mathrm{unip}}(f)$ と $_\theta J_M(\gamma, f)$ の共役による変動

$$J_{\mathrm{unip}}(\mathrm{Ad}_\theta(g^{-1}) f) = \sum_{Q \in \mathcal{F}_\theta} \frac{|(W^L)^\theta|}{|W^\theta|} J^L_{\mathrm{unip}}(\overline{f}_{Q,g}),$$
$$_\theta J_M(\gamma, \mathrm{Ad}_\theta(g^{-1}) f) = \sum_{Q \in \mathcal{F}_\theta} {}_\theta J^L_M(\gamma, \overline{f}_{Q,g}),$$

ただし、

$$\overline{f}_{Q,g}(\ell) := \ell^{\rho_Q} \int_{\mathbf{K}} \int_{\mathfrak{A}^G_L(\theta)} \omega(ak) \int_{V(\mathbb{A})} f(k^{-1} a^{-1} \theta(a) \ell v \theta(k))_\theta u'_Q(k, y)\, dv\, da\, dk,$$
$$_\theta u'_Q(k, y) := \int_{(\mathfrak{a}^G_L)^\theta} {}_\theta \Gamma^G_Q(X, -H_0(ky)) \omega(\exp X)\, dX.$$

を比較することにより、定数 $a^L_\theta(S, u) \in \mathbb{C}$, ($L \in \mathcal{L}_\theta$, $u \in \mathcal{U}_L(F)$ modulo $\mathrm{Ad}_\theta(L(F_S))$) があって

$$J_{\mathrm{unip}}(f_S) = \sum_{L \in \mathcal{L}_\theta} \sum_{u \in \mathcal{U}_L(F)/\mathrm{Ad}_\theta(L(F_S))} \frac{|(W^L)^\theta|}{|W^\theta|} a^L_\theta(S, u)_\theta J_M(u, f_S)$$

とできることを示した。これを (4.7) に適用して

$$J_{\mathfrak{o}}(f)=\iota_\theta^G(\sigma)^{-1}\int_{G_{\sigma,\theta}(F_S)\mathfrak{A}_G\backslash G(F_S)}\sum_{L\in\mathcal{L}_\theta^{G_{\sigma,\theta}}((M_1)_{\sigma,\theta})}\sum_{R\in\mathcal{F}_\theta^{G_{\sigma,\theta}}(L)}\frac{|(W^L)^\theta|}{|(W^{G_{\sigma,\theta}})^\theta|}$$
$$\times\sum_{u\in\mathcal{U}_L(F)/\mathrm{Ad}_\theta(L(F_S))}a_\theta^L(S,u)_\theta J_L^{M_R}(u,\Phi_{R,y,T_1-T_{1,\sigma}})\,dy$$

を得る。次に $L\in\mathcal{L}_\theta^{G_{\sigma,\theta}}((M_1)_{\sigma,\theta})$ についての和を

$$\mathcal{L}^0_{\sigma,\theta}(M_1):=\{M\in\mathcal{L}_\theta(M_1)\,|\,A_M^\theta=A_{M_{\sigma,\theta}}^\theta\}$$

についてのそれで置き換えれば、$|D_\theta(\sigma)|_S=1$ に注意して

$$J_{\mathfrak{o}}(f)=\iota_\theta^G(\sigma)^{-1}\sum_{M\in\mathcal{L}^0_{\sigma,\theta}(M_1)}\frac{|(W^{M_{\sigma,\theta}})^\theta|}{|(W^{G_{\sigma,\theta}})^\theta|}\sum_{u\in\mathcal{U}_{M_{\sigma,\theta}}(F)/\mathrm{Ad}_\theta(M_{\sigma,\theta}(F_S))}$$
$$a_\theta^{M_{\sigma,\theta}}(S,u)|D_\theta(\sigma)|_S\int_{G_{\sigma,\theta}(F_S)\backslash G(F_S)}\sum_{R\in\mathcal{F}_\theta^{G_{\sigma,\theta}}(M_{\sigma,\theta})}{}_\theta J^{M_R}_{M_{\sigma,\theta}}(u,\Phi_{R,y,T_1-T_{1,\sigma}})\,dy$$

補題 4.2 を適用して

$$=\iota_\theta^G(\sigma)^{-1}\sum_{M\in\mathcal{L}^0_{\sigma,\theta}(M_1)}\frac{|(W^{M_{\sigma,\theta}})^\theta|}{|(W^{G_{\sigma,\theta}})^\theta|}\sum_{u\in\mathcal{U}_{M_{\sigma,\theta}}(F)/\mathrm{Ad}_\theta(M_{\sigma,\theta}(F_S))}a_\theta^{M_{\sigma,\theta}}(S,u)_\theta J_M(\sigma u,f)\tag{4.8}$$

となる。

4.5. **細かい O 展開.** (4.8) を σ によらない形に書けば、[CLL] で言うところの **fine O-expansion** が得られる。

$\gamma,\gamma'\in M(F)$ が (M,S) **同値** とは $\delta\in M(F)$ があって

- $\gamma'_s=\mathrm{Ad}_\theta(\delta)\gamma_s$ かつ
- γ'_u と $\mathrm{Ad}_\theta(\delta)\gamma_u$ は $M(F_S)$ で θ 共役

なることとする。$\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}_\theta(G)$ に対して $\bar{\mathfrak{o}}\cap M(F)$ 内の (M,S) 同値類のなす有限集合を $(M(F)\cap\bar{\mathfrak{o}})_{M,S}$ と書く。θ 半単純な $\sigma\in M(F)$ が M で θ **楕円的** とは、$A_{M_{\sigma,\theta}}=A_M$ となること、言い換えれば $M\in\mathcal{L}^0_{\sigma,\theta}(M_1)$ となることだった。

$$\epsilon_\theta^M(\sigma):=\begin{cases}1 & \sigma\text{ が }M\text{ で }\theta\text{ 楕円的なとき}\\ 0 & \text{それ以外の時}\end{cases}$$

とし、

$$a_\theta^M(S,\gamma):=\frac{\epsilon_\theta^M(\gamma_s)}{\iota_\theta^M(\gamma_s)}\sum_{\substack{u\in\mathcal{U}_{M_{\gamma_s,\theta}}(F)/\mathrm{Ad}_\theta(M_{\gamma_s,\theta}(F_S))\\ \gamma_s\theta(u)\text{ は }\gamma\text{ に }(M,S)\text{ 同値}}}a_\theta^{M_{\gamma_s,\theta}}(S,u)$$

とおけば、(4.8) は

$$J_{\mathfrak{o}}(f)=\sum_{M\in\mathcal{L}_\theta(M_1)}\frac{|(W^{M_{\sigma,\theta}})^\theta|}{|(W^{G_{\sigma,\theta}})^\theta|}\frac{\iota_\theta^M(\sigma)}{\iota_\theta^G(\sigma)}\sum_{\substack{\gamma\in(M(F)\cap\bar{\mathfrak{o}})_{M,S}\\ \gamma_s=\sigma}}a_\theta^M(S,\gamma)_\theta J_M(\gamma,f)$$
$$=\sum_{M\in\mathcal{L}_\theta(M_1)}\frac{|(W^{M^{\sigma\theta}})^\theta|}{|(W^{G^{\sigma\theta}})^\theta|}\sum_{\substack{\gamma\in(M(F)\cap\bar{\mathfrak{o}})_{M,S}\\ \gamma_s=\sigma}}a_\theta^M(S,\gamma)_\theta J_M(\gamma,f)$$

$$(4.9)\qquad = \sum_{M\in\mathcal{L}_\theta(M_1)} \frac{|(W^M)^\theta|}{|W^\theta|}\cdot\frac{|W^\theta|\cdot|(W^{M^{\sigma\theta}})^\theta|}{|(W^M)^\theta|\cdot|(W^{G^{\sigma\theta}})^\theta|}\sum_{\substack{\gamma\in(M(F)\cap\bar{\mathfrak{o}})_{M,S}\\ \gamma_s=\sigma}} a_\theta^M(S,\gamma)_\theta J_M(\gamma,f)$$

となる。ここで $\{(M,\sigma)\,|\,M\in\mathcal{L}_\theta(M_1)\}$ 内の $(W^{G^{\sigma\theta}})^\theta$ 軌道は $\{(M,\mathfrak{o}_M)\,|\,M\in\mathcal{L}_\theta,\ \mathfrak{o}_M\in\mathfrak{O}_\theta(M)\text{ s.t. }\mathrm{Ad}_\theta(G(F))\mathfrak{o}_M=\mathfrak{o}\}$ 内の W^θ 軌道の代表系になっている。(M,σ) の $(W^{G^{\sigma\theta}})^\theta$ での固定化群は $(W^{M^{\sigma\theta}})^\theta$ で $(M,\mathfrak{o}_M)$ の W^θ でのそれは $(W^M)^\theta$ であるから、(4.9) は

$$J_{\mathfrak{o}}(f)=\sum_{M\in\mathcal{L}_\theta}\frac{|W^{M,\theta}|}{|W^\theta|}\sum_{\substack{\mathfrak{o}_M\in\mathfrak{O}_\theta(M)\\ \mathrm{Ad}_\theta(G(F))\mathfrak{o}_M=\mathfrak{o}}}\sum_{\substack{\gamma\in(M(F)\cap\bar{\mathfrak{o}})_{M,S}\\ \gamma_s\in\mathfrak{o}_M}} a_\theta^M(S,\gamma)_\theta J_M(\gamma,f)$$

$$(4.10)\qquad =\sum_{M\in\mathcal{L}_\theta}\frac{|W^{M,\theta}|}{|W^\theta|}\sum_{\gamma\in(M(F)\cap\bar{\mathfrak{o}})_{M,S}} a_\theta^M(S,\gamma)_\theta J_M(\gamma,f)$$

と読み替えられる。$\mathrm{supp}f\cap\mathrm{Ad}_\theta(G(F))\bar{\mathfrak{o}}\neq 0$ となる $\mathfrak{o}$ は有限個しかないことに注意すれば次を得る。

定理 4.3 ([A8] Th.9.2、細かい O 展開). $\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ での 1 のコンパクト近傍 Ω に対して素点の有限集合 S_Ω が取れて、任意の $S\supset S_\Omega$ 及び $\mathrm{supp}f\subset\Omega$ なる $f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)$ に対して

$$J(f)=\sum_{M\in\mathcal{L}_\theta}\frac{|W^{M,\theta}|}{|W^\theta|}\sum_{\gamma\in M(F)_{M,S}} a_\theta^M(S,\gamma)_\theta J_M(\gamma,f)$$

が成り立つ。

最後に $a^M(S,\gamma)$ の値については次が知られている。

定理 4.4 ([A8] Th.8.2). θ 半単純な $\gamma\in G(F)$ に対して S を十分大きく取ったとき、

$$a^G(S,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{meas}(G_{\gamma,\theta}(F)\mathfrak{A}_G\backslash G_{\gamma,\theta}(\mathbb{A}))}{\iota_\theta^G(\gamma)} & \gamma\text{ が }G\text{ で }\theta\text{ 楕円的なとき}\\ 0 & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

が成り立つ。

5. 細かい χ 展開

幾何サイドの各項は (十分正な $T\in\mathfrak{a}_0$ に対しては) $G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ 上の積分であったから、T によるカットオフの影響を計算することは容易であった。一方スペクトルサイドでのカットオフの操作は表現空間内の函数 (Eisenstein 級数) の足を切るものであるため、これを表現の情報に書き直すには T を無限大にとばすしかない。ところがこれでは跡公式が発散してしまうので、T を正の方向に大きくした際の漸近挙動を比較して目的を達成する。さて、twisted 跡公式は基本的に $G\rtimes\langle\theta\rangle$ という非連結群を考えるものだが、使えるスペクトル分解の結果は G に対してのものなので、この隔たりを埋めるためにかなりの組み合わせ論的な議論が必要になる。この煩雑さをさけるため、以下では θ,ω が自明なときに話を限ることにする。(文献に関しても θ のみが非自明な場合が [CLL, Chapt.12, 15] に概説されているだけである。)

5.1. 截頭された Eisenstein 級数の内積. $P = MU$ を標準放物型部分群とし、$\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}(G)$, $\pi \in \Pi(M(\mathbb{A})^1)$ を取る。$\mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\pi,\mathfrak{X}}$ (2.3.2) 上の線型変換 $\Omega^T_{\pi,\mathfrak{X}}(P,\lambda)$ を

$$\int_{\mathbf{K}}\int_{M(F)\mathfrak{A}_M\backslash M(\mathbb{A})}[\Omega^T_{\pi,\mathfrak{X}}(P,\lambda)\phi](mk)\overline{\phi'(mk)}\,dm\,dk = \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})}\wedge^T E(x,\phi_\lambda)\overline{\wedge^T E(x,\phi'_\lambda)}\,dx$$

が任意の $\phi,\ \phi' \in \mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\pi,\mathfrak{X}}$ に対して成り立つように定める。このとき定理 3.2 とその後の注意から、T が十分正な時には

$$J^T_{\mathfrak{X}}(f) = \sum_{P;\,\text{標準的}}\ \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)}\int_{i(\mathfrak{a}^G_M)^*}\frac{1}{|\mathcal{P}(M)|}\mathrm{tr}\big(\Omega^T_{\pi,\mathfrak{X}}(P,\lambda)I_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f)\big)\,d\lambda \tag{5.1}$$

が成り立つ。我々の目標はこの右辺を 定理 4.3 の類似の形にすることである。

そこでこの右辺の被積分函数を計算するために截頭された Eisenstein 級数の内積を計算する。$\phi \in \mathcal{A}^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$, $\phi' \in \mathcal{A}^2(U'(\mathbb{A})M'(F)\mathfrak{A}_{M'}\backslash G(\mathbb{A}))$ 及び $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_M$, $\lambda' \in i\mathfrak{a}^*_{M'}$ に対して、

$$\omega^T(\lambda,\lambda',\phi,\phi') := \sum_{Q=LV;\,\text{標準的}}\ \sum_{w\in W_{M,L}}\ \sum_{w'\in W_{M',L}} \mathrm{meas}(\mathfrak{a}^G_L/\mathbb{Z}[\Delta^\vee_L])$$
$$\times\frac{\langle M(w,\lambda)\phi_\lambda, M(w',\lambda')\phi'_{\lambda'}\rangle e^{(w(\lambda)-w'(\lambda'))(T)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_L}(w(\lambda)-w'(\lambda'))(\alpha^\vee)}$$

とおく。$\phi,\ \phi'$ がそれぞれカスプ形式の空間に属するならば、

$$\langle\wedge^T E(\phi_\lambda), \wedge^T E(\phi'_{\lambda'})\rangle = \omega^T(\lambda,\lambda',\phi,\phi')$$

である [L1, §9]。$\phi,\ \phi'$ がカスプ形式でない二乗可積分な保型形式の時にはこの式は正しくないが、しかし次が成り立つ。

定理 5.1 ([A4] Th.9.1). $\epsilon > 0$ と局所有界な函数 $\rho : i\mathfrak{a}^*_M \times i\mathfrak{a}^*_{M'} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ があって、任意の $\phi \in \mathcal{A}^2(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{X}}$, $\phi' \in \mathcal{A}^2(U'(\mathbb{A})M'(F)\mathfrak{A}_{M'}\backslash G(\mathbb{A}))^{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{X}}$ に対して、

$$|\langle\wedge^T E(\phi_\lambda), \wedge^T E(\phi'_{\lambda'})\rangle - \omega^T(\lambda,\lambda',\phi,\phi')| \leq \rho(\lambda,\lambda')\|\phi\|\cdot\|\phi'\|$$

が成り立つ。

5.2. Multiplier 定理とその応用. まず問題をはっきりさせておく。(5.1) の右辺の中で本質的に収束の問題を引き起こすのは $i(\mathfrak{a}^G_M)^*$ についての積分だけである。実際、$\mathbf{K}$ タイプ $\tau_1,\ \tau_2$ と $f \in C^\infty_c(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)$ に対して、

$$f_{\tau_1,\tau_2}(x) := \dim\tau_1\dim\tau_2\int_{\mathbf{K}}\int_{\mathbf{K}}\mathrm{tr}\tau_1(k_1)\cdot f(k_1^{-1}xk_2^{-1})\cdot\mathrm{tr}\tau_2(k_2)\,dk_1\,dk_2$$

とおけば、

$$J^T_{\mathfrak{X}}(f) = \sum_{\tau_1,\tau_2} J^T_{\mathfrak{X}}(f_{\tau_1,\tau_2})$$

が成り立つ。これから f は $\mathbf{K}$ 有限な函数たちのなす部分空間 $C^\infty_c(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)_{\mathbf{K}}$ に属するとしてよい。ある $\mathbf{K}$ タイプを含み cuspidal datum $\mathfrak{X}$ に属する二乗可積分な保型表現 π は有限個しかない [L2] ので、(5.1) の右辺の $\pi \in \Pi(M(\mathbb{A})^1)$ についての和は実際には有限和である。問題は、定理の $\rho(\lambda,\lambda')$ は 局所 有界でしかないから、これを根拠に (5.1) の $i(\mathfrak{a}^G_M)^*$ についての積分の被積分函数を $\omega^T(\lambda,\lambda',\phi,\phi')$ で書き換えることができない点にある。そこで次のような構成をする。

$G(F_\infty)$ を実 Lie 群と見なし、その Lie 環を $\mathfrak{g}_\infty$ と書く。$P_0(F_\infty)$ に含まれるその ($\mathbb{R}$ 上の) 極小放物型部分群 $P_\infty = M_\infty U_\infty$ を固定する。$Z(M_\infty)$ の $\mathbb{R}$ スプリット成分 $A_\infty \supset \mathfrak{A}_0$ の Lie 環 $\mathfrak{a}_\infty$ と $\mathbf{K}_\infty \cap M_\infty$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}_{\mathbf{K}_\infty}$ を使って、$\mathfrak{h} := i\mathfrak{h}_{\mathbf{K}_\infty} \oplus \mathfrak{a}_\infty$ とおく。こ

れは $\mathfrak{g}_\infty$ の Cartan 部分環である。$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ での Weyl 群を $W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ とし、$W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ 不変でコンパクト台を持つ $\mathfrak{h}$ 上の Schwartz 超函数の空間を $\mathcal{E}(\mathfrak{h})^{W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}$ と書こう。

命題 5.2 (Multiplier 定理、[A6] Th.4.2). 任意の $\gamma \in \mathcal{E}(\mathfrak{h})^{W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}$ と $f_\infty \in C_c^\infty(G(F_\infty))_{\mathbf{K}_\infty}$ に対して、$f_{\infty,\gamma} \in C_c^\infty(G(F_\infty))_{\mathbf{K}_\infty}$ があって

$$\pi_\infty(f_{\infty,\gamma}) = \widehat{\gamma}(\chi_{\pi_\infty})\pi_\infty(f_\infty), \quad \forall \pi_\infty \in \Pi(G(F_\infty))$$

が成り立つ。ここで $\widehat{\gamma}$ は γ の *Fourier-Laplace* 変換であり、$\chi_{\pi_\infty} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*/W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ は π_∞ の無限小指標を表す。

これを $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)_{\mathbf{K}}$ の無限成分に適用して次を得る。$\mathfrak{h} \overset{\exp}{\to} G(F_\infty) \hookrightarrow G(\mathbb{A}) \overset{H_G}{\to} \mathfrak{a}_G$ が考えられるが、この核を $\mathfrak{h}^G$ と書く。

系 5.3 ([A5] I, Prop.3.1). $\gamma \in \mathcal{E}(\mathfrak{h}^G)^{W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}$ に対して、$C_c^\infty(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)_{\mathbf{K}}$ 上の線型変換 $f \mapsto f_\gamma$ があって、

$$\pi(f_\gamma) = \widehat{\gamma}(\chi_{\pi_\infty})\pi(f), \quad \forall \pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))$$

が成り立つ。

さて、簡便のために (5.1) の被積分函数を

$$\Psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(\lambda, f) := \frac{1}{|\mathcal{P}(M)|}\mathrm{tr}(\Omega_{\pi,\mathfrak{X}}^T(P,\lambda)I_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda, f))$$

と書く。$T \in \mathfrak{a}_0$ に対して、$d_{P_0}(T) := \inf_{\alpha\in\Delta_0}\alpha(T)$ とおく。$f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)_{\mathbf{K}}$ によらない $C_0 > 0$ があって、$d_{P_0}(T) > C_0$ なる $T \in \mathfrak{a}_0$ に対しては

$$\begin{aligned}
J_{\mathfrak{X}}^T(f_\gamma) &= \sum_{P;\,\text{標準的}}\ \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \Psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(\lambda, f_\gamma)\,d\lambda \\
&= \sum_{P;\,\text{標準的}}\ \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \widehat{\gamma}(\chi_{\pi_\infty}+\lambda)\Psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(\lambda, f)\,d\lambda \\
&= \sum_{P;\,\text{標準的}}\ \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \Psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(\lambda, f)\int_{\mathfrak{h}^G}\gamma(X)e^{(\chi_{\pi_\infty}+\lambda)(X)}\,dX\,d\lambda \\
&= \int_{\mathfrak{h}^G}\sum_{P;\,\text{標準的}}\ \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(X, f)\gamma(X)e^{\chi_{\pi_\infty}(X)}\,dX
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $\chi_{\pi_\infty} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*/W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ はその $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ での代表元と同一視されており、$\psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(X, f)$ は $\Psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(\lambda, f)$ の Fourier 変換

$$\psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(X, f) := \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*}\Psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(\lambda, f)e^{\lambda(X)}\,d\lambda$$

である。特に $H \in \mathfrak{h}^G$ に対して $\gamma_H := |W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})|^{-1}\sum_{w\in W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}\delta_{w^{-1}(H)}$ (δ_X は X での Dirac 超函数) とおけば、$d_{P_0}(T)$ が十分大きいときには

$$J_{\mathfrak{X}}^T(f_{\gamma_H}) = \frac{1}{|W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})|}\sum_{w\in W(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}\ \sum_{P;\,\text{標準的}}\ \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(w^{-1}(H), f)e^{\chi_{\pi_\infty}(w^{-1}(H))}$$

となっている。そこで T については多項式、$H \in \mathfrak{h}^G$ については滑らかな函数である $J_{\mathfrak{X}}^T(f_{\gamma_H})$ を $p^T(H)$ と書く。明らかに、

$$J_{\mathfrak{X}}^T(f) = p^T(0)$$

である。

$d_{P_0}(T)$ が十分大きいとき、

$$p^T(H) = \frac{1}{|W(\mathfrak{h}_\mathbb{C})|} \sum_{w \in W(\mathfrak{h}_\mathbb{C})} \sum_{P;\text{標準的}} \sum_{\pi \in \Pi(M(\mathbb{A})^1)} \psi^T_{\mathfrak{X},\pi}(w^{-1}(H), f) e^{\mathrm{Im}\chi_{\pi_\infty}(w^{-1}(H))} e^{w(\mathrm{Re}\chi_{\pi_\infty})(H)}$$

であるから、一般に $p^T(H)$ は $H \in \mathfrak{h}^G$ について緩増加ではない。そこで、

$$\psi^T_\lambda(H) := \frac{1}{|W(\mathfrak{h}_\mathbb{C})|} \sum_{P;\text{標準的}} \sum_{\substack{(w,\pi) \in W(\mathfrak{h}_\mathbb{C}) \times \Pi(M(\mathbb{A})^1) \\ w(\mathrm{Re}\chi_{\pi_\infty}) = \lambda}} \psi^T_{\mathfrak{X},\pi}(w^{-1}(H), f) e^{\mathrm{Im}\chi_{\pi_\infty}(w^{-1}(H))}$$

とおく。f は $\mathbf{K}$ だったから、$\psi^T_\lambda(H) \neq 0$ となる $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ の集合 $\mathfrak{h}^*(f)$ は有限である。明らかに

$$p^T(H) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*(f)} \psi^T_\lambda(H) e^{\lambda(H)}$$

だからこれらの函数は $p^T(H)$ の "緩増加パート" になっている。

補題 5.4 ([A5] I, Prop.5.1).

$$p^T(H) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*(f)} p^T_\lambda(H) e^{\lambda(H)}$$

となる T の多項式の族 $\{p^T_\lambda(H)\}_{\lambda \in \mathfrak{h}^*(f)}$ で次を満たすものが唯一つある。すなわち、C, $\epsilon > 0$ があって、任意の $\mathfrak{h}^G$ 上の微分作用素 D に対して定数 $c_D > 0$ が取れ、

(1) $\lambda \in \mathfrak{h}^*(f)$, $H \in \mathfrak{h}^G$, 及び $d_{P_0}(T)$ が十分大きい $T \in \mathfrak{a}_0$ に対して

$$|D(\psi^T_\lambda(H) - p^T_\lambda(H))| \leq c_D e^{-\epsilon d_{P_0}(T)} (1 + \|T\|)^{d_0},$$

(2) $H \in \mathfrak{h}$, $T \in \mathfrak{a}_0$ に対して

$$|Dp^T_\lambda(H)| \leq c_D (1 + \|H\|)^{d_0} (1 + \|T\|)^{d_0}$$

が成り立つ。

こうして得られた $p^T_\lambda(H)$ たちは緩増加なので、勝手な Schwartz 函数 $\beta \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}^G)$ に対して

$$p^T_\lambda(\beta) := \int_{\mathfrak{h}^G} p^T_\lambda(H) \beta(H)\, dH$$

が考えられる。さらに補題から

(1) $\beta \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}^G)$ が

$$\int_{\mathfrak{h}^G} \beta(H)\, dH = 1$$

を満たすとき、$\beta_\epsilon(H) := \epsilon^{-\dim \mathfrak{h}^G} \beta(\epsilon^{-1} H)$ とおけば、$\lim_{\epsilon \to 0} p^T_\lambda(\beta_\epsilon) = p^T_\lambda(0)$.

(2) $\beta \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}^G)$ とする。$d_{P_0}(T) \to \infty$ のとき

$$\int_{\mathfrak{h}^G} \psi^T_\lambda(H) \beta(H)\, dH - p^T_\lambda(\beta) \to 0.$$

である。

5.3. 定理 5.1 の適用. さて、定理 5.1 を適用するには $i(\mathfrak{a}_M^G)^*$ についての積分をコンパクト部分集合上に制限する必要があった。そこで $B \in C_c^\infty(i(\mathfrak{h}^G)^*)$ を取る。標準放物型部分群 $P = MU$ に対して、$\mathfrak{h}^G \overset{\exp}{\to} M(\mathbb{A}) \overset{H_M}{\to} \mathfrak{a}_M^G$ の双対として、$i(\mathfrak{a}_M^G)^* \hookrightarrow i(\mathfrak{h}^G)^*$ が得られる。これにより B を $i(\mathfrak{a}_M^G)^*$ 上の函数と見たものを B_M と書く。(5.1) の代わりに

$$\sum_{P;\text{標準的}} \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \Psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(\lambda, f) B_M(\lambda)\, d\lambda$$

に定理 5.1 を適用しよう。

$\beta \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}^G)$ を

$$B(\lambda) = \int_{\mathfrak{h}^G} \beta(H) e^{\lambda(H)}\, d\lambda$$

となるものとして、

$$P^T(B) := \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*(f)} p_\lambda^T(\beta)$$

とおく。このとき上の (1), (2) からそれぞれ

(1) $B(0) = 1$ なら $B_\epsilon(\lambda) := B(\epsilon\lambda)$ として、$\lim_{\epsilon\to 0} P^T(B_\epsilon) = J_{\mathfrak{X}}^T(f)$.

(2) $P^T(B)$ は $d_{P_0}(T) \to \infty$ のときに

$$\sum_{P;\text{標準的}} \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \Psi_{\mathfrak{X},\pi}^T(\lambda, f) B_M(\lambda)\, d\lambda - P^T(B)$$

が 0 に行くような唯一つの T の多項式函数である。

がわかる。

さて、標準放物型部分群 $P = MU$ を固定し、$\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}(G)$, $\pi \in \Pi(M(\mathbb{A})^1)$ に対して $\mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\pi,\mathfrak{X}}$ からそれ自身への作用素

$$A_{P,\pi,\mathfrak{X}}(\lambda, \lambda') := \sum_{Q;\text{標準的}} \sum_{w, w'\in W_{M,L}} \frac{e^{(w'(\lambda')-w(\lambda))(T)}}{\theta_Q^G(w'(\lambda') - w(\lambda))} M(w, \lambda)^{-1} M(w', \lambda')$$

を考える。$\phi, \phi' \in \mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\pi,\mathfrak{X}}$ のとき、虚軸上では intertwining 作用素はユニタリなので

$$\begin{aligned}\langle A_{P,\pi,\mathfrak{X}}(\lambda, \lambda')\phi', \phi\rangle &= \sum_{Q;\text{標準的}} \sum_{w, w'\in W_{M,L}} \frac{\langle M(w', \lambda')\phi', M(w, \lambda)\phi\rangle e^{(w'(\lambda')-w(\lambda))(T)}}{\theta_Q^G(w'(\lambda') - w(\lambda))} \\ &= \omega^T(\lambda', \lambda, \phi', \phi)\end{aligned}$$

である。この最後の函数は $\lambda, \lambda' \in i(\mathfrak{a}_M^G)^*$ で正則であった [A4, Cor.9.2] から、

$$\omega_{\mathfrak{X},\pi}^T(P, \lambda) := A_{P,\pi,\mathfrak{X}}(\lambda, \lambda)$$

は定義可能である。このとき、上の (2) と定理 5.1 から、$P^T(B)$ は $d_{P_0}(T) \to \infty$ のとき

$$\sum_{P;\text{標準的}} \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \frac{1}{|\mathcal{P}(M)|} \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} \mathrm{tr}[\omega_{\mathfrak{X},\pi}^T(P, \lambda)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda, f)] B_M(\lambda)\, d\lambda - P^T(B)$$

が 0 に行くような唯一の多項式である。あとはこれを使って $P^T(B)$ を計算し、それに上の (1) を使って $J_{\mathfrak{X}}(f)$ の明示公式を引き出すわけである。

5.4. (G,M) **族の応用.** $A_{P,\pi,\mathfrak{X}}(\lambda,\lambda')$ を $\lambda=\lambda'$ に制限したものを具体的に記述するには (G,M) 族 (4.4 を参照) を使う。そのために intertwining 作用素の定義を少し拡張しておく。以下では極小 Levi 部分群 M_0 のみを固定し、P_0 は特定しない。$\mathcal{L}=\mathcal{L}(M_0)$, $\mathcal{F}=\mathcal{F}(M_0)$ が定まる。

M, $M'\in\mathcal{L}$ を固定する。$P\in\mathcal{P}(M)$, $P'\in\mathcal{P}(M')$ 及び $w\in W_{M,M'}$ に対して $M_{P'|P}(w,\lambda):\mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\pi,\mathfrak{X}}\to\mathcal{A}(U'(\mathbb{A})M'(F)\mathfrak{A}_{M'}\backslash G(\mathbb{A}))_{w(\pi),\mathfrak{X}}$ を

$$[M_{P'|P}(w,\lambda)\phi](x)=\int_{(U'\cap w(U))(\mathbb{A})\backslash U'(\mathbb{A})}\phi(w^{-1}ux)e^{\langle\lambda+\rho_P,H_P(w^{-1}ux)\rangle}\,du\cdot e^{\langle-(w(\lambda)+\rho_{P'}),H_{P'}(x)\rangle}$$

で定める。$T_1\in\mathfrak{a}_0$ の定義 4.1 から

$$H_P(w^{-1}x)=w^{-1}H_{w(P)}(x)+(T_1-w^{-1}(T_1))_M$$

が成り立つことに注意すれば、積分変数の変換により

$$\begin{aligned}[v\circ M_{P'|P}(w,\lambda)\phi](x)&=\int_{(v(U')\cap vw(U))(\mathbb{A})\backslash v(U')(\mathbb{A})}\phi(w^{-1}v^{-1}ux)e^{\langle\lambda+\rho_P,H_P(w^{-1}v^{-1}ux)\rangle}\,du\\ &\qquad\times e^{\langle-(w(\lambda)+\rho_{P'}),v^{-1}H_{v(P')}(x)+T_1-v^{-1}(T_1)\rangle}\\ &=e^{-\langle(w(\lambda)+\rho_{P'}),T_1-v^{-1}(T_1)\rangle}[M_{v(P')|P}(vw,\lambda)\phi](x)\end{aligned}\tag{5.2}$$

が得られる。

$$M_{P'|P}(w,\lambda)\circ v^{-1}=e^{\langle\lambda+\rho_P,T_1-v^{-1}(T_1)\rangle}M_{P'|v(P)}(wv^{-1},v(\lambda))\tag{5.3}$$

も同様である。P, $P'\in\mathcal{F}$ であったから、標準放物型部分群 P_1, P_1' と v_1, $v_1'\in W$ が取れて $P=v_1(P_1)$, $P'=v_1'(P_1')$ と書ける。v_1, v_1' を各々剰余類 $v_1W^{M_1}$, $v_1'W^{M_1'}$ の中で長さ最小に取っておけばこれらのデータは一意に定まる。このとき $W_{M,M'}=v_1'W_{M_1,M_1'}v_1^{-1}$ ゆえ $w=v_1'w_1v_1^{-1}$, $\exists w_1\in W_{M_1,M_1'}$ であり、これと (5.2), (5.3) を組み合わせれば

$$\begin{aligned}M_{P'|P}(w,\lambda)&=M_{v_1'(P_1')|v_1(P_1)}(v_1'w_1v_1^{-1},\lambda)\\ &=e^{\langle w_1v_1^{-1}(\lambda)+\rho_{P_1'},T_1-v_1'^{-1}(T_1)\rangle}e^{-\langle v_1^{-1}(\lambda)+\rho_{P_1},T_1-v_1^{-1}(T_1)\rangle}v_1'\circ M_{P_1'|P_1}(w_1,v_1^{-1}(\lambda))\circ v_1^{-1}\end{aligned}\tag{5.4}$$

がわかる。これにより 2.3.3 で定義した $M(w,\pi_\lambda)=M_{P_w|P}(w,\lambda)$ の性質がこの intertwining 作用素に対しても成り立つ。ここで P_w は $M_w:=w(M)$ を Levi 成分に持つ標準放物型部分群を表す。特に $M_{P'|P}(w,\lambda)$ は λ の実部がある錐体に入っているとき絶対収束し、λ の函数として $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ 上の有理型函数に解析接続される。それが整型であるような λ では intertwining 作用素 $\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda)\to\mathcal{I}_{P',\mathfrak{X}}(w(\pi)_{w(\lambda)})$ を定めており、函数等式

$$E_{P'}(x,M_{P'|P}(w,\lambda)\phi_\lambda)=E_P(x,\phi_\lambda),\tag{5.5}$$

$$M_{P''|P'}(w',w(\lambda))M_{P'|P}(w,\lambda)=M_{P''|P}(w'w,\lambda),\quad P''\in\mathcal{P}(M''),\ w'\in W_{M',M''},\tag{5.6}$$

を満たす。

これらを使って $A_{P,\pi,\mathfrak{X}}(\lambda,\lambda')$ を

$$\begin{aligned}A_{P,\pi,\mathfrak{X}}(\lambda,\lambda')&=\sum_{P_1\supset P_0}\sum_{w,w'\in W_{M,M_1}}\frac{e^{(w'(\lambda')-w(\lambda))(T)}}{\theta_{P_1}^G(w'(\lambda')-w(\lambda))}M_{P_1|P}(w,\lambda)^{-1}M_{P_1|P}(w',\lambda')\\ &=\sum_{P_1\supset P_0}\sum_{\substack{v\in W_{M,M_1}\\ w\in W_{M,M}}}\frac{e^{v(w(\lambda')-\lambda)(T)}}{\theta_{P_1}^G(v(w(\lambda')-\lambda))}M_{P_1|P}(v,\lambda)^{-1}M_{P_1|P}(vw,\lambda)\end{aligned}$$

函数等式 (5.6), (5.2), (5.3) を使って

$$= \sum_{P_1 \supset P_0} \sum_{\substack{v \in W_{M,M_1} \\ w \in W_{M,M}}} \frac{e^{v(w(\lambda')-\lambda)(T)} e^{(w(\lambda')-\lambda)(T_1 - v^{-1}(T_1))}}{\theta^G_{v^{-1}(P_1)}(w(\lambda') - \lambda)} M_{v^{-1}(P_1)|P}(1,\lambda)^{-1} M_{v^{-1}(P_1)|P}(w,\lambda')$$

P_1 と v についての和をまとめて

$$= \sum_{P_v;\, v \in W_M(G)} \sum_{w \in W_{M,M}} \frac{e^{\langle w(\lambda')-\lambda, T_1 + v^{-1}(T-T_1)\rangle}}{\theta^G_{v^{-1}(P_v)}(w(\lambda') - \lambda)} M_{v^{-1}(P_v)|P}(1,\lambda)^{-1} M_{v^{-1}(P_v)|P}(w,\lambda')$$

$Q := v^{-1}(P_v) \in \mathcal{P}(M)$ として

$$= \sum_{Q \in \mathcal{P}(M)} \sum_{w \in W_{M,M}} \frac{e^{\langle w(\lambda')-\lambda, Y_Q(T)\rangle}}{\theta^G_Q(w(\lambda') - \lambda)} M_{Q|P}(1,\lambda)^{-1} M_{Q|P}(w,\lambda')$$

と書き変える。ただし $Q = v^{-1}(P_v)$ に対して $Y_Q(T) := T_1 + v^{-1}(T - T_1)$ とした。$\mathrm{tr}[\omega^T_{\mathfrak{X},\pi}(P,\lambda)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda, f)]$ は

$$\sum_{w \in W_{M,M}} \sum_{Q \in \mathcal{P}(M)} \frac{e^{(w(\lambda')-\lambda)(Y_Q(T))}}{\theta^G_Q(w(\lambda') - \lambda)} \mathrm{tr}(M_{Q|P}(1,\lambda)^{-1} M_{Q|P}(w,\lambda')\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda, f)) \tag{5.7}$$

の $\lambda = \lambda'$ での値である。ここで $w(\lambda') - \lambda = \Lambda$ とおけば

$$c_Q(T,\Lambda) := e^{\Lambda(Y_Q(T))}, \quad d_Q(\Lambda) := \mathrm{tr}[M_{Q|P}(1,\lambda)^{-1} M_{Q|P}(w,\lambda')\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda, f)]$$

は共に (G, M) 族になることがわかるので 補題 4.1 から、(5.7) は全ての λ, $\lambda' \in i\mathfrak{a}^*_M$ で滑らかな函数になっており

$$\mathrm{tr}[\omega^T_{\mathfrak{X},\pi}(P,\lambda)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda, f)] = \sum_{w \in W_{M,M}} \sum_{P_1 \in \mathcal{F}(M)} c^{P_1}_M(T, w(\lambda) - \lambda) d'_{P_1}(\lambda_{L_w}, w(\lambda) - \lambda)$$

である。ここで $L_w \in \mathcal{L}$ は $\mathfrak{a}_{L_w} := \{H \in \mathfrak{a}_M \,|\, w(H) = H\}$ なるものであり、

$$d_Q(\lambda_{L_w}, \Lambda) = \mathrm{tr}(M_{Q|P}(1,\lambda)^{-1} M_{Q|P}(w, \lambda + \zeta)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda, f)), \quad \Lambda = w(\lambda) - \lambda + \zeta,\ \zeta \in i\mathfrak{a}^*_{L_w}$$

と書いた。

5.5. **$P^T(B)$, $J_{\mathfrak{X}}(f)$ の計算.** さて、いよいよ $P^T(B)$ そして $J_{\mathfrak{X}}(f)$ の明示公式を求める。上から $P^T(B)$ は $d_{P_0}(T) \to \infty$ のとき

$$\sum_{P;\,\text{標準的}} \sum_{\pi \in \Pi(M(\mathbb{A})^1)} \frac{1}{|\mathcal{P}(M)|} \sum_{w \in W_{M,M}} \int_{i(\mathfrak{a}^G_M)^*} \sum_{P_1 \in \mathcal{F}(M)} c^{P_1}_M(T, w(\lambda) - \lambda) d'_{P_1}(\lambda_{L_w}, w(\lambda) - \lambda) B_M(\lambda)\, d\lambda$$

に漸近的であった。この中の積分は

$$\int_{i(\mathfrak{a}^{L_w}_M)^*} \int_{i(\mathfrak{a}^G_{L_w})^*} \sum_{P_1 \in \mathcal{F}(M)} c^{P_1}_M(T, (w-1)\lambda^{L_w}) d'_{P_1}(\lambda_{L_w}, (w-1)\lambda^{L_w}) B_M(\lambda^{L_w} + \lambda_{L_w})\, d\lambda_{L_w}\, d\lambda^{L_w}$$

$$= \frac{1}{|\det(w - 1|\mathfrak{a}^{L_w}_M)|} \sum_{P_1 \in \mathcal{F}(M)} \int_{i(\mathfrak{a}^{L_w}_M)^*} \int_{i(\mathfrak{a}^G_{L_w})^*} c^{P_1}_M(T, \mu) d'_{P_1}(\lambda, \mu) B_M((w-1)^{-1}(\mu) + \lambda)\, d\lambda\, d\mu$$

ここで $\{Y_Q(T) \,|\, Q \in \mathcal{P}^{P_1}(M)\}$ の凸包の特性函数を $\chi^{P_1}_M(T)$ と書けば、実は [A5, II, (3.1)]

$$c^{P_1}_M(T, \mu) = \int_{(Y_Q(T))_{M_1} + \mathfrak{a}^{M_1}_M} \chi^{P_1}_M(T, X) e^{\mu(X)}\, dX$$

であるから、これは

$$
(5.8)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{|\det(w-1|\mathfrak{a}_M^{L_w})|}\sum_{P_1\in\mathcal{F}(M)}\int_{(Y_Q(T))_{M_1}+\mathfrak{a}_M^{M_1}}\chi_M^{P_1}(T,H)\\ &\int_{i(\mathfrak{a}_M^{L_w})^*}\int_{i(\mathfrak{a}_{L_w}^G)^*}e^{\mu(H)}d'_{P_1}(\lambda,\mu)B_M((w-1)^{-1}(\mu)+\lambda)\,d\lambda\,d\mu\,dH\end{aligned}
$$

となる。これの $d_{P_0}(T)\to\infty$ の時の漸近挙動を調べる。そのために $d_{P_0}(T)\geq\delta\|T\|$ が成り立つとして、$\|T\|\to\infty$ とする。$P_1\in\mathcal{F}(M)$ を止めて 3 重積分を考察する。

$P_1\not\supset L_w$ とすると、各 $Q\in\mathcal{P}^{P_1}(M)$ に対して $\alpha\in\Sigma_Q$ で $\alpha|_{\mathfrak{a}_{L_w}}=0$ となるものがある。すると $\chi_M^{P_1}(H)\neq 0$ となる $H\in\mathfrak{a}_M$ に対しては

$$
\alpha(H)\geq\alpha(Y_Q(T))\geq d_{P_0}(T)-C_0\geq\delta\|T\|-C_0
$$

が成り立つ。ところが α の取り方により $\alpha(H)\leq C\|H^{L_w}\|$ であるから、$\|T\|\leq C(1+\|H^{L_w}\|)$ が得られる。すなわち任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して 3 重積分は

$$
\begin{aligned}&\sup\left\{(C(1+\|H^{L_w}\|))^n\left|\int_{i(\mathfrak{a}_M^{L_w})^*}\int_{i(\mathfrak{a}_{L_w}^G)^*}e^{\mu(H)}d'_{P_1}(\lambda,\mu)B_M((w-1)^{-1}(\mu)+\lambda)\,d\lambda\,d\mu\right|\right\}\\ &\qquad\times\|T\|^{-n}\int_{(Y_Q(T))_{M_1}+\mathfrak{a}_M^{M_1}}\chi_M^{P_1}(T,H)\,dH\end{aligned}
$$

で抑えられる。ここで 1 行目の積分は H の急減少函数ゆえ 1 行目は有界。2 行目の積分は明らかに T の多項式函数ゆえこの項は $T\to\infty$ で 0 に行く。

次に $P_1\supset L_w$ とする。3 重積分の部分は

$$
\begin{aligned}&\int_{(Y_Q(T))_{M_1}+\mathfrak{a}_{L_w}^{M_1}}\int_{\mathfrak{a}_M^{L_w}}\chi_M^{P_1}(T,H+U)\\ &\times\left(\int_{i(\mathfrak{a}_M^{L_w})^*}\int_{i(\mathfrak{a}_{L_w}^G)^*}e^{\mu(U)}d'_{P_1}(\lambda,\mu)B_M((w-1)^{-1}(\mu)+\lambda)\,d\lambda\,d\mu\right)dU\,dH\end{aligned}
$$

となる。先ほどと類似の議論により、これは

$$
(5.9)\quad \begin{aligned}&\int_{(Y_Q(T))_{M_1}+\mathfrak{a}_{L_w}^{M_1}}\chi_{L_w}^{P_1}(T,H)\,dH\\ &\times\int_{\mathfrak{a}_M^{L_w}}\int_{i(\mathfrak{a}_M^{L_w})^*}\int_{i(\mathfrak{a}_{L_w}^G)^*}e^{\mu(U)}d'_{P_1}(\lambda,\mu)B_M((w-1)^{-1}(\mu)+\lambda)\,d\lambda\,d\mu\,dU\end{aligned}
$$

に漸近的であることがわかる。$c_{L_w}^{P_1}(T)$ が $\chi_{L_w}^{P_1}(T)$ の Fourier 変換であったことから、1 行目は $c_{L_w}^{P_1}(T,0)$ になる。2 行目の外側の二つの積分についても Fourier 逆公式を適用すれば (5.9) は

$$
c_{L_w}^{P_1}(T,0)\int_{i(\mathfrak{a}_{L_w}^G)^*}d'_{P_1}(\lambda,0)B_M(\lambda)\,d\lambda
$$

となる。

結局我々は $d_{P_0}(T)\to\infty$ のとき $P^T(B)$ は

$$
\sum_{P;\,\text{標準的}}\sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)}\frac{1}{|\mathcal{P}(M)|}\sum_{w\in W_{M,M}}\frac{1}{|\det(w-1|\mathfrak{a}_M^{L_w})|}\int_{i(\mathfrak{a}_{L_w}^G)^*}\sum_{P_1\in\mathcal{F}(L_w)}c_{L_w}^{P_1}(T,0)d'_{P_1}(\lambda,0)B_M(\lambda)\,d\lambda
$$

に漸近的であることを知った。次に

$$\sum_{P_1\in\mathcal{F}(L_w)} c_{L_w}^{P_1}(T,0)d'_{P_1}(\lambda,0) = \sum_{Q\in\mathcal{P}(L_w)} \frac{c_Q(T,\Lambda)d_Q(\lambda,\Lambda)}{\theta_Q^G(\Lambda)}\bigg|_{\Lambda=0} \tag{5.10}$$

を計算する。今 $\lambda, \Lambda \in i\mathfrak{a}_{L_w}^*$, $w \in W_{M,M}$ であることと、定義から

$$\begin{aligned} d_Q(\lambda,\Lambda) &= \mathrm{tr}(M_{Q|P}(1,\lambda)^{-1}M_{Q|P}(w,\lambda+\Lambda)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f)) \\ &= \mathrm{tr}[\big(M_{Q|P}(1,\lambda)^{-1}M_{Q|P}(1,\lambda+\Lambda)\big)\circ\big(M_{P|P}(w,\lambda+\Lambda)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f)\big)] \end{aligned}$$

である。2行目の最初の括弧内

$$\mathcal{M}_Q(P,\lambda,\Lambda) := M_{Q|P}(1,\lambda)^{-1}M_{Q|P}(1,\lambda+\Lambda), \quad Q\in\mathcal{P}(M)$$

は $\Lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ の函数として (G,M) 族になっており、従って

$$\mathcal{M}_Q^T(P,\lambda,\Lambda) := c_Q(T,\Lambda)\mathcal{M}_Q(P,\lambda,\Lambda), \quad Q\in\mathcal{P}(M)$$

も同様である。よって (5.10) の 0 への特殊化を

$$\mathrm{tr}[\Big(\sum_{Q\in\mathcal{P}(L)} \frac{1}{\theta_Q^G(\Lambda)}\mathcal{M}_Q^T(P,\lambda,\Lambda)\Big|_{\Lambda=0}\Big)M_{P|P}(w,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f)]$$

と内側に入れられる。但し $\Lambda+\lambda\in i\mathfrak{a}_L^*$ により $M_{P|P}(w,\Lambda+\lambda) = M_{P|P}(w,0)$ であることを使った。補題 4.1 により括弧内を $\mathcal{M}_L^T(P,\lambda,0)$ と書くのであったから、次が得られた。

$$\begin{aligned} P^T(B) = &\sum_{P\in\mathcal{F};\,P\supset P_0}\ \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)}\ \sum_{L\in\mathcal{L}(M)}\ \sum_{w\in W_{M,M}^{L,\mathrm{reg}}} \frac{1}{|\mathcal{P}(M)|}\frac{1}{|\det(w-1|\mathfrak{a}_M^L)|} \\ &\int_{i(\mathfrak{a}_L^G)^*} \mathrm{tr}(\mathcal{M}_L^T(P,\lambda,0)M_{P|P}(w,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f))B_M(\lambda)\,d\lambda. \end{aligned} \tag{5.11}$$

ここで $W_{M,M}^{L,\mathrm{reg}} = \{w\in W_{M,M}^L \mid \det(w-1|\mathfrak{a}_M^L)\neq 0\}$ である。

$\mathcal{M}_L^T(P,\lambda,0)$ の定義に $T=T_1$ を代入すれば、$Y_Q(T_1)=T_1$ $(\forall Q\in\mathcal{P}(L))$ より

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_L^{T_1}(P,\lambda,0) &= \sum_{Q\in\mathcal{P}(L)} e^{\Lambda(T_1)}\frac{\mathcal{M}_Q(P,\lambda,\Lambda)}{\theta_Q^G(\Lambda)}\bigg|_{\Lambda=0} = e^{\Lambda(T_1)}\mathcal{M}_L(P,\lambda,\Lambda)|_{\Lambda=0} \\ &= \mathcal{M}_L(P,\lambda,0) \end{aligned}$$

である。よって (5.11) と 5.3 (1) から $J_{\mathfrak{X}}(f)$ は

$$\begin{aligned} &\sum_{P\in\mathcal{F};\,P\supset P_0}\ \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)}\ \sum_{L\in\mathcal{L}(M)}\ \sum_{w\in W_{M,M}^{L,\mathrm{reg}}} \frac{1}{|\mathcal{P}(M)|}\frac{1}{|\det(w-1|\mathfrak{a}_M^L)|} \\ &\qquad\int_{i(\mathfrak{a}_L^G)^*} \mathrm{tr}(\mathcal{M}_L(P,\lambda,0)M_{P|P}(w,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f))(B_\epsilon)_M(\lambda)\,d\lambda \\ &= \frac{1}{|W|}\sum_{P_0\in\mathcal{P}(M_0)}\ \sum_{P\in\mathcal{F};\,P\supset P_0}\ \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)}\ \sum_{L\in\mathcal{L}(M)}\ \sum_{w\in W_{M,M}^{L,\mathrm{reg}}} \frac{1}{|\mathcal{P}(M)|}\frac{1}{|\det(w-1|\mathfrak{a}_M^L)|} \\ &\qquad\int_{i(\mathfrak{a}_L^G)^*} \mathrm{tr}(\mathcal{M}_L(P,\lambda,0)M_{P|P}(w,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f))(B_\epsilon)_M(\lambda)\,d\lambda \end{aligned}$$

和の中は P_0 によらないので

$$= \sum_{P\in\mathcal{F}} \frac{|W^M|}{|W|} \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} \sum_{w\in W_{M,M}^{L,\mathrm{reg}}} \frac{1}{|\mathcal{P}(M)|} \frac{1}{|\det(w-1|\mathfrak{a}_M^L)|}$$

$$\int_{i(\mathfrak{a}_L^G)^*} \mathrm{tr}(\mathcal{M}_L(P,\lambda,0)M_{P|P}(w,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f))(B_\epsilon)_M(\lambda)\,d\lambda$$

の $\epsilon\to 0$ での極限である。結局 $B\in C_c^\infty(i(\mathfrak{h}^G)^*)$ を $B(0)=1$ なるものとして

(5.12)

$$J_{\mathfrak{X}}(f) = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)} \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \sum_{w\in W_{M,M}^{L,\mathrm{reg}}} \frac{|W^M|}{|W|} \frac{1}{|\det(w-1|\mathfrak{a}_M^L)|}$$

$$\int_{i(\mathfrak{a}_L^G)^*} \frac{1}{|\mathcal{P}(M)|} \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} \mathrm{tr}(\mathcal{M}_L(P,\lambda,0)M_{P|P}(w,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f))(B_\epsilon)_M(\lambda)\,d\lambda.$$

が得られた。

5.6. **Intertwining 作用素の正規化.** (5.12) から B_ϵ を取り除いて完全な記述を得るには、よい性質を持つ intertwining 作用素の正規化が必要である。これは各素点での局所的な正規化から構成される。

$M\in\mathcal{L}(M_0)$ とし、$\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)$ をとる。これは各素点 v での $G(F_v)$ の既約許容表現 (v が無限素点なら既約 $(\mathfrak{g}_{v,\mathbb{C}},\mathbf{K}_v)$-加群) の制限テンソル積 $\bigotimes_v{}'\pi_v$ であった。適当な滑らかさを持ち、

$$\phi(umg)=\pi_v(m)\phi(g),\quad u\in U(F_v),\, m\in M(F_v),\, g\in G(F_v)$$

を満たす $G(F_v)$ 上の函数たちの空間 $\mathcal{V}_P(\pi_v)$ の上に放物型誘導表現

$$[\mathcal{I}_P(\pi_{v,\lambda},g)\phi](x) := \phi(xg)e^{\langle\lambda+\rho_P,H_P(xg)\rangle}e^{-\langle\lambda+\rho_P,H_P(x)\rangle},\quad g\in G(F_v),\,\phi\in\mathcal{V}_P(\pi_v)$$

が実現される ($\lambda\in\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$)。大域的な場合と同様にして、$P,Q\in\mathcal{F}$ 及び $w\in W_{M,L}$ に対して intertwining 作用素 $M_{Q|P}(w,\pi_{v,\lambda})$ を

$$[M_{Q|P}(w,\pi_{v,\lambda})\phi](x) = \int_{(V\cap w(U))(F_v)\backslash V(F_v)} \phi(w^{-1}ux)e^{\langle\lambda+\rho_P,H_P(w^{-1}ux)\rangle}\,du\cdot e^{\langle-(w(\lambda)+\rho_Q),H_Q(x)\rangle}$$

で定義する。これは $\mathrm{Re}(\lambda)$ がある開錐体に入っているとき絶対収束し、全 $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ に有理型に解析接続される。更に (5.4) の記号で $w\in W_{M,M'}$, $w'\in W_{M',M''}$ を $w=v_1'w_1v_1^{-1}$, $w'=v_1''w_1'v_1'^{-1}$ と書いたとき、$w_1'w_1$ **の長さが** w_1' **と** w_1 **の長さの和であれば** 函数等式

$$M_{P''|P'}(w',w(\pi_{v,\lambda}))M_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda}) = M_{P''|P}(w'w,\pi_{v,\lambda})$$

が成り立つ。これらは (5.4) の局所類似により、無限素点の場合は [KnS]、有限素点の場合は [Sha] の結果から簡単に引き出せる。

$M_{Q|P}(w,\pi_{v,\lambda})$ の正規化因子は $\pi_{v,\lambda}$ に付随する保型 L 因子を用いて定義される。そのために G 及びその放物型部分群の L 群を導入する。各素点 v で G を係数拡大して得られる簡約群 $G_v:=G\otimes_F F_v$ の L 群 を ${}^LG_v=\widehat{G}\rtimes_{\rho_{G_v}}W_{F_v}$ と書く。ここで $\widehat{G}$ は G と双対なルートデータ (donnée radicielle) を持つ $\mathbb{C}$ 連結簡約群であり、W_{F_v} は F_v の **Weil 群**である [Ta]。反直積 ${}^LG_v$ を決める W_{F_v} の作用 ρ_{G_v} を定めるには G 及び $\widehat{G}$ の **splitting** $\mathbf{spl}_G=(\mathbf{B},\mathbf{T},\{X_\alpha\})$, $\mathbf{spl}_{\widehat{G}}=(\mathcal{B},\mathcal{T},\{\mathcal{X}_{\alpha^\vee}\})$ を固定する。ここで $\mathbf{B}$, $\mathbf{T}$ は G の Borel 部分群とその中の極大トーラスの組 (Borel 対) であり、$\{X_\alpha\}$ は $\mathbf{B}$ での $\mathbf{T}$ の単純ルートに

対するルートベクトルの集合である。各 $\bar{\epsilon} \in \mathrm{Out}(\widehat{G})$ に対して $\mathbf{spl}_{\widehat{G}}$ を保つ $\epsilon \in \mathrm{Aut}(\widehat{G})$ でその $\mathrm{Out}(\widehat{G})$ での像が $\bar{\epsilon}$ であるものが唯一つある。すなわち $\mathbf{spl}_{\widehat{G}}$ は

$$1 \longrightarrow \mathrm{Int}(\widehat{G}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\widehat{G}) \longrightarrow \mathrm{Out}(\widehat{G}) \longrightarrow 1$$

の分裂を与えており、これによって $\widehat{G}$ のルートデータの自己同型群と $\mathrm{Out}(\widehat{G})$ が同一視される。G についても同様である。作用 $\rho'_{G_v} : \mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \to \mathrm{Aut}(\widehat{G})$ を G_v のルートデータへの $\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ の作用の双対 $\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \to \mathrm{Out}(\widehat{G})$ を上の分裂で持ち上げたものとする。Weil 群の定義から $W_{F_v} \to \mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ があるが、ρ_{G_v} をこれと ρ'_{G_v} の合成と定義する。

$\mathbf{B}, \mathbf{T}$ は各々 P_0, M_0 に含まれるとしてよい。標準放物型部分群 $P = MU$ に対して $\widehat{G}$ の放物型部分群 $\widehat{P} = \widehat{M}\widehat{U}$ で $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{U}$ を含み、$\mathcal{T}$ の $\widehat{M}$ でのルートの集合 $\Sigma(\widehat{M}, \mathcal{T})$ が $\Sigma(M, \mathbf{T})$ に対するコルートの集合になっているものが唯一つある。構成からこれは $\rho_{G_v}(W_{F_v})$ で保たれており、${}^L P = \widehat{P} \rtimes_{\rho_{G_v}} W_{F_v}$ は P の L 群と同一視される。

5.6.1. 無限素点の場合. 結果を見やすくするためにまず v が無限素点の時を考える。$W_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^\times$、$W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^\times \coprod \tau\mathbb{C}^\times$, $\tau^2 = -1$, $\mathrm{Int}(\tau)(z) = \bar{z}$, $(z \in \mathbb{C}^\times)$ である。$G(F_v)$ の **Langlands パラメタ** とは準同型 $\varphi : W_{F_v} \to {}^L G$ であって、

(1) $\varphi(w)$ $(w \in W_{F_v})$ は半単純。
(2) $\varphi|_{\mathbb{C}^\times}$ は解析的。
(3) 合成 $W_{F_v} \xrightarrow{\varphi} {}^L G \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} W_{F_v}$ は恒等写像。

を満たすものとする。二つのパラメタが **同値** とはそれらが $\widehat{G}$ 共役なこととする。[L5] によれば、既約 $(\mathfrak{g}_{v,\mathbb{C}}, \mathbf{K}_v)$ 加群の同型類の集合 $\Pi_{\mathrm{adm}}(G(F_v))$ は $G(F_v)$ の Langlands パラメタの同値類の集合 $\Phi(G_v)$ を添え字集合とする分解

$$\Pi_{\mathrm{adm}}(G(F_v)) = \coprod_{\varphi \in \Phi(G_v)} \Pi_\varphi \tag{5.13}$$

を持つ (Langlands 分類)。**L パケット** と呼ばれるこの Π_φ は有限集合で、例えば同じ無限小指標を持つ離散系列表現たちは一つの L パケットをなす。

一般に ${}^L GL(n)$ に値を持つ Langlands パラメタのことを W_{F_v} の **表現** という。W_{F_v} の表現 ρ に対しては次のように L 及び ε 因子が対応する。F_v の非自明指標 ψ_v を $\psi_{\mathbb{R}}(x) := \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$, $\psi_{\mathbb{C}}(z) := \psi_{\mathbb{R}}(\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(z))$ と取る。$L(s, \rho)$, $\varepsilon(s, \rho, \psi_v)$ は ρ の各既約成分に対する L および ε 因子の積として定義されるので、ρ が既約な時を考えれば十分である。$F_v = \mathbb{C}$ の時、$W_{\mathbb{C}}$ の既約表現は $\rho(z) = |z|_{\mathbb{C}}^t (z/\bar{z})^{n/2}$, $(t \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z})$ の形である。このとき

$$L(s, \rho) := 2(2\pi)^{-(s+t+|n|/2)}\Gamma(s + t + |n|/2), \quad \varepsilon(s, \rho, \psi_{\mathbb{C}}) := \sqrt{-1}^{|n|}$$

と定義する。$F_v = \mathbb{R}$ の時には $W_{\mathbb{R}}$ の既約表現は次のどちらかの形である。

(1) $\dim V = 1$ のとき。

$$\rho(z) = |z|_{\mathbb{C}}^t, \ z \in \mathbb{C}^\times, \quad \rho(\tau) = (-1)^\epsilon, \quad t \in \mathbb{C}, \epsilon \in \{0, 1\}$$

と書ける。このとき、

$$L(s, \rho) = \pi^{-(\epsilon+t+s)/2}\Gamma((\epsilon + t + s)/2), \quad \varepsilon(s, \rho, \psi_{\mathbb{R}}) := \sqrt{-1}^{\epsilon}$$

と定義する。

(2) $\dim V = 2$ の時。$\rho = \mathrm{Ind}_{W_{\mathbb{C}}}^{W_{\mathbb{R}}}(\theta)$, $\theta(z) = |z|_{\mathbb{C}}^t (z/\bar{z})^{n/2}$ と書ける。このとき、

$$L(s, \rho) := L_{\mathbb{C}}(s, \theta), \quad \varepsilon(s, \rho, \psi_{\mathbb{R}}) := \sqrt{-1}\varepsilon_{\mathbb{C}}(s, \theta, \psi_{\mathbb{C}})$$

と定める。

さて $P=v_1(P_1)$, $P'=v_1'(P_1')$, $w=v_1'w_1v_1^{-1}$ を (5.4) の通りとする。$\widehat{\mathfrak{u}}_w:=\widehat{\mathfrak{u}}_1/\widehat{\mathfrak{u}}_1\cap w_1^{-1}(\widehat{\mathfrak{u}}_1')$ とおけば、

$$\rho_w: {}^LM_1\ni m\rtimes w\longmapsto \mathrm{Ad}(m)\circ\rho_{G_v}(w)|_{\widehat{\mathfrak{u}}_w}\in GL(\widehat{\mathfrak{u}}_w)$$

は定義可能である。$v_1^{-1}(\pi_{v,\lambda})\in\Pi_{\varphi^{M_1}}$ となる $\varphi_{\pi_{v,\lambda}}\in\Phi(M_{1,v})$ とこれの合成として得られる W_{F_v} の表現 $\rho_w(\varphi_{\pi_{v,\lambda}})$ の L 及び ε 因子が定まる。このとき $M_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})$ の正規化因子 $r_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda},\psi_v)$ を

$$r_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda},\psi_v):=\frac{L(0,\rho_w(\varphi_{\pi_{v,\lambda}}))}{\varepsilon(0,\rho_w(\varphi_{\pi_{v,\lambda}}),\psi_v)L(1,\rho_w(\varphi_{\pi_{v,\lambda}}))}$$

と定めれば、正規化された intertwining 作用素 $N_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda}):=r_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda},\psi_v)^{-1}M_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})$ は次を満たす [A12, I, §§2, 3]。

(N1) $N_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})\mathcal{I}_P(\pi_{v,\lambda},f)=\mathcal{I}_{P'}(w(\pi_{v,\lambda}),f)N_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})$, $f\in\mathcal{H}(G(F_v))$.

(N2) $N_{P''|P'}(w',w(\pi_{v,\lambda}))N_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})=N_{P''|P}(w'w,\pi_{v,\lambda})$, $P''\in\mathcal{P}(M'')$, $w'\in W_{M',M''}$ (長さの条件が付かないことに注意)。

(N3) $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$ ならば $N_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})^*=N_{P|P'}(w^{-1},w(\pi_{v,\lambda}))$, つまり $N_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})$ はユニタリ。

(N4) $N_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})$ は $(\alpha^\vee(\lambda))_{\alpha\in\Delta_M}$ の有理函数。

(N5) π_v が緩増加の時 $r_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda},\psi_v)$ は $\alpha^\vee(\mathrm{Re}\lambda)>0$, $\forall\alpha\in\Delta_P$ なる λ には極を持たない。

5.6.2. 有限素点の時. $G(F_v)$ の既約許容表現の同型類の集合を $\Pi_{\mathrm{adm}}(G(F_v))$ と書く。本質的に ${}^LG_v(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に値を取る $\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ の ℓ 進表現の $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 共役類の集合と同値になるように Langlands パラメタの同値類の集合 $\Phi(G_v)$ が定義できる。しかしこの場合の Langlands パラメタによる $\Pi_{\mathrm{adm}}(G(F_v))$ の分類 (5.13) は、一般化された **局所 Langlands 予想** と呼ばれるもので未だ解決にはほど遠い難問題である ($G=GL(n)$ の場合は昨年 Harris-Taylor によって解決された [HT], [He])。そこで少なくとも π_v が generic, すなわち Whittaker モデルを持つ場合には、Langlands パラメタを経由せずに L 因子や正規化因子を引き出せる Langlands-Shahidi 理論 [Sha2] が開発された。それによれば π_v が generic ならば、$L(s,\rho_w(\varphi_{\pi_{v,\lambda}}))$, $\varepsilon(s,\rho_w(\varphi_{\pi_{v,\lambda}}),\psi_v)$ に当たる L 及び ε 因子 $L(s,\pi_{v,\lambda},\rho_w)$, $\varepsilon(s,\pi_{v,\lambda},\rho_w,\psi_v)$ が定義され (本質的に Whittaker ベクトルへの intertwining 作用素の作用から引き出される)、正規化因子を上と同様に定めたとき、(N1), (N2), (N3) および

(N4) $N_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})$ は $(q_v^{-\alpha^\vee(\lambda)})_{\alpha\in\Delta_M}$ の有理函数。但し、q_v は F_v の剰余体の位数である。

(N6) G_v 及び π_v が "不分岐" で $\phi_v\in\mathcal{V}_P(\pi_v)$ が hyperspecial な極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_v$ の不変ベクトルの時、$N_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})\phi_v=\phi_v'$ は λ によらない。

が成り立つ。

π_v が generic でない場合にまでこれらの結果を拡げるプログラムが [Sha2, §9] にあるが、それには L パケットが定義されいくつかの基本的な性質を満たすことを示さねばならず、実現にはまだ時間がかかるであろう。跡公式の保型形式論への応用にはこのプログラムを完遂する必要がある。しかし **L 因子で定義される保証はないが (N1), . . . , (N6) を満たす 正規化因子 $r_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})$ が存在することは** [CLL, Chapt.15] **で証明されており**、跡公式を完成するだけならこれで十分である。

5.7. **大域的な状況.** 大域的な状況に戻って

$$r_{P'|P}(w,\pi_\lambda):=\prod_v r_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda}),\quad N_{P'|P}(w,\pi_\lambda):=\bigotimes_v N_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})$$

とおく。(N6) から $N_{P'|P}(w,\pi_\lambda)$ のテンソル積は本質的に有限積である。$M_{P|P'}(w,\pi_\lambda)$ の定義積分が絶対収束している範囲では Euler 積展開 $M_{P'|P}(w,\pi_\lambda)=\bigotimes_v M_{P'|P}(w,\pi_{v,\lambda})$ が

成り立つことから、その範囲では Euler 積 $r_{P'|P}(w,\pi_\lambda)$ も絶対収束し全 $\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ に有理型に解析接続される。

5.8. **細かい χ 展開.** まず K 有限性をはずして $f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)$ としても

$$\sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)}\int_{i(\mathfrak{a}_L^G)^*}\|\mathcal{M}_L(P,\lambda,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f)\|\,d\lambda \tag{5.14}$$

において $\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f)\neq 0$ となる π は有限個しかない [A5, II, Lem.8.3]。これは M の離散スペクトルの構成に寄与する Eisenstein 級数の極が局所有限である [MW, V] ことから従う。前節の結果を使って二つの (G,M) 族

$$\mathcal{N}_Q(P,\pi,\lambda,\Lambda):=N_{Q|P}(1,\pi_\lambda)^{-1}N_{Q|P}(1,\pi_{\lambda+\Lambda}),\quad r_Q(P,\pi,\lambda,\Lambda):=\frac{r_{Q|P}(1,\pi_{\lambda+\Lambda})}{r_{Q|P}(1,\pi_\lambda)}$$

$Q\in\mathcal{P}(M)$, $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$ が定まる。$\mathcal{M}_Q(P,\lambda,\Lambda)$ の $\mathcal{A}(U(\mathbb{A})M(F)\mathfrak{A}_M\backslash G(\mathbb{A}))_{\pi,\mathfrak{X}}$ への制限は $r_Q(P,\pi,\lambda,\Lambda)\mathcal{N}_Q(P,\pi,\lambda,\Lambda)$ に等しいから、(5.14) の評価において 補題 4.1 (3) により

$$\mathcal{M}_L(P,\lambda,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f)=\sum_{P_1\in\mathcal{F}(L)}r_L^{P_1}(P,\pi,\lambda,0)\mathcal{N}'_{P_1}(P,\pi,\lambda,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f)$$

である。$\mathcal{N}'_{P_1}(P,\pi,\lambda,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f)$ は $\lambda\in i\mathfrak{a}_L^*$ 上急減少であることが示せるので、

$$\int_{i(\mathfrak{a}_L^G)^*}|r_L^{P_1}(P,\pi,\lambda,0)|(1+\|\lambda\|)^{-N}\,d\lambda$$

が十分大きい $N\in\mathbb{N}$ に対して収束することを言えばよい。ところが、$r_{Q|P}(w,\pi_\lambda)$ は $w(U)\cap U'\backslash U'$ のルート空間分解に対応して

$$r_{Q|P}(w,\pi_\lambda)=\prod_{\beta\in\Sigma_Q^r\backslash w(\Sigma_P^r)}r_\beta(w,\pi,\beta^\vee(\lambda))$$

と分解され、従って上の評価も個々の $r_\beta(w,\pi,\beta^\vee(\lambda))$ に対する同様の評価に帰着される。これは [A5, I, Lem.A.1] の評価から証明される。証明のアイディア自体はランクが 1 の時に Selberg [Se2] によって示されたものだが、一般の場合には π がカスプ表現とは限らないのでカスプ表現からの Eisenstein 級数の留数として π を実現し、その場合に議論を拡張している [A5, II, §9]。結局 $f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)$ に対して (5.14) が収束することが示される。これにより "有界収束定理" が使えて次が得られる。

定理 5.5 (細かい χ 展開、[A5] II. Th.8.2). $f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_G)$ に対して

$$J_{\mathfrak{X}}(f)=\sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)}\sum_{L\in\mathcal{L}(M)}\sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)}\sum_{w\in W_{M,M}^{L,\mathrm{reg}}}\frac{|W^M|}{|W|}\frac{1}{|\det(w-1|\mathfrak{a}_M^L)|}$$
$$\int_{i(\mathfrak{a}_L^G)^*}\frac{1}{|\mathcal{P}(M)|}\sum_{P\in\mathcal{P}(M)}\mathrm{tr}(\mathcal{M}_L(P,\lambda,0)M_{P|P}(w,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{X}}(\pi_\lambda,f))\,d\lambda.$$

が成り立つ。

6. Invariant 跡公式

我々はすでに望みうる限り具体的で、Hecke 環の可換性を内包した跡公式 (3.2), 定理 4.3, 定理 5.5 を得た。しかし導入で述べたように異なる群の間で跡公式の比較をするには、跡公式を "共役で不変" すなわち invariant な超函数たちの等式とする必要がある。(θ,ω) 共役 $\mathrm{Ad}_{\theta\omega}$

$$[\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y)f](x) := \omega(y)[\mathrm{Ad}_\theta(y)f](x) = \omega(y)f(y^{-1}x\theta(y))$$

を思い出す。われわれの考えている (G,θ,ω) の twisted 跡公式の invariance とは、この $\mathrm{Ad}_{\theta\omega}$ 作用に関してのそれ (**(θ,ω)-invariance**) であることを注意しておく。

6.1. Non-invariance. Invariant 跡公式を得るための第一歩は跡公式の各項の invariant でない度合いを測ることである。すぐわかるように

$$K_{Q,\mathfrak{o}}^{\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y^{-1})f}(x,x) = K_{Q,\mathfrak{o}}^f(xy^{-1},xy^{-1})$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y)J_{\mathfrak{o}}^T)(f)\\
&= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\substack{Q;\,\theta(Q)=Q\\ Q\supset P_0}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_L^G)^\theta} \sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)} K_{Q,\mathfrak{o}}(\delta x,\delta x)\,{}_\theta\hat{\tau}_Q(H_Q(\delta xy)-T)\,dx
\end{aligned}$$

δx の $G(\mathbb{A})=Q(\mathbb{A})\mathbf{K}$ についての分解を $\delta x = q(\delta x)k_Q(\delta x)$ として (4.1) から

$$\begin{aligned}
&= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\substack{P\supset Q\supset P_0\\ \theta(P)=P,\,\theta(Q)=Q}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_L^M)^\theta} \sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)} K_{Q,\mathfrak{o}}(\delta x,\delta x)\,{}_\theta\hat{\tau}_Q^P(H_Q(\delta x)-T)\\
&\qquad\times {}_\theta\Gamma_P^G(H_Q(\delta x)-T,-H_Q(k_Q(\delta x)y))\,dx\\
&= \sum_{\substack{P\supset P_0\\ \theta(P)=P}} \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\substack{Q;\,P_0\subset Q\subset P\\ \theta(Q)=Q}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_L^M)^\theta} \sum_{\delta\in Q(F)\backslash P(F)} K_{Q,\mathfrak{o}}(\delta x,\delta x)\,{}_\theta\hat{\tau}_Q^P(H_Q(\delta x)-T)\\
&\qquad\times {}_\theta\Gamma_P^G(H_P(\delta x)-T,-H_P(k_Q(\delta x)y))\,dx.
\end{aligned}$$

$x\in P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上の積分に $x=umak$ ($u\in U(\mathbb{A})$, $m\in M(\mathbb{A})^1$, $a\in\mathfrak{A}_M^G$, $k\in\mathbf{K}$) と Langlands 分解を適用すれば、

$$K_{Q,\mathfrak{o}}^f(\delta x,\delta x) = K_{Q^M,\mathfrak{o}^M}^{f_P^k}(\delta ma,\delta ma),\quad {}_\theta\hat{\tau}_Q^P(H_Q(\delta x)-T) = {}_\theta\hat{\tau}_Q^P(H_Q(\delta m)-T),$$
$${}_\theta\Gamma_P^G(H_P(\delta x)-T,-H_P(k_Q(\delta x)y)) = {}_\theta\Gamma_P^G(H_P(a)-T,-H_P(ky))$$

を使って

$$(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y)J_{\mathfrak{o}}^T)(f) = \sum_{\substack{P;\,P\supset P_0\\ \theta(P)=P}} J_{\mathfrak{o}}^{M,T}(\overline{f}_{P,y}) \tag{6.1}$$

を得る。但し、(参考 4.3)

$$\begin{aligned}\overline{f}_{P,y}(m) &:= \int_{\mathbf{K}}\int_{\mathfrak{A}_M^G} \omega(a) f_P^k(a^{-1}m\theta(a))_\theta \Gamma_P^G(H_P(a)-T, -H_P(ky))\,da\,dk \\ &= \int_{\mathbf{K}}\int_{\mathfrak{A}_M^G(\theta)} \omega(a) f_P^k(a^{-1}\theta(a)m)\,da \int_{(\mathfrak{a}_M^G)^\theta} \omega(\exp H)_\theta \Gamma_P^G(H-T, -H_P(ky))\,dH\,dk \\ &= \int_{\mathbf{K}}\int_{\mathfrak{A}_M^G(\theta)} [\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(a) f_P^k](m)_\theta u'_P(k,y)\,da\,dk \\ &= m^{\rho_P}\int_{\mathbf{K}}\int_{\mathfrak{A}_M^G(\theta)} \omega(a)\int_{U(\mathbb{A})} (\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(k)f)(a^{-1}\theta(a)mu)\,du\,da\cdot {}_\theta u'_P(k,y)\,dk,\end{aligned}$$

$${}_\theta u'_P(x,y) := \int_{(\mathfrak{a}_M^G)^\theta} \omega(\exp H)_\theta \Gamma_P^G(H, -H_P(k_P(x)y))\,dH$$

である。スペクトル項についても同様にして

$$(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y)J_{\mathfrak{X}}^T)(f) = \sum_{\substack{P;\,P\supset P_0\\ \theta(P)=P}} J_{\mathfrak{X}}^{M,T}(\overline{f}_{P,y}) \tag{6.2}$$

が得られる。これらに $T=T_1$ を代入すれば、P_0 に依存しない表記が得られる。すなわち、

命題 6.1 ([A3] Th.3.2). $M\in\mathcal{L}_\theta$, $y\in M(\mathbb{A})$, $f^M\in C_c^\infty(M(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_M)$ とするとき、次が成り立つ。

$$(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y)J_{\mathfrak{o}^M}^M)(f^M) = \sum_{Q^M\in\mathcal{F}_\theta^M} \frac{|W^{L,\theta}|}{|W^{M,\theta}|} J_{\mathfrak{o}^M}^L(\overline{f}_{Q^M,y}^M), \tag{6.3}$$

$$(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y)J_{\mathfrak{X}^M}^M)(f^M) = \sum_{Q^M\in\mathcal{F}_\theta^M} \frac{|W^{L,\theta}|}{|W^{M,\theta}|} J_{\mathfrak{X}^M}^L(\overline{f}_{Q^M,y}^M), \tag{6.4}$$

6.2. **構成のアイディア.** 命題 6.1 で示された invariance からのずれを Levi 部分群に付随した量で書き表したい。その方針は放物型部分群に関する帰納的なものであり、命題 6.1 から容易に引き出せる。

まず、跡公式のテスト函数の空間を両側 $\mathbf{K}$ 有限なものからなる部分空間 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に限る。$L\subset M\in\mathcal{L}_\theta$ に対して、連続線型写像 $\phi_L^M:\mathcal{H}(M(\mathbb{A}))\to\mathcal{I}(L(\mathbb{A}))$ であって

(1) $\phi_L^M(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y^{-1})f) = \sum_{P_1\in\mathcal{F}_\theta^M(L)} \phi_L^{M_1}(\overline{f}_{P,y})$,
(2) $\phi_M^M:\mathcal{H}(M(\mathbb{A}))\to\mathcal{I}(M(\mathbb{A}))$ は全射。
(3) (1) から ϕ_M^M と $\mathcal{I}(M(\mathbb{A}))$ 上の線型形式 $\widehat{I}^M$ の合成は (θ,ω)-invariant 超函数であるが、$\mathcal{H}(M(\mathbb{A}))$ 上の任意の (θ,ω)-invariant 超函数 I^M は $\widehat{I}^M\circ\phi_M^M$ の形である。

を満たすようなものを構成する。次に Schwartz 超函数の族 $\{J_{\mathfrak{o}}^M, J_{\mathfrak{X}}^M\}_{M\in\mathcal{L}_\theta}$ から新たな族 $\{I_{\mathfrak{o}}^M, I_{\mathfrak{X}}^M\}_{M\in\mathcal{L}_\theta}$ を帰納的に

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{o}}^M(f^M) &:= J_{\mathfrak{o}}^M(f^M) - \sum_{L\neq M,\in\mathcal{L}_\theta^M} \frac{|W^{L,\theta}|}{|W^{M,\theta}|}\widehat{I}_{\mathfrak{o}}^L(\phi_L^M(f^M)), \\ I_{\mathfrak{X}}^M(f^M) &:= J_{\mathfrak{X}}^M(f^M) - \sum_{L\neq M,\in\mathcal{L}_\theta^M} \frac{|W^{L,\theta}|}{|W^{M,\theta}|}\widehat{I}_{\mathfrak{X}}^L(\phi_L^M(f^M)) \end{aligned} \tag{6.5}$$

と定義する。命題 6.1 と (1) から

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{o}}(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y^{-1})f-f) &= J_{\mathfrak{o}}(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y^{-1})f-f) - \sum_{L\neq G,\in\mathcal{L}_\theta} \frac{|W^{L,\theta}|}{|W^\theta|}\widehat{I}^L_{\mathfrak{o}}(\phi^G_L(\mathrm{Ad}_{\theta\omega}(y^{-1})f-f)) \\ &= \sum_{P\neq G,\in\mathcal{F}_\theta} \frac{|W^{M,\theta}|}{|W^\theta|} J^M_{\mathfrak{o}}(\overline{f}_{P,y}) - \sum_{L\neq G,\in\mathcal{L}_\theta}\frac{|W^{L,\theta}|}{|W^\theta|}\sum_{P\in\mathcal{F}_\theta(L)} \widehat{I}^L_{\mathfrak{o}}(\phi^M_L(\overline{f}_{P,y})) \\ &= \sum_{P\neq G,\in\mathcal{F}_\theta} \frac{|W^{M,\theta}|}{|W^\theta|}\left(J^M_{\mathfrak{o}}(\overline{f}_{P,y}) - \sum_{L\in\mathcal{L}^M_\theta}\frac{|W^{L,\theta}|}{|W^{M,\theta}|}\widehat{I}^L_{\mathfrak{o}}(\phi^M_L(\overline{f}_{P,y}))\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、$I^M_{\mathfrak{o}}$ たちは全て (θ,ω)-invariant であることが帰納的に示される。一方 $I^M_{\mathfrak{o}}$, $I^M_{\mathfrak{X}}$ の定義と (3.2) から、等式

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}_\theta(G)} I_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\mathfrak{X}\in\mathfrak{X}_{\theta\omega}(G)} I_{\mathfrak{X}}(f) \tag{6.6}$$

が得られる。これが **invariant 跡公式** である。

6.3. Trace Paley-Wiener 定理の応用. 残された仕事は上の (1), (2), (3) の条件を満たすような ϕ^M_L を構成することと、細かい O 展開 (定理 4.3) 及び χ 展開 (定理 5.5) から (6.6) の各項の具体的な記述を得ることである。我々はスペクトルサイドの構成に際して θ, ω が自明な場合のみを扱ってきた。ところが invariant 跡公式の構成に用いる ϕ^M_L は "ウェイト付き指標" によって定義されるため、やはり θ と ω が自明とした方がすっきりする。さらにこの節では trace Paley-Winer 定理 (無限素点に対しては [CD]、有限素点に対しては [BDK] を参照) から $\phi^G_M=\phi_M$ を構成するが、θ, ω が自明でない時の Paley-Wiener 定理は p 進群の $\omega=1$ の場合が [Ro] により解決しているものの、無限素点に対しては $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ に対する base change の場合が知られているのみである [D]。こうした理由から **以下では θ と ω が自明な場合のみを扱う。**

F の素点の有限集合 S を固定する。$\mathcal{H}(G(F_S))$ で $G(F_S)$ の Hecke 環、すなわち滑らかでコンパクト台を持ち両側 $\mathbf{K}_S$ 有限な函数たちのなす畳み込み代数を表す。$M(F_S)$ の既約で本質的に tempered な表現の同値類を $\Pi_{\mathrm{temp}}(G(F_S))$ と書く。$M\in\mathcal{L}_\theta$, $\pi\in\Pi(M(F_S))$, $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$ に対して

$$\begin{gathered} J_M(\pi_\lambda,f) := \mathrm{tr}(\mathcal{N}_M(\pi_\lambda,P)\mathcal{I}_P(\pi_\lambda,f)), \quad f\in\mathcal{H}(G(F_S)), \\ \mathcal{N}_M(\pi_\lambda,P) := \lim_{\Lambda\to 0}\mathcal{N}_M(P,\pi,\lambda,\Lambda) \end{gathered}$$

とおく。これを Fourier 変換と呼ぶのが自然に思えるが、これは non-tempered ないくつかの π で特異点を持っている。そこで跡公式の局所項として現れる

$$J_M(\pi,X,f) := \int_{i\mathfrak{a}^*_{M,S}} J_M(\pi_\lambda,f)e^{-\lambda(X)}\,d\lambda$$

を考える。すなわち Fourier 変換 $\phi_M(f)$ を

$$\phi_M(f):\Pi_{\mathrm{temp}}(M(F_S))\times\mathfrak{a}_{M,S}\ni(\pi,X)\longmapsto J_M(\pi,X,f)\in\mathbb{C}$$

と定義する。一般の $\pi\in\Pi(M(F_S))$ に対しても **解析接続によって** $\phi_M(f)(\pi,X)$ の定義を拡張しておく。これが 6.2 の条件 (1) を満たすことを見よう。

$\pi\in\Pi_{\mathrm{temp}}(M(F_S))$, $f\in\mathcal{H}(G(F_S))$ とし、$N_{P'|P}(1,\pi_\lambda)$ を $N_{P'|P}(\pi_\lambda)$ と書く。

$$\begin{aligned}J_M(\pi,\mathrm{Ad}(y^{-1})f)&=\lim_{\nu\to0}\sum_{P'\in\mathcal{P}(M)}\frac{\mathrm{tr}(N_{P'|P}(\pi)^{-1}N_{P'|P}(\pi_\nu)\mathcal{I}_P(\pi,y^{-1})\mathcal{I}_P(\pi,f)\mathcal{I}_P(\pi,y))}{\theta^G_{P'}(\nu)}\\&=\lim_{\nu\to0}\sum_{P'\in\mathcal{P}(M)}\frac{\mathrm{tr}(\mathcal{I}_P(\pi,y)N_{P'|P}(\pi)^{-1}N_{P'|P}(\pi_\nu)\mathcal{I}_P(\pi,y^{-1})\mathcal{I}_P(\pi,f))}{\theta^G_{P'}(\nu)}\\&=\lim_{\nu\to0}\sum_{P'\in\mathcal{P}(M)}\mathrm{tr}\left(\frac{N_{P'|P}(\pi)^{-1}\mathcal{I}_{P'}(\pi,y)\mathcal{I}_{P'}(\pi_\nu,y^{-1})N_{P'|P}(\pi_\nu)}{\theta^G_{P'}(\nu)}\mathcal{I}_P(\pi,f)\right)\end{aligned}$$

において $U_{P'}(\nu,\pi,y):=\mathcal{I}_{P'}(\pi,y)\mathcal{I}_{P'}(\pi_\nu,y^{-1})$ $(P'\in\mathcal{P}(M))$ とおけば、これは明らかに (G,M) 族ゆえ $U'_{P'}(\nu,\pi,y)$ が定義できて (4.4 (4.6))

$$\frac{U_{P'}(\nu,\pi,y)}{\theta^G_{P'}(\nu)}=\sum_{P_1\in\mathcal{F}(M),\,P_1\supset P'}\frac{U'_{P_1}(\nu,\pi,y)}{\theta^{P_1}_{P'}(\nu)}$$

が定義から従う。つまり、

$$J_M(\pi,\mathrm{Ad}(y^{-1})f)=\lim_{\nu\to0}\sum_{P_1\in\mathcal{P}(M)}\sum_{P'\in\mathcal{P}^{P_1}(M)}\mathrm{tr}\left(\frac{N_{P'|P}(\pi)^{-1}U'_{P_1}(\nu,\pi,y)N_{P'|P}(\pi_\nu)}{\theta^{P_1}_{P'}(\nu)}\mathcal{I}_P(\pi,f)\right)$$

内側の和が $\nu\to0$ で極限を持つことを示して、$N_{P'|P}(\pi)$ の intertwining property から

$$\begin{aligned}&=\sum_{P_1\in\mathcal{P}(M)}\mathrm{tr}\left(\lim_{\nu\to0}\sum_{P'\in\mathcal{P}^{P_1}(M)}\frac{N_{P'|P}(\pi)^{-1}N_{P'|P}(\pi_\nu)}{\theta^{P_1}_{P'}(\nu)}U'_{P_1}(\nu,\pi,y)\mathcal{I}_P(\pi,f)\right)\\&=\sum_{P_1\in\mathcal{P}(M)}\mathcal{N}^{P_1}_M(\pi,P)U'_{P_1}(0,\pi,y)\mathcal{I}_P(\pi,f)\end{aligned}$$

を得る。ここで $\mathcal{I}_P(\pi_\nu)$ の定義から

$$(U_{P'}(\nu,\pi,y)\phi)(x)=e^{-\nu(H_{P'}(xy)-H_{P'}(x))}\phi(x)=u_{P'}(\nu,x,y)\phi(x)$$

ゆえ、$\mathcal{N}^{P_1}_M(\pi,P)U'_{P_1}(0,\pi,y)\mathcal{I}_P(\pi,f)$ は ($\mathcal{I}_P(\pi,f)$ の空間を $\mathbf{K}_S$ 上の函数に実現して)

$$\begin{aligned}K_{P_1,f}(k,k'):=\int_{M_1(F_S)}\mathcal{I}^{M_1}_{PM_1}(\pi,m)m^{\rho_{P_1}}\int_{U_1(F_S)}f(k^{-1}muk')u'_{P_1}(k',y)\,du\,dm\\\times\mathcal{N}^{M_1}_M(\pi,P^{M_1})\end{aligned}$$

を核函数にもつ $L^2(\mathbf{K}^{M_1}_S\backslash\mathbf{K}_S)$ 上の積分作用素である。よって

$$\begin{aligned}J_M(\pi,\mathrm{Ad}(y^{-1})f)&=\sum_{P_1\in\mathcal{P}(M)}\int_{\mathbf{K}^{M_1}_S\backslash\mathbf{K}_S}K_{P_1,f}(k,k)\,dk\\&=\sum_{P_1\in\mathcal{P}(M)}\mathrm{tr}(\mathcal{I}^{M_1}_{PM_1}(\pi,\overline{f}_{P_1,y})\mathcal{N}^{M_1}_M(\pi,P^{M_1}))\qquad(6.7)\\&=\sum_{P_1\in\mathcal{P}(M)}J^{M_1}_M(\pi,\overline{f}_{P_1,y}).\end{aligned}$$

さらに Langlands 分類を使ってこの関係を tempered でない $\pi \in \Pi_{\mathrm{adm}}(M(F_S))$ に拡げることができる [A12, I. Lem.6.2]。これから、

$$J_M(\pi, X, \mathrm{Ad}(y^{-1})f) = \sum_{P_1 \in \mathcal{F}(M)} J_M^{M_1}(\pi, X, f_{P_1,y}) \tag{6.8}$$

および、6.2 (1) が従う。実は $\mathrm{Ad}(y^{-1})$ は $\mathcal{H}(G(F_S))$ を保たないことがあるからこの議論は少し不正確だが、代わりに y による右移動と左移動を比較する式を用いれば問題はない。簡単のため以下でもこの点を無視して $\mathrm{Ad}(y^{-1})$ による記述を続けることにする。

さて、Arthur は trace Paley-Wiener 定理を用いて Paley-Wiener 空間 $\mathcal{I}(G(F_S))$ を定義している。しかし、ϕ_G は $\mathcal{H}(G(F_S))$ を $\mathcal{I}(G(F_S))$ に持っていくものの、$\phi_M(\mathcal{H}(G(F_S)))$ は $\mathcal{I}(M(F_S))$ に入らない。そこで ϕ_M の像を含む少し大きな空間 $\mathcal{I}_{\mathrm{ac}}(M(F_S))$ を定義した。次に Fourier 変換 ϕ_G が全単射になるように、$\mathcal{H}(G(F_S))$ を $\mathfrak{a}_{G,S}$ 方向を除けばコンパクト台を持つ ("almost compact" support) ものたちの空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(G(F_S))$ に拡げておく。こうして得られた $\phi_L^M : \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(M(F_S)) \to \mathcal{I}_{\mathrm{ac}}(L(F_S))$ は 6.2 の条件 (2) を満たす [A12, I,§11]。

最後に 6.2 (3) は任意の invariant 超函数が

$$\phi_G : \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(G(F_S)) \ni \phi \mapsto \phi_G(f)(\pi, X) = \int_{i\mathfrak{a}_{G,S}^*} \mathrm{tr}(\pi_\lambda(f)) e^{-\lambda(X)}\, d\lambda \in \mathcal{I}_{\mathrm{ac}}(G(F_S))$$

を経由するという主張だが、これはもちろん正しくない。しかし我々の目的には $I_{\mathfrak{o}}^G$, $I_{\mathfrak{X}}^G$ たちが ϕ_G を経由しているだけで十分である。すなわち、我々の帰納法の設定は次のようになる。

問題 6.2. *6.2 (1), (2)* を満たす写像 $\phi_L^M : \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(G(F_S)) \to \mathcal{I}_{\mathrm{ac}}(G(F_S))$ が与えられ、さらに

$$J_{\mathfrak{o}}^M(f^M) = I_{\mathfrak{o}}^M(f^M) + \sum_{L \neq M, \in \mathcal{L}^M} \frac{|W^L|}{|W^M|} \widehat{I}_{\mathfrak{o}}^L(\phi_L^M(f^M)),$$

$$J_{\mathfrak{X}}^M(f^M) = I_{\mathfrak{X}}^M(f^M) + \sum_{L \neq M, \in \mathcal{L}^M} \frac{|W^L|}{|W^M|} \widehat{I}_{\mathfrak{X}}^L(\phi_L^M(f^M))$$

を満たし、ϕ_M^M を経由する $I_{\mathfrak{o}}^M$, $I_{\mathfrak{X}}^M$ が全ての $M \neq G, \in \mathcal{L}$ に対して定義されているとする。このとき、

$$I_{\mathfrak{o}}^G(f) := J_{\mathfrak{o}}(f) - \sum_{M \neq G, \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \widehat{I}_{\mathfrak{o}}^M(\phi_M(f)),$$

$$I_{\mathfrak{X}}^G(f) := J_{\mathfrak{X}}(f) - \sum_{M \neq G, \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \widehat{I}_{\mathfrak{X}}^M(\phi_M(f))$$

たちは ϕ_G を経由するか。

これを証明するためには $I_{\mathfrak{o}}^M$, $I_{\mathfrak{X}}^M$ たちの具体的な表示が必要になる。その結果 invariant 跡公式を証明している論文 [A10], [A11] では、[A10] で跡公式の項の表示に現れる局所的な超函数たちを用意し、後で必要になるそれらの性質を準備している。その後 [A11] でそれらを使って跡公式を具体的に記述し、その記述を用いて上述の帰納法を完結している [A11, Th.5.1, Cor.5.3]。以下では 問題 6.2 の仮定を認めて、$I_{\mathfrak{o}}^G$, $I_{\mathfrak{X}}^G$ の具体的な表示を求めるにとどめ、この長大な帰納法については割愛する。

6.4. **Invariant** な細かい O 展開. 我々の出発点は

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \sum_{\gamma \in (M(F) \cap \mathfrak{o})_{M,S}} a^M(S, \gamma) J_M(\gamma, f) \tag{4.10}$$

である。ここで F の素点の有限集合 S は $\mathfrak{o}$ と f に関して十分に大きく取るのであった。まずは $I_{\mathfrak{o}}(f)$ の表示に用いられる局所的な超函数を用意しよう。これは $J_M(\gamma)$ に 6.2 と類似の構成を施して得られる。

局所的な状況に戻って $\gamma \in M(F_S)$ とし、ウェイト付き軌道積分 $J_M(\gamma, f)$ を考える。$G_{\gamma_s} \subset M$ のとき

$$J_M(\gamma, \mathrm{Ad}(y^{-1})f) = |D(\gamma)|_S^{1/2} \int_{G_{\gamma_s}(F_S) \backslash G(F_S)} f(x^{-1}\gamma x) v_M(xy)\, dx$$

と

$$v_P(\lambda, xy) = v_P(\lambda, x) v_P(\lambda, k_P(x)y) = v_P(\lambda, x) u_P(\lambda, x, y)$$

に注意すれば、$J_M(\pi, f)$ の場合 6.3 と同様にして

$$J_M(\gamma, \mathrm{Ad}(y^{-1})f) = \sum_{P_1 \in \mathcal{F}(M)} J_M^{M_1}(\gamma, f_{P_1,y})$$

が得られる。そこで Levi 部分群に関して帰納的に

$$I_M(\gamma, f) := J_M(\gamma, f) - \sum_{M_1 \neq G, \in \mathcal{L}(M)} \widehat{I}_M^{M_1}(\gamma, \phi_{M_1}(f))$$

と定義する。もちろん帰納法の仮定から $I_M^{M_1}(\gamma)$ は $\phi_{M_1}^{M_1}$ を経由するから $\widehat{I}_M^{M_1}(\gamma)$ は定義可能である。6.2 の議論により $I_M(\gamma)$ は invariant 超函数であることがわかる。また定義から $I_M(\gamma, f)$ はウェイト付き軌道積分の種々の性質を受け継いでいる。特に有限素点 v で G が不分岐で $f \in \mathcal{H}(G(F_v))$ が hyperspecial な極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_v$ で両側不変なとき、

$$I_M(\gamma, f) = J_M(\gamma, f) \tag{6.9}$$

が成り立つ [A10, Lem.2.1]。

補題 6.3 ([A11] Prop.3.1). 素点の有限集合 S を f と $\mathfrak{o}$ に対して十分大きく取ったとき、

$$I_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \sum_{\gamma \in (M(F) \cap \mathfrak{o})_{M,S}} a^M(S, \gamma) I_M(\gamma, f)$$

が成り立つ。

証明. $I_{\mathfrak{o}}(f)$ の定義に (4.10) と帰納法の仮定

$$\widehat{I}_{\mathfrak{o}}^{M_1}(\phi_{M_1}(f)) = \sum_{M \in \mathcal{L}^{M_1}} \frac{|W^M|}{|W^{M_1}|} \sum_{\gamma \in (M(F) \cap \mathfrak{o})_{M,S}} a^M(S, \gamma) \widehat{I}_M^{M_1}(\gamma, \phi_{M_1}(f))$$

を代入すれば

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{o}}(f) &= \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \sum_{\gamma \in (M(F) \cap \mathfrak{o})_{M,S}} a^M(S, \gamma) \Bigl(J_M(\gamma, f) - \sum_{M_1 \neq G, \in \mathcal{L}(M)} \widehat{I}_M^{M_1}(\gamma, \phi_{M_1}(f)) \Bigr) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \sum_{\gamma \in (M(F) \cap \mathfrak{o})_{M,S}} a^M(S, \gamma) I_M(\gamma, f) \end{aligned}$$

□

ここで $I_M(\gamma)$ の台を評価することにより、supp$f$ に対して S を十分大きく取れば $I_{\mathfrak{o}}(f)$ を $\mathfrak{o}$ について足しあげたものが有限であることを保証して次を得る。

定理 6.4 (Invariant fine O-expansion, [A11] Th.3.3). 簡単のため $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は局所函数 f_v たちのテンソル積 $f = \bigotimes_v f_v$ の形であるとする。S を supp$f$ に関して十分大きく、かつ $v \notin S$ では G_v が不分岐で f_v は *hyperspecial* 極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_v$ の特性函数になっているように取れば、

$$I(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \sum_{\gamma \in M(F)_{M,S}} a^M(S,\gamma) I_M(\gamma, f)$$

が成り立つ。実際右辺の γ についての和は f で定まる有限集合上の和である。

6.5. **Invariant な細かい χ 展開.** 再び局所的な状況に戻って $\pi \in \Pi(M(F_S)), f \in \mathcal{H}(G(F_S))$ とする。すでに示した $J_M(\pi, X)$ の Ad(y) に関する変動の式 (6.8) から

$$I_M(\pi, X, f) := J_M(\pi, X, f) - \sum_{M \neq G, \in \mathcal{L}(M)} \widehat{I}_M^{M_1}(\pi, X, \phi_{M_1}(f))$$

が invariant 超函数であることがわかる。さらに $\pi \in \Pi_{\mathrm{temp}}(M(F_S))$ ならば定義から、

$$I_G(\pi, X, f) = J_G(\pi, X, f) = \phi_G(f)(\pi, X) \tag{6.10}$$

であり、同様にして $J_M(\pi, X, f) = \widehat{I}_M^M(\pi, X, \phi_M(f))$ も得られる。帰納法の仮定により任意の $M_1 \neq G, M$ なる $M_1 \in \mathcal{L}(M)$ に対して $I_M^{M_1}(\pi, X) = 0$ とすれば、定義から

$$I_M(\pi, X, f) = 0, \quad \forall M \neq G \tag{6.11}$$

がわかる。しかし、π が tempered でないときには $\phi_M(f)(\pi, X)$ が解析接続で定義されているためこれらの等式は成り立たない。

スペクトルサイドでの我々の出発点は 定理 5.5 である。[A11] では跡公式のスペクトルサイドを保型表現の無限成分の無限小指標のノルムによって切り分け、種々の議論を行った後再びそれらを足し合わせている。これは [A11] が書かれた時点ではまだ $L^2_d(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ 上の作用素 tr$R_d(f)$ が跡族であることが知られていなかったからである。現在ではこのいわゆる “trace class conjecture” は証明されているので [Mu]、以下では無限小指標のノルムによる切り分けは採用しない。なお [Mu, II] ではテスト函数 f の $\mathbf{K}$ 有限性をはずしても trace class conjecture が成り立つことが証明されている (実際はさらに急減少な L^1 函数で証明されている)。まず 定理 5.5 中の “離散部分”

$$\sum_{M \in \mathcal{L}} \sum_{\pi \in \Pi(M(\mathbb{A})^1)} \sum_{w \in W_{M,M}^{\mathrm{reg}}} \frac{|W^M|}{|W|} \frac{1}{|\det(w-1|\mathfrak{a}_M)|} \mathrm{tr}(M_{P|P}(w,0)\mathcal{I}_{P,\mathfrak{x}}(\pi, f))$$

は許容表現の空間上の作用素のトレースで与えられる invariant 超函数ゆえ、指標の線形結合に書ける。

$$\sum_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)} a_{\mathrm{disc}}(\pi) \mathrm{tr}\pi(f).$$

ここで $a_{\mathrm{disc}}(\pi) \in \mathbb{C}$ は π の $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ **での重複度とは限らない** ことを強調しておく。Levi 部分群に対するこの表記を用いて次が得られる。

定理 6.5 (Invariant fine χ-expansion, [A11] Th.4.4).

$$I_M(\pi, f) := I_M(\pi, 0, f)$$

とおく。$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して

$$I(f) = \sum_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}(G)} I_{\mathfrak{X}}(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \int_{\Pi(M)} a^M(\pi) I_M(\pi, f)\, d\pi$$

が成り立つ。但し、

$$\Pi_{\mathrm{disc}}(M) := \left\{ \pi \in JH(\mathcal{I}_Q^M(\sigma_\lambda)) \;\middle|\; \begin{array}{ll} (1) & a^L_{\mathrm{disc}}(\sigma) \neq 0, \\ (2) & w(\sigma_\lambda) = \sigma_\lambda,\ \exists w \in W^{M,\mathrm{reg}}_{L,L} \end{array} \right\}$$

として

$$\Pi(M) = \coprod_{L \in \mathcal{L}^M} \{\pi_\lambda \,|\, \pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(L),\ \lambda \in i(\mathfrak{a}_L^M)^*\}$$

と書いた。$\Pi(M)$ 上の測度は

$$\int_{\Pi(M)} \phi(\pi)\, d\pi = \sum_{L \in \mathcal{L}^M} \frac{|W^L|}{|W^M|} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(L)} \int_{i(\mathfrak{a}_L^M)^*} \phi(\pi_\lambda)\, d\lambda$$

となるものに取っている。さらに *5.8* で定義した (G, M) 族 $r_P(P', \pi, \lambda, \nu)$ を使って

$$r_L^M(\pi_\lambda) := \lim_{\nu \to 0} \sum_{Q \in \mathcal{P}^P(L)} \frac{r_Q(Q', \pi, \lambda, \nu)}{\theta_Q^P(\nu)}$$

とおくとき、

$$a^M(\pi_\lambda) := a^L_{\mathrm{disc}}(\pi) r_L^M(\pi_\lambda)$$

である。

証明. 定理 5.5 の式に intertwining 作用素の正規化の定義を用い、補題 4.1 (3) と組み合わせれば

$$\begin{aligned} J(f) &= \sum_{L \in \mathcal{L}} \sum_{M \in \mathcal{L}(L)} \frac{|W^L|}{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(L)} \int_{i(\mathfrak{a}_L^G)^*} a^L_{\mathrm{disc}}(\pi) r_L^M(\pi_\lambda) \mathrm{tr}(\mathcal{N}_M(\pi_\lambda, P) \mathcal{I}_P(\pi_\lambda, f))\, d\lambda \\ &= \sum_{M \in \mathcal{L}} \sum_{L \in \mathcal{L}^M} \frac{|W^L|}{|W|} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(L)} \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} a^M(\pi_\lambda) J_M(\pi_\lambda^M, f)\, d\lambda \\ &= \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \int_{\Pi(M)} a^M(\pi) J_M(\pi, f)\, d\pi \end{aligned}$$

を得る。あとは 補題 6.3 の証明と同様にしてこの J についての式から I についての式を引き出せる。 □

以上によりとうとう具体的な invariant 跡公式

$$\sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \sum_{\gamma \in M(F)_{M,S}} a^M(S, \gamma) I_M(\gamma, f) = \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \int_{\Pi(M)} a^M(\pi) I_M(\pi, f)\, d\pi \tag{6.12}$$

に到達した。

7. 単純化

Invariant 跡公式 (6.12) は楕円的でない γ に対する $a^M(S,\gamma)$ など計算が困難な量を含む。従って跡公式の比較により保型表現についての情報を得るためには、テスト函数に条件を課すことで跡公式の複雑な項たちを消すことが重要である。さらに志村多様体のゼータ函数の記述などに際しては、志村多様体の Diophantos 幾何から得られるテスト函数はそのような特別なテスト函数になる (§9 を参照)。[A11, §§7, 8] ではそうした跡公式の単純化がいくつか証明されている。ここではその中から後半の応用編で必要になるものを紹介する。

$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ がある素点 v で **cuspidal** とは、

$$\phi_M^M(\overline{(f_v)_P}) = 0, \quad \forall M \in \mathcal{L}$$

が成り立つこととする。このとき

$$I_M(\pi, X, f) = 0, \quad \pi \in \Pi_{\mathrm{unit}}(M(F_v)),\ X \in \mathfrak{a}_M,\ M \neq G, \in \mathcal{L}$$

が示せる。$I_M(\pi, f)$ たちはこのようなものの積に分解する [A10, Prop.9.4] ので、これから $M \neq G$ に対する $I_M(\pi, f)$ が消え、次を得る。

定理 7.1 ([A11] Th.7.1). *f が一つの素点 v で cuspidal なとき (6.12) のスペクトルサイドは*

$$I(f) = \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G)} a_{\mathrm{disc}}^G(\pi) I_G(\pi, f)$$

*となる。*もちろん $I_G(\pi, f) = \mathrm{tr}\pi(f)$ である。

Part II. 応用

Part II. では Part I. で得られた跡公式の応用を二つ紹介する。導入で触れたように、一般の簡約群上の保型形式への跡公式の応用には跡公式の安定化が必要であり、そのための枠組みとして endoscopy の理論がある。しかしこれは表現論や調和解析には少し遠い話題である上に、未だに多くの基本的な問題が未解決な状況でもある。そこでここでは endoscopy を必要としない、$GL(n)$ の可解拡大に対する base change リフトの構成 [AC] と対称空間の数論商上の Hecke 作用素の L^2-Lefschetz 数の記述 [A13] を紹介する。

8. $GL(n)$ の可解拡大に対する BASE CHANGE リフト

8.1. **問題設定.** まず、問題の背景になっている **Langlands の函手性の哲学** について手短に述べておく。G を数体 F 上定義された連結簡約群とする。2.1 で述べたようにその既約許容表現 π は各素点での $G(F_v)$ の既約許容表現 π_v (無限素点では既約 $(\mathfrak{g}_v, \mathbf{K}_v)$ 加群) の制限テンソル積

$$\pi = \bigotimes_v{}' \pi_v$$

であった。ここで有限個を除く全ての有限素点 v では π_v は不分岐である。正確に言うと、そのような v では G_v は F_v のある不分岐拡大上で split するような quasisplit 群であり、従って F_v 有理的な Borel 対 $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ を持つ。$\mathbf{T}$ の F_v 有理的な指標の群を $X^*(\mathbf{T})_{F_v}$ と書く。$\mathbf{T}(F_v)$ の指標 χ が **不分岐** とは部分群

$$\mathbf{T}(F_v)^1 := \{t \in \mathbf{T}(F_v) \,|\, |\mu(t)|_v = 1,\ \forall \mu \in X^*(\mathbf{T})_{F_v}\}$$

への制限が自明であることとする。$\pi_v \in \Pi_{\mathrm{adm}}(G(F_v))$ が **不分岐** とはそれが不分岐指標からの誘導表現の形の standard 表現

$$I_{\mathbf{B}}(\chi) = \mathrm{Ind}_{\mathbf{B}(F_v)}^{G(F_v)}[\chi \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{U}(F_v)}]$$

の Langlands 既約商であることだった。5.6 で触れた局所 Langlands 予想は、不分岐な表現に対しては解決している。すなわち類体論によって $\chi \in \Pi_{\mathrm{adm}}(\mathbf{T}(F_v))$ には Langlands パラメタ

$$\varphi_\chi : W_{F_v} \longrightarrow {}^L\mathbf{T}$$

が対応するが、π_v に付随する Langlands パラメタ φ は合成 $W_{F_v} \xrightarrow{\varphi_\chi} {}^L\mathbf{T} \hookrightarrow {}^L G_v$ で与えられる。さらに不分岐な χ に付随する φ_χ は剰余体 $\mathbf{F}_{q_v} = \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$ の Galois 群の位相的生成元 $\Phi_v : x \mapsto x^{1/q_v}$ (**幾何的 Frobenius 元**) で生成される商群を経由する:

$$\varphi : W_{F_v} \twoheadrightarrow \Phi_v^{\mathbb{Z}} \longrightarrow {}^L\mathbf{T} \hookrightarrow {}^L G_v.$$

すなわち φ は Φ_v の行き先で完全に決まる。具体的には $\chi \in \Pi_{\mathrm{adm}}(\mathbf{T}(F_v)/\mathbf{T}(F_v)^1)$ は $X^*(\mathbf{T})_{F_v} \otimes \mathbb{C} = X_*(\widehat{\mathbf{T}})^{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)} \otimes \mathbb{C}$ の元と見なせるから、$\chi = \sum_i s_i \mu_i$ ($s_i \in \mathbb{C}$, $\mu_i \in X_*(\mathbf{T})^{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$) と書ける。このとき

$$\varphi(\Phi_v) = \prod_i \mu_i(q_v^{-1})^{s_i} \rtimes \Phi_v$$

となることが知られている [B2]。この $\varphi(\Phi_v)$ を π の v での **Hecke 行列** といい、$t_{\pi,v}$ と書く。

予想 8.1 (Langlands' functoriality). G 及び G' を代数体 F 上定義された連結簡約群とし、次の図式を可換にするような L 群の射 $\phi : {}^L G \to {}^L G'$ が与えられているとする。

$$\begin{array}{ccc} {}^L G & \xrightarrow{\phi} & {}^L G' \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \\ W_{F_v} & = & W_{F_v} \end{array}$$

このとき、$G(\mathbb{A})$ の保型表現 π に対して $G'(\mathbb{A})$ の保型表現 $\pi' = \phi(\pi)$ であって、有限個を除く全ての v で

$$t_{\pi',v} = \phi(t_{\pi,v})$$

が成り立つようなものがある。このとき π' を ϕ による π の **リフト** という。

もちろんこれは不正確な概念であるが、導入にも登場した Jacquet-Shalika の結果

定理 8.2 ([JS], 強重複度 1 定理). π, π' を $GL(n, \mathbb{A})$ の既約 *cuspidal* 保型表現とする。有限個を除く全ての v で $t_{\pi,v} = t_{\pi',v}$ が成り立つならば、π と π' は（表現空間も含めて）一致する。

により、G も G' も一般線型群の場合にはリフトは cuspidal 保型表現の間の写像になる。

これらの定義は保型 L 函数と Galois 表現の L 函数の関係についての予想から来ている。一般に $G(\mathbb{A})$ の既約保型表現 π と ${}^L G$ の有限次元表現 ρ が与えられたとき、これらに付随する保型 L 函数の不分岐な Euler 因子は

$$L(s, \pi_v, \rho) := \det(1 - \rho(t_{\pi,v}) q_v^{-s})^{-1}$$

で定義される [B2]。一方、例えば $GL(n, \mathbb{A})$ の（無限成分にある種の条件の付いた）保型表現は $\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ の n 次元 ℓ 進表現の同型類と一対一対応すると信じられている (大域的な Langlands 予想)。これはもちろん大問題であるが、この対応がもし存在すれば、それは保型表現に付随する保型 L 函数と Galois 群の ℓ 進表現に付随する L 函数の一致を要求することによって一意に特徴づけられることが知られている。さて今この大域的な Langlands 対応の存在を仮定してみる。E/F を代数体の d 次拡大とし、E を含む F の代数閉包 $\overline{F}$ を固定する。

(1) $GL(n,\mathbb{A}_F)$ の保型表現 π に対応する $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の ℓ 進表現 ρ を部分群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$ に制限して得られる ℓ 進表現に対応する $GL(n,\mathbb{A}_E)$ の保型表現 $r_E^F(\pi)$ を π の拡大 E/F に対する **base change リフト** という。
(2) $GL(m,\mathbb{A}_E)$ の保型表現 Π に対応する $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$ の m 次元 ℓ 進表現 ρ からの誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}\rho$ は $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の $n:=md$ 次元の ℓ 進表現になるが、これに対応する $GL(n,\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $i_E^F(\Pi)$ を Π の E/F に対する **automorphic induction (保型的誘導)** という。

これらの 2 種のリフトはその定義が大域的な Langlands 対応によっている上に、無限成分が代数性の条件を満たすものに対してしか定義できない。しかし E/F が可解拡大、すなわち Galois 拡大であってその Galois 群 $\mathrm{Gal}(E/F)$ が可解群の場合には、cuspidal 表現からのこれらのリフトが跡公式を使って構成できる [AC]。

8.2. **Twisted 跡公式の導入と新谷等式.** 可解拡大は $\mathrm{Gal}(E/F)$ が巡回群であるいわゆる巡回拡大のタワーであるから、E/F が ℓ 次の巡回拡大の時を考えれば十分である。もともと base change リフトは $G=GL(2)$ で $F=\mathbb{Q}$, E が総実代数体の場合に、古典的な楕円保型形式から Hilbert 保型形式へのリフトとして土井、長沼両氏によって得られたものである [DN]。彼らの証明は L 函数によるものであったが、後に齋藤裕氏がその博士論文において、2.2 で θ を $\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元、$\omega=\mathbf{1}$ とした twisted 跡公式によってこのようなリフトが得られることを示した [Sa]。今日までの twisted 跡公式の歴史はこの論文に始まっている。さらに新谷氏はこの結果を保型表現論で見直すことにより局所 base change リフトの概念を導入し、巡回拡大の base change が以下に述べる指標の等式（新谷等式）で定義できることを示した [Shi]。この後 Langlands が $GL(2)$ の (twisted も含めた) 完全な invariant 跡公式を構成し、それを用いて $GL(2)$ の cuspidal 保型表現に対する巡回 base change リフトを得たこと、またそれにより $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の 2 次元表現に対する Artin 予想の多くの場合が解決されたことはよく知られているところである。

以下記号を少し変更して、$G_n:=\mathrm{Res}_{E/F}GL(n)$, $H_n:=GL(n)_F$ と書く。従って G_n は $GL(n)_E$ を F 上の代数群と見たものである。$\mathrm{N}_{E/F}:G_1(F)=E^\times\ni x\mapsto \det_F(x|E)\in H_1(F)=F^\times$ を E/F の **ノルム** という。ここで $\det_F(x|E)$ は x を F ベクトル空間 E 上の線型写像と見たものの行列式である。E/F は巡回拡大であるから $\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元を σ として、これは $\mathrm{N}_{E/F}(x)=x\sigma(x)\cdots\sigma^{\ell-1}(x)$ となる。この類似として $G_n(F)=GL(n,E)\ni g$ に対して

$$\mathrm{N}_{E/F}(g):=g\sigma(g)\cdots\sigma^{\ell-1}(g)$$

とおく。これはもちろん $H_n(F)$ に入るとは限らないが、$\sigma(\mathrm{N}_{E/F}(g))=g^{-1}(\mathrm{N}_{E/F}(g))g$ であるから $\mathrm{N}_{E/F}(g)$ の共役類は F 上定義されている。[Ko1, Th.4.1] により F 上定義された共役類は F 有理点を含むから、$\mathrm{N}_{E/F}(g)$ の共役類に含まれる $H_n(F)$ の共役類 $\mathcal{N}_{E/F}(g)$ がある。しかも $GL(n)$ なので $\mathcal{N}_{E/F}(g)$ は一意である。一方 $\mathcal{N}_{E/F}(g)=\mathcal{N}_{E/F}(g')$ であるためにはある $x\in G_n(F)$ に対して $g'=\mathrm{Ad}_\sigma(x)g$ であることが必要十分である。こうして $G_n(F)$ の σ 半単純な σ 共役類の集合 $\mathfrak{O}_\sigma(G_n)$ から $H_n(F)$ の半単純共役類の集合 $\mathfrak{O}(H_n)$ への **ノルム**

$$\mathcal{N}_{E/F}:\mathfrak{O}_\sigma(G_n)\longrightarrow\mathfrak{O}(H_n)$$

が得られた。

$\Pi\in\Pi_{\mathrm{adm}}(G_n(F_v))$ が $\sigma(\Pi):=\Pi\circ\sigma^{-1}$ と同型な時、Π は σ **安定** であるという。σ 安定な Π に対しては intertwiner $\Pi(\sigma):\Pi\xrightarrow{\sim}\sigma^{-1}(\Pi)$ が 1 の ℓ 乗根倍を除いて定まる。Π が generic、すなわち Whittaker モデルを持つ場合にはこの $\Pi(\sigma)$ を Whittaker ベクトルを保つものとして ℓ 巾乗根倍のの任意性を取り除ける。$GL(n)$ の場合には既約 tempered 表現や cuspidal 保型表現の局所成分は全て generic なので、我々の考える Π に対する $\Pi(\sigma)$

は一意に定まる。さて、以上の下で Π の σ 指標を

$$\Theta_{\Pi,\sigma}(f) := \mathrm{tr}(\Pi(f)\Pi(\sigma)), \quad f \in C_c^\infty(G_n(F_v))$$

と定める。これは Schwartz 超函数だが、v が有限素点の場合には σ 正則半単純な元の集合上の局所可積分函数になることが知られている [C]。無限素点での局所 base change はその Langlands パラメタから直接定義されるので、以下では有限素点を考える。このとき σ 安定な $\Pi \in \Pi_{\mathrm{adm}}(G_n(F_v))$ が $\pi \in \Pi_{\mathrm{adm}}(H_n(F_v))$ の **base change リフト** であるとは、任意の $\mathcal{N}_{E/F}(g)$ が正則半単純な $g \in G_n(F_v)$ に対して **新谷等式**

$$\Theta_{\Pi,\sigma}(g) = \Theta_\pi(\mathcal{N}_{E/F}(g))$$

が成り立つこととする。ここで Θ_π は π の指標である。さらに $G_n(\mathbb{A}) = GL(n, \mathbb{A}_E)$ の保型表現 Π が $H_n(\mathbb{A})$ の保型表現 π の base change リフトであるとは、各素点 v で Π_v が π_v の base change リフトになっていることとする。このようにして Langlands 函手性を経由して定義されていた base change リフトが表現論の言葉で (予想を介さず) 定義できた。一般に 予想 8.1 で ϕ が ${}^LG$ のある自己同型 ${}^L\theta$ による不変部分の ${}^LG$ への埋め込み $({}^LG)^{{}^L\theta} \hookrightarrow {}^LG$ であるときには、対応するリフトを表現論的に定義できるものと期待されている。このようなリフトを **twisted endoscopic lift** という。なお ${}^L\theta$ を与えることは 2.2 で述べた G の外部自己同型 θ と $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の指標 ω を与えることに同値であり、これが 2.2 の定義の動機となっている (cf. [KS])。

8.3. **軌道積分の transfer と fundamental lemma.** 上の新谷等式は跡公式の比較から得られると期待されるアウトプットであるが、そのために必要なインプットは $G_n(F_v)$ 上の σ invariant 超函数の $H_n(F_v)$ 上の invariant 超函数への transfer である。この transfer は $\mathcal{N}_{E/F}$ に対応する軌道積分の対応として定義される。$\mathcal{N}_{E/F}(\gamma)$ が正則半単純であるような $\gamma \in G_n(F_v)$ に対して

$${}_\sigma I(\gamma, \phi) := |D_\sigma(\gamma)|_v^{1/2} \int_{T_{\gamma,\sigma}(F_v)\backslash G_n(F_v)} \phi(g^{-1}\delta\sigma(g))\, dg$$

とおく。ここで $T_{\gamma,\sigma}(F_v) = \{g \in G_n(F_v) \mid g^{-1}\gamma\sigma(g) = \gamma\}$ である。$H_n(F_v)$ 上の通常の軌道積分 $I^H(\gamma_H, f^H)$, $f^H \in C_c^\infty(H_n(F_v))$ も同様に定義される。

命題 8.3 ([AC] I. Prop.3.1). *(i)* $f \in C_c^\infty(G_n(F_v))$ に対して $f^H \in C_c^\infty(H_n(F_v))$ であって、任意の正則半単純な $\gamma_H \in H_n(F_v)$ に対して

$$I^H(\gamma_H, f^H) = \begin{cases} {}_\theta I(\gamma, \phi) & \gamma_H \in \mathcal{N}_{E/F}(\gamma) \text{ のとき} \\ 0 & \gamma_H \text{ が } \mathcal{N}_{E/F} \text{ の像に入っていないとき} \end{cases}$$

なるものが存在する。
(ii) 逆にノルムでない正則半単純な任意の γ_H で軌道積分が消えているような $f^H \in C_c^\infty(H_n(F_v))$ に対して $\phi \in C_c^\infty(G_n(F_v))$ で上の条件を満たすようなものが存在する。

すなわち局所的には正則軌道積分の transfer は再び正則軌道積分であることが保証された。次にアデール群上の正則軌道積分の transfer が再び正則軌道積分であること示さねばならない。これは次の **fundamental lemma** から従う。有限個を除く全ての有限素点 v で $G_{n,v}$ は 8.1 の意味で不分岐であり、従って $G_n(F_v)$ は hyperspecial な極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_v$ を持つのだった。$G_n(F_v)$ 上のコンパクト台付き両側 $\mathbf{K}_v$ 不変な函数からなる (古典的な) Hecke 環を $\mathcal{H}(G_n)_v$ と書く。$\mathbf{T}_n$ を $G_{n,v}$ の F 上定義された Borel 対 $(\mathbf{B}_{n,v}, \mathbf{T}_{n,v})$ をなす極大トーラス (対角行列のなす部分群) とし、W_v を $\mathbf{T}_{n,v}$ の $G_{n,v}$ での相対 Weyl 群とする。このとき **佐武同型** $\mathcal{H}(G_n)_v \ni f \mapsto f^\vee \in \mathbb{C}[\widehat{\mathbf{T}}_n]^{W_v}$ を

$$f^\vee(t_{\Pi_v}) = \mathrm{tr}\Pi_v(f), \quad \forall\Pi_v = I_{\mathbf{B}}(\chi),\ \chi \text{ は不分岐}$$

によって定める。同様に $H_{n,v}$ に対する佐武同型 $\mathcal{H}(H_n)_v \ni f^H \mapsto f^{H,\vee} \in \mathbb{C}[\widehat{\mathbf{T}}_n^H]^{W_v^H}$ も定義する。これらの群の L 群はそれぞれ ${}^LG_n = GL(n,\mathbb{C})^\ell \rtimes W_F$, ${}^LH_n = GL(n,\mathbb{C}) \times W_F$ で与えられる。ただし ${}^LG_n$ において W_F は $\mathrm{Gal}(E/F)$ を経由して作用し、その作用は $\sigma(x_1,\ldots,x_\ell) = (x_2,\ldots,x_\ell,x_1)$ で与えられる。従って対角埋め込み

$$r_E^F : {}^LH_{n,v} \ni g \times w \longmapsto (g,\ldots,g) \rtimes w \in {}^LG_{n,v}$$

は 予想 8.1 の L 群の射の条件を満たす。Base change リフトは (Langlands 函手性を認めれば) この射に対応するリフトなのだが、この r_E^F と佐武同型を使って

$$r_E^F : \mathcal{H}(G_n)_v \ni f \longmapsto f^\vee \in \mathbb{C}[\widehat{\mathbf{T}}_n]^{W_v} \xrightarrow{r_E^F} \mathbb{C}[\widehat{\mathbf{T}}_n^H]^{W_v^H} \ni f^{\vee,H} \longmapsto f^H \in \mathcal{H}(H_n)_v$$

と定める。

命題 8.4 (Fundamental lemma, [C2], [Lab2]). *$f \in \mathcal{H}(G_n)_v$ と $f^H := r_E^F(f) \in \mathcal{H}(H_n)_v$ に対して 命題 8.3 の主張が成り立つ。*

文献を見ればわかるようにこの結果は $GL(n)$ 以外の場合も含めて証明されている。証明の鍵は Kottwitz [Ko4] による f f^H が共に Hecke 環の単位元の場合の同様の主張 (building を使って示される) であり、Clozel と Labesse の貢献はそれを Hecke 環の任意の元に拡張したことである。これ自身も **Deligne-Kazhdan の simple version** と呼ばれる簡略化された跡公式により証明される。これはテスト函数 $f = \bigotimes_v f_v$ がある素点 v_1 で $G(F_{v_1})$ の楕円的な正則半単純元の集合に台を持ち、別の有限素点 v_2 で supercuspidal な表現の行列成分になっていれば、跡公式が

$$\sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{unit}}(G(\mathbb{A}))} m_{\mathrm{cusp}}(\pi)\mathrm{tr}\pi(f) = \sum_{\substack{\gamma \in G(F)_{\mathrm{ell}} \\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Ad}(G(F))}} a^G(\gamma) I(\gamma, f)$$

と単純化するというものである。このような simple version は他にも Flicker-Kazhdan によるもの [FK] などがあり、p 進群上の調和解析 (cf. [Ka]) や有限体上の 1 変数函数体の場合の Langlands 対応の証明 [LRS] などの重要な応用を持つ。何より、これを 命題 8.3、命題 8.4 と組み合わせることにより、局所 base change リフトの存在が証明できる。すなわち、

定理 8.5 (Local base change, [AC] I. Th.6.2). *(i) 任意の $\pi \in \Pi_{\mathrm{temp}}(H_n(F_v))$ は唯一つの base change リフト $\Pi \in \Pi_{\mathrm{temp}}(G_n(F_v))$ を持つ。Π は σ 安定である。*
(ii) 逆に σ 安定な $\Pi \in \Pi_{\mathrm{temp}}(G_n(F_v))$ は少なくとも一つの $\pi \in \Pi_{\mathrm{temp}}(H_n(F_v))$ の base change リフトになっている。

他に base change リフトが反傾表現を反傾表現に持っていくことや、$\chi(\det)$ でひねった表現を $\chi(\mathrm{N}_{E/F}(\det))$ でひねった表現に持っていくこと、さらには Rankin 積と呼ばれる保型 L 因子を保つことなども示されている [AC, I. Prop.6.8, Prop.6.9]。

8.4. **跡公式の比較と base change リフト、automorphic induction.** 以下簡単のために $G := G_n$, $H := H_n$ と書こう。前節で用意した局所調和解析の結果を使って二つの跡公式

$$\sum_{M \in \mathcal{L}_\sigma} \frac{|W^{M,\sigma}|}{|W^{G,\sigma}|} \sum_{\gamma \in \sigma(M(F))_{M,S}} a_\sigma^M(S,\gamma)_\sigma I_M(\gamma, f)$$
$$= \sum_{M \in \mathcal{L}_\sigma} \frac{|W^{M,\sigma}|}{|W^{G,\sigma}|} \int_{\Pi(M)^\sigma} a_\sigma^M(\Pi)_\sigma I_M(\Pi, f)\, d\Pi,$$

$$\sum_{L\in\mathcal{L}^H}\frac{|W^L|}{|W^H|}\sum_{\gamma_H\in(L(F))_{L,S}} a^L(S,\gamma_H)I^H_L(\gamma_H,f^H)$$
$$=\sum_{L\in\mathcal{L}^H}\frac{|W^L|}{|W^H|}\int_{\Pi(L)} a^L(\pi)I^H_L(\pi,f^H)\,d\pi$$

を比較することになる。この比較の過程は複雑で長大な帰納法によるため、ここでは省略し、比較の結果得られる定理を引用するにとどめる。いずれにせよ invariant 跡公式を確立したおかげで、命題 8.3, 8.4 のような単純な invariant 超函数の transfer から跡公式の項ごとの等式が引き出せることが要点である。以下 $f\in\mathcal{H}(G(F_S))$ に 命題 8.3 で (一意ではないが) 対応する $\mathcal{H}(H(F_S))$ の元を f^H と、$\mathcal{N}_{E/F}(\gamma)$ を γ^H と書くことにする。同様に σ 安定な $\Pi\in\Pi_{\mathrm{temp}}(G(F_v))$ に対して 定理 8.5 によってそれにリフトする π の集合を Π^H と書く。

幾何サイドについては

定理 8.6 ([AC] II. §5, Th.A). 素点の有限集合 S を十分大きく取ったとき、

$$(8.1)\qquad {}_\sigma I_M(\gamma,f)=I_{M^H}(\gamma^H,f^H),\quad \gamma\in M(F_S),\ f\in\mathcal{H}(G(F_S)),$$
$$(8.2)\qquad a^M_\sigma(S,\gamma)=a^{M^H}(S,\gamma^H)$$

が成り立つ。

次にスペクトルサイドについて。$M\in\mathcal{L}_\sigma$ に対して、$M(F_S)$ の σ 不変な standard 表現の同型類の集合を $\Sigma_\sigma(M(F_S))$ と書く。Langlands 分類から互いに逆行列である整数係数行列 $(\Gamma(R,\Pi))_{R\in\Sigma_\sigma(M(F_S)),\Pi\in\Pi_{\mathrm{adm},\sigma}(M(F_S))}$, $(\Delta(\Pi,R))_{\Pi\in\Pi_{\mathrm{adm},\sigma}(M(F_S)),R\in\Sigma_\sigma(M(F_S))}$ があって

$$\mathrm{tr}(R_\sigma(f))=\sum_{\Pi\in\Pi_{\mathrm{adm},\sigma}(M(F_S))}\Gamma(R,\Pi)\mathrm{tr}(\Pi_\sigma(f)),$$
$$\mathrm{tr}(\Pi_\sigma(f))=\sum_{R\in\Sigma_\sigma(M(F_S))}\Delta(\Pi,R)\mathrm{tr}(R_\sigma(f))$$

が成り立つ。同様に $(\Gamma(\rho,\pi))_{\rho\in\Sigma(M^H(F_S)),\pi\in\Pi_{\mathrm{adm}}(M^H(F_S))}$, $(\Delta(\pi,\rho))_{\pi\in\Pi_{\mathrm{adm}}(M^H(F_S)),\rho\in\Sigma(M^H(F_S))}$ も定まる。$\pi\in\Pi_{\mathrm{adm}}(M^H(F_S))$, $R\in\Sigma_\sigma(M(F_S))$ に対して

$$\Delta(\pi,R):=\ell^{|S_{\mathrm{inert}}|}\sum_{\substack{\rho\in\Sigma(M^H(F_S))\\ \rho\text{ は }R\text{ にリフト}}}\Delta(\pi,\rho)$$

とおく。ここで S_{inert} は $E\otimes_F F_v$ が体であるような $v\in S$ の集合である。π,Π が S の外で不分岐な時、これを使って

$$\delta(\pi,\Pi):=\sum_{R\in\Sigma_\sigma(M(F_S))}\Delta(\pi_S,R)\Gamma(R,\Pi_S),\quad \pi\in\Pi_{\mathrm{adm}}(M^H(F_S)),\ \Pi\in\Pi_{\mathrm{adm},\sigma}(M(F_S)),$$
$$a^{M^H}(\Pi^H):=\ell^{-\dim\mathfrak{a}_L}\sum_{\substack{\pi\in\Pi_{\mathrm{adm}}(M^H(F_S))\\ \pi\text{ は }\Pi\text{ にリフト}}} a^{L^H}_{\mathrm{disc}}(\pi)\delta(\pi,\Pi)r^M_L(\Pi_\lambda)$$

とおく。

定理 8.7 ([AC] II. §9, Th.B). S を十分に大きく取ったとき、

$$(8.3)\qquad {}_\sigma I_M(\Pi,f)=I_{M^H}(\Pi^H,f^H),\quad \Pi\in\Pi_{\mathrm{unit}}(M(\mathbb{A}))^\sigma,\ f\in\mathcal{H}(G(F_S)),$$
$$(8.4)\qquad a^M_\sigma(\Pi)=a^{M^H}(\Pi^H),\quad \Pi\in\Pi_{\mathrm{unit}}(M(\mathbb{A}))^\sigma$$

が成り立つ。

Invariant 跡公式の証明がそうであったように、これらの定理も同時に、一つの帰納的な議論によって示される。すなわち Levi 部分群に対してこれらの定理を共に仮定して、証明を行う。

これらから base change リフトを引き出す鍵は、上で $f = \bigotimes_v f_v$ の S の外の成分 $f^S := \bigotimes_{v \notin S} f_v$ を不分岐な Hecke 環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}^S)//\mathbf{K}^S)$ の全体を走らせてよいことである。この $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}^S)//\mathbf{K}^S)$ という巨大な環による対称性と、保型 L 函数の持つ強い局所と大域の関連性 [JS] を組み合わせて、大域的な base change が得られる。

定理 8.8 (global base change, [AC] III. Th.4.2, Th.5.1). *E/F の拡大次数 ℓ は素数であるとする。$\mathbb{A}^\times/F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ の非自明な指標 η を一つ固定する。*
(i) $H_n(\mathbb{A})$ の既約 cuspidal 表現 π が $\eta(\det)\pi \not\simeq \pi$ を満たすとき、π は唯一つの $G_n(\mathbb{A})$ の既約 cuspidal 表現 Π にリフトする。Π は σ 安定。
(ii) $H_n(\mathbb{A})$ の既約 cuspidal 表現 π が $\eta(\det)\pi \simeq \pi$ を満たすとき、$G_{n/\ell}(\mathbb{A})$ の既約 cuspidal 表現 Π があって π は

$$\mathrm{Ind}_{P_{n/\ell}(\mathbb{A})}^{G_n(\mathbb{A})}[(\Pi \otimes \sigma(\Pi) \otimes \cdots \otimes \sigma^{\ell-1}(\Pi)) \otimes \mathbf{1}_{U_{n/\ell}(\mathbb{A})}]$$

にリフトする。ここで $P_{n/\ell}$ は Levi 成分が $(G_{n/\ell})^\ell$ に同型な G_n の放物型部分群である。特に ℓ が n を割り切らないときには、上のような cuspidal 表現 π は存在しない。
(iii) 逆に上の (i), (ii) の様な形の $G_n(\mathbb{A})$ の保型表現はそれぞれ (i), (ii) のような π のリフトである。
(iv) これらのリフトは有限個を除く全ての素点でリフトであるという条件だけで特徴づけられる。

なお、cuspidal な π, π' が同一の Π にリフトするのは $\pi' = \eta^j(\det)\pi$, $(0 \le \exists j \le \ell - 1)$ の時だけであることが、[JS] の L 函数による $GL(n)$ の保型表現の分類からわかる。特に、上の定理で (i) の場合は ℓ 個の異なる cuspidal 表現が Π にリフトし、(ii) のような $G_n(\mathbb{A})$ の保型表現にリフトする π は唯一であることが従う。一方 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$ の ℓ 進表現 ρ に対して $\mathrm{res}_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}(\mathrm{ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}(\rho)) = \rho \oplus \eta\rho \oplus \cdots \oplus \eta^{\ell-1}\rho$ であった。η は類体論により $\mathrm{Gal}(E/F)$ の指標と同一視している。これと Langlands 予想の要請を読み合わせると、実は **上の定理の (ii) において、π は Π の automorphic induction $i_E^F(\Pi)$ であることがわかる**。こうして得られた automorphic induction と、ユニタリ群の志村多様体を使って構成した Langlands 対応の特殊な場合を組み合わせると、特殊だが E/F が Galois 拡大でない場合の automorphic induction が作れる [Ha]。これが昨年得られた局所 Langlands 対応の証明 [HT], [He] で主要な役割を果たしたことは記憶に新しい。

9. Hecke 作用素の Lefschetz 数

最後に跡公式の幾何への応用として、対称空間を数論的部分群の作用で割った多様体のコホモロジー上の Hecke 作用素の Lefschetz 数を計算した Arthur の結果を紹介する [A13]。理由はこれが、跡公式の最も重要な応用の一つである、志村多様体のゼータ函数の決定に現れる表現論的な議論のプロトタイプだからである。$\mathbf{G}$ を実簡約群から来る **離散系列表現を持つ** 半単純 Lie 群とし、Γ をその数論的部分群とする。Γ はトーションを持たないよう十分小さく (neat に) 取ることにする。すると $\mathbf{G}$ の対称空間 $X = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ は $\mathbf{G}$ の極大コンパクト部分群) を Γ で割った数論商 $X_\Gamma := \Gamma\backslash X$ は locally symmetric なリーマン多様体である。$\mathbf{G}$ の有限次元表現 (μ, V_μ) に対して、X_Γ 上の局所定数層

$$\mathcal{F}_\mu := V_\mu \times_\Gamma \mathbf{G}/\mathbf{K}$$

が定まり、これに係数を持つ X_Γ 上の 2 乗可積分な微分形式の複体のコホモロジー、いわゆる L^2 コホモロジー $H^i_{(2)}(X_\Gamma, \mathcal{F}_\mu)$ が考えられる [SZ]。Γ に対する Hecke 作用素 h は Hecke 対応によって X_Γ, $\mathcal{F}_\mu$ 従って L^2 コホモロジーに作用している。

$$H^i_{(2)}(h, \mathcal{F}_\mu) : H^i_{(2)}(X_\Gamma, \mathcal{F}_\mu) \longrightarrow H^i_{(2)}(X_\Gamma, \mathcal{F}_\mu).$$

Invariant 跡公式と松島・村上の公式を組み合わせることによって、この作用の Lefschetz 数

$$\mathcal{L}(h, \mu) := \sum_i (-1)^i \mathrm{tr} H^i_{(2)}(h, \mathcal{F}_m u)$$

を計算しよう。

9.1. **松島・村上の公式.** 例によって問題をアデール群の状況に持っていく。G を $\mathbb{Q}$ 上定義された連結簡約群とし、$G(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_\infty$ を固定し、$\mathbf{K}'_\infty := \mathfrak{A}_G \mathbf{K}_\infty$ とおく。$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$ で $\mathbb{Q}$ のアデール環を表す。数論的部分群の定義から、$G(\mathbb{A}_f)$ の開コンパクト部分群 K があって、$\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K$ が成り立つ。このとき $\{x_1 = 1, \ldots, x_h\}$ を $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{R}) \times K$ の代表系として

$$M_K := G(\mathbb{Q})\backslash X_\infty \times G(\mathbb{A}_f)/K, \quad X_\infty := G(\mathbb{R})/\mathbf{K}_\infty = \coprod_{i=1}^h \Gamma_i \backslash X_\infty, \quad X_\infty := G(\mathbb{R})/\mathbf{K}'_\infty$$

が成り立つ。ここで $\Gamma_i := \mathrm{Ad}(x_i)K \cap G(\mathbb{Q})$ は $G(\mathbb{R})$ の数論的部分群になっている。この状況では、Hecke 作用素はコンパクト台を持ち両側 K 不変な $G(\mathbb{A}_f)$ 上の函数のなす畳み込み代数 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K)$ の元である。(μ, V_μ) を G の有限次元既約 $\mathbb{Q}$ 有理的表現とすれば、やはり M_K 上の局所定数層

$$\mathcal{F}_\mu = V_\mu(\mathbb{C}) \times_{G(\mathbb{Q})} (X_\infty \times G(\mathbb{A}_f))$$

ができる。こうして $h \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K)$ の L^2 コホモロジー $H^i_{(2)}(M_K, \mathcal{F}_\mu)$ への作用 $H^i_{(2)}(h, \mathcal{F}_\mu)$ 及び、その Lefschetz 数

$$\mathcal{L}(h, \mu) := \sum_i (-1)^i \mathrm{tr} H_{(2)}(h, \mathcal{F}_\mu)$$

が定義される。

この Lefschetz 数を $G(\mathbb{A})$ の保型表現に結びつけるには松島・村上の定理を用いる。既約 $(\mathfrak{g}_\infty(\mathbb{C}), \mathbf{K}'_\infty)$ 加群 π_∞ に対して μ 係数の $(\mathfrak{g}_\infty(\mathbb{C}), \mathbf{K}'_\infty)$ コホモロジー

$$H^i(\mathfrak{g}_\infty(\mathbb{C}), \mathbf{K}'_\infty; \pi_\infty \otimes \mu) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}'_\infty}(\wedge^i (\mathfrak{g}_\infty(\mathbb{C})/\mathfrak{k}'_\infty(\mathbb{C})), \pi_\infty \otimes \mu)$$

が定義されていた (Casimir 作用素が $\pi_\infty \otimes \mu$ に自明に作用するときはこの式で与えられる。それ以外の時は消えている)。π_∞ の Euler-Poincaré 標数を

$$\chi_\mu(\pi_\infty) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(\mathfrak{g}_\infty(\mathbb{C}), \mathbf{K}'_\infty; \pi_\infty \otimes \mu)$$

と定める。このとき Borel-Casselman による拡張された松島・村上の定理によれば、$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K)$ 同変な同型

$$H^i_{(2)}(M_K, \mathcal{F}_\mu) \simeq \bigoplus_{\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f \in \Pi(G(\mathbb{A}))_{\xi_\mu^{-1}}} m_{\mathrm{disc}}(\pi) \big(H^i(\mathfrak{g}_\infty(\mathbb{C}), \mathbf{K}'_\infty; \pi_\infty \otimes \mu) \otimes \pi_f^K\big)$$

がある。ここで ξ_μ は $\mu|_{\mathfrak{A}_G}$ であり、$\Pi(G(\mathbb{A}))_{\xi_\mu^{-1}}$ は $G(\mathbb{A})$ の既約許容表現でその $\mathfrak{A}_G$ への制限が ξ_μ^{-1} であるものの同型類の集合である。$m_{\mathrm{disc}}(\pi)$ はもちろん π の $L^2_d(G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}))$

での重複度であり、π_f^K は π_f の K 不変部分 ($\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K)$ 加群になる) である。これにより、$\mathcal{L}(h,\mu)$ は

$$\mathcal{L}(h,\mu) := \sum_{\pi=\pi_\infty\otimes\pi_f\in\Pi(G(\mathbb{A}))_{\xi_\mu^{-1}}} m_{\mathrm{disc}}(\pi)\chi_\mu(\pi_\infty)\mathrm{tr}\pi_f(h) \tag{9.1}$$

と書ける。

9.2. **跡公式の導入.** $m_{\mathrm{disc}}(\pi)$ がわからないため (9.1) は決して満足のいくものとはいえない。そこで跡公式を使ってこれを (幾何的な意味での) 局所的な量で表したい。そのために次のようなテスト函数を構成する。

$\pi_\infty\in\Pi_{\mathrm{temp}}(G(\mathbb{R}))$ のときには

$$\chi_\mu(\pi_\infty) = \begin{cases}(-1)^{q(G)} & \pi_\infty \text{ が } \tilde{\mu} \text{ と同じ無限小指標を持つ離散系列表現の時,}\\ 0 & \text{それ以外の時}\end{cases}$$

であることに注意して、**Euler-Poincaré 函数** $f_\mu\in\mathcal{H}(G(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_G,\xi_\mu^{-1})$ を

$$\mathrm{tr}\pi_\infty(f_\mu) = \begin{cases}(-1)^{q(G)} & \pi_\infty \text{ が } \tilde{\mu} \text{ と同じ無限小指標を持つ離散系列表現の時,}\\ 0 & \pi_\infty \text{ がそれ以外の tempered 表現の時}\end{cases}$$

となるものと定める。但し、$q(G)$ は対称空間 X_∞ の次元の 1/2 である。このような f_μ が存在することは、trace Paley-Wiener 定理の帰結である離散系列表現の擬行列係数 (pseudo-coefficient) の存在から直ちに従う [CD, II, Cor. à Prop.5]。$f := f_\mu\otimes h$ が我々のテスト函数である。

補題 9.1. *$f = f_\mu\otimes h$ のとき、invariant 跡公式のスペクトルサイドは $\mathcal{L}(h,\mu)$ に一致する。*

$$\mathcal{L}(h,\mu) = I(f).$$

証明. まず f_μ が 7 の意味で無限素点で cuspidal であることから、我々の跡公式は 定理 7.1 の形をしている。すなわち、

$$\begin{aligned}I(f) &= \sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(G)} a_{\mathrm{disc}}(\pi)I_G(\pi,f)\\ &= \sum_{L\in\mathcal{L}}\frac{|W^L|}{|W|}\sum_{w\in W_{L,L}^{\mathrm{reg}}}\frac{1}{|\det(w-1|\mathfrak{a}_L^G)|}\mathrm{tr}(M_{Q|Q}(w,0)\mathcal{I}_Q(0,f_\mu\otimes h))\end{aligned}$$

であった。この中で $L\neq G$ の項が全て消えることをいえば補題は証明されたことになる。ところが f_μ の取り方から、$f_\mu\otimes h$ の作用は singular な無限小指標を持つ表現の寄与を全て消してしまう。右辺の $\mathcal{I}_Q$ $(Q\neq G)$ に現れる表現は $\det(w-1|\mathfrak{a}_L^G)\neq 0$ であるような w で固定されるような無限小指標、すなわち singular な無限小指標を持つから補題は証明された。 □

これと (6.12) から

$$\mathcal{L}(h,\mu) = \sum_{M\in\mathcal{L}}\frac{|W^M|}{|W|}\sum_{\gamma\in(M(\mathbb{Q}))_{M,S}} a^M(S,\gamma)I_M(\gamma,f)$$

を得る。軌道積分 $I_G(\gamma)$ は局所的な軌道積分の Euler 積に分解していたから、$I_G(\gamma,f_\mu\otimes h) = I_G(\gamma,f_\mu)I_G(\gamma,h)$ が成り立つ。一般には $h=h_vh^v$ ($h_v\in\mathcal{H}(G(F_v))$, $h^v\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^v))$

として **splitting formula** [A10, Prop.9.1]

$$I_M(\gamma, f_\mu \otimes h) = \sum_{M_1, M_2 \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(M_1, M_2) \widehat{I}_M^{M_1}(\gamma, \phi_{M_1}^{M_1}(\overline{(f_\mu \otimes h^v)_{P_1}})) \widehat{I}_M^{M_2}(\gamma, \phi_{M_2}^{M_2}(\overline{(h_v)_{P_2}}))$$

が成り立つが、$f_\mu \otimes h^v$ は無限素点で cuspidal なことから $\phi_{M_1}^{M_1}(\overline{(f_\mu \otimes h^v)_{P_1}})$ は $M_1 = G$ の時以外は消えている。$d_M^G(G, M_2)$ は $M_2 = M$ の時 1 でそれ以外では消えているので、結局

$$I_M(\gamma, f_\mu \otimes h) = I_M^G(\gamma, f_\mu \otimes h^v) \widehat{I}_M^M(\gamma, \phi_M^M(\overline{(h_v)_P}))$$

が成り立つ。これを h_v が Hecke 環の単位元でない v に順次適用して結局、

$$\mathcal{L}(\mu, h) = \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \sum_{\gamma \in (M(\mathbb{Q}))_{M,S}} a^M(S, \gamma) I_M^G(\gamma, f_\mu) \widehat{I}_M^M(\gamma, \phi_M^M(\overline{h}_P)) \tag{9.2}$$

が得られる。

9.3. $I_M^G(\gamma, f_\mu)$. (9.2) において、$\widehat{I}_M^M(\gamma, \phi_M^M(\overline{h}_P))$ は本質的に軌道積分であるから、あとは $I_M^G(\gamma, f_\mu)$ を計算すればよい。[A0, Th.9.1] の簡単な変形により、γ が $M(\mathbb{R})$ の $\mathfrak{A}_M$ を除いてコンパクトな Cartan 部分群 $T_G(\mathbb{R})$ の正則半単純元の時には

$$I_M(\gamma, f_\mu) = \frac{(-1)^{\dim \mathfrak{a}_M^G}}{\mathrm{meas}(T_G(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_M)} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{R}))_{\xi_\mu^{-1}}} |D(\gamma)|_\infty^{1/2} \Theta_\pi(\gamma) \mathrm{tr}\widetilde{\pi}(f_\mu) \tag{9.3}$$

が成り立っている。ここで $\Pi_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{R}))_{\xi_\mu^{-1}}$ は $\mathfrak{A}_G$ への制限が ξ_μ^{-1} であるような $G(\mathbb{R})$ の既約離散系列表現の同型類の集合である。これを $M(\mathbb{Q})$ の一般の元に拡げたい。

まず G_∞ の inner form $\overline{G}$ で $\mathfrak{A}_{\overline{G}} = \mathfrak{A}_G$ を除いてコンパクトであるものを取る。5.6.1 で述べた Langlands 分類において $\Phi(G_\infty) = \Phi(\overline{G}_\infty)$ であり、$\Pi_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{R}))_{\xi_\mu^{-1}}$ 内の L パケットは $\overline{G}(\mathbb{R})$ の既約表現たちでパラメタライズされる。

$$\Pi_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{R})) = \coprod_{\tau \in \Pi(\overline{G}(\mathbb{R}))_{\xi_\mu^{-1}}} \Pi_{\mathrm{disc}}(\tau).$$

そこでこのパケット $\Pi_{\mathrm{disc}}(\tau)$ に対する **stable 指標** を

$$SI_M(\Pi_{\mathrm{disc}}(\tau), \gamma) := (-1)^{q(G)} |D_M^G(\gamma)|_\infty^{1/2} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\tau)} \Theta_\pi(\gamma), \quad \gamma \in G(\mathbb{R})_{\mathrm{reg}}$$

と定める。Euler-Poincaré 函数 f_μ は **stable cuspidal**、即ち Fourier 変換

$$\Pi_{\mathrm{temp}}(G(\mathbb{R}))_{\xi_\mu^{-1}} \ni \pi \longmapsto \mathrm{tr}\pi(f_\mu) \in \mathbb{C}$$

は $\Pi_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{R}))_{\xi_\mu^{-1}}$ の外で消えていて、しかも各 $\Pi_{\mathrm{disc}}(\tau)$ の上で定数函数になっている。よって (9.3) は

$$I_M(\gamma, f_\mu) = \frac{(-1)^{\dim \mathfrak{a}_M^G} |D^M(\gamma)|_\infty^{1/2}}{\mathrm{meas}(M_\gamma(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_M)} \sum_{\tau \in \Pi(\overline{G}(\mathbb{R}))_{\xi_\mu^{-1}}} SI_M(\Pi_{\mathrm{disc}}(\tau), \gamma) \mathrm{tr}\widetilde{\tau}(\overline{f}_\mu) \tag{9.4}$$

となる。ただし、γ は正則半単純ゆえ $M_\gamma = T_G$ であり、$\mathrm{tr}\widetilde{\tau}(\overline{f}_\mu) := (-1)^{q(G)} \mathrm{tr}\widetilde{\pi}(f_\mu), \forall \pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\tau)$ と書いた。この記法はこれが Shelstad [She, §3] によって得られた $f_\mu \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R}))$

の $\overline{G}(\mathbb{R})$ への transfer $\overline{f}_\mu \in \mathcal{H}(\overline{G}(\mathbb{R}))$ に対する $\mathrm{tr}\widetilde{\tau}$ の値であることを意味している。一般の $\gamma \in M(\mathbb{Q})$ に対する式はこの (9.4) の自然な拡張になっている。すなわち、

$$
\begin{aligned}
I_M(\gamma, f_\mu) = &\frac{(-1)^{\dim \mathfrak{a}_M^G} |D^M(\gamma)|_\infty^{1/2}}{\mathrm{meas}(\overline{M}_\gamma(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{M_\gamma})} (-1)^{q(M_\gamma)} \left| \frac{W(M_\gamma, T_{M_\gamma})}{W(M_\gamma(\mathbb{R}), T_{M_\gamma}(\mathbb{R}))} \right| \\
&\times \sum_{\tau \in \Pi(\overline{G}(\mathbb{R}))_{\xi_\mu^{-1}}} SI_M(\Pi_{\mathrm{disc}}(\tau), \gamma) \mathrm{tr}\widetilde{\tau}(\overline{f}_\mu)
\end{aligned} \tag{9.5}
$$

が成り立つ。ただし、$SI_M(\Pi_{\mathrm{disc}}(\tau), \gamma)$ は $T_M(\mathbb{R})_{\mathrm{reg}}$ 上の函数だったものを $T_M(\mathbb{R})$ 全体の上の $W(M, T_M)$ 不変な連続函数に延ばし、それを $M(\mathbb{R})$ 共役で不変になるように $M(\mathbb{R})$ 全体に延ばしたものである。特に γ が半単純でなければこれは 0 である。

9.4. Lefschetz 数と離散系列表現の stable 重複度. 以上をまとめれば次が得られる。

定理 9.2 ([A13] Th.6.1). $h \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K)$ に対して

$$
\mathcal{L}(\mu, h) = \sum_{M \in \mathcal{L}} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_M^G} \frac{|W^M|}{|W|} \sum_{\{\gamma\} \in \mathfrak{O}^M(M)} \frac{\chi(M_\gamma)}{\iota^M(\gamma)} SI_M(\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{\mu}), \gamma) O_\gamma^M(\overline{h}_P)
$$

が成り立つ。ただし、$H(\mathbb{R})$ が離散系列表現を持つような $\mathbb{Q}$ 上の簡約群 H に対して

$$
\chi(H) := \frac{(-1)^{q(H)}}{\mathrm{meas}(\overline{H}_\gamma(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_H)} \left| \frac{W(H, T_H)}{W(H(\mathbb{R}), T_H(\mathbb{R}))} \right| \mathrm{meas}(H(\mathbb{Q})\mathfrak{A}_H \backslash H(\mathbb{A}))
$$

とした。また P を $\mathcal{P}(M)$ の任意の元として

$$
O_\gamma^M(\overline{h}_P) := \int_{M_\gamma(\mathbb{A}_f) \backslash M(\mathbb{A}_f)} \overline{h}_P(m^{-1}\gamma m)\, dm
$$

は $\overline{h}_P$ の γ での軌道積分である。

証明. 前節の結果を考慮すれば、(9.2) において

(1) γ が半単純なことから (M, S) 同値類 $\gamma \in (M(\mathbb{Q}))_{M,S}$ についての和は、単純に半単純共役類 $\{\gamma\} \in \mathfrak{O}^M(M)$ についての和。

(2) γ は G_∞ で楕円的、よって G で楕円的なもののみを走るから、定理 4.4 が使えて

$$
a^M(S, \gamma) = \frac{\mathrm{meas}(M_\gamma(\mathbb{Q})\mathfrak{A}_{M_\gamma} \backslash M_\gamma(\mathbb{A}))}{\iota^M(\gamma)}.
$$

(3) (9.5) に f_μ の定義を用いて

$$
I_M(\gamma, f_\mu) = \frac{(-1)^{\dim \mathfrak{a}_M^G} |D^M(\gamma)|_\infty^{1/2}}{\mathrm{meas}(\overline{M}_\gamma(\mathbb{R})/\mathfrak{A}_{M_\gamma})} (-1)^{q(M_\gamma)} \left| \frac{W(M_\gamma, T_{M_\gamma})}{W(M_\gamma(\mathbb{R}), T_{M_\gamma}(\mathbb{R}))} \right| SI_M(\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{\mu}), \gamma).
$$

(4)

$$
\widehat{I}_M^M(\gamma, \phi_M^M(\overline{h}_P)) = |D^M(\gamma)|_{\mathbb{A}_f}^{1/2} O_\gamma^M(\overline{h}_P).
$$

が成り立つ。これらを代入して $\gamma \in M(\mathbb{Q})$ に対するイデールノルムの積公式 $|D_M(\gamma)|_{\mathbb{A}} = 1$ を使えば、表記の結果を得る。 □

なお $\chi(H)$ の定義は上で $\mu = \mathbf{1}_G$, h を $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K)$ の単位元にした場合、即ち M_K の L^2-Euler 標数の式 (K も十分小さく取っている)

$$
\chi(M_K) = \sum_{M \in \mathcal{L}} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_M^G} \frac{|W^M|}{|W|} \chi(M) SI_M(\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathbf{1}_G), 1) \overline{h}_P(1)
$$

で $M=G$ の項が $\chi(G)/\mathrm{meas}(K)$ であることによっている。

上の結果を得る際には $\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{\mu})$ の元の擬行列係数を使ってテスト函数 f_μ を構成したが、擬行列係数の定義は Fourier 変換の $\Pi_{\mathrm{temp}}(G(\mathbb{R}))$ での値のみをコントロールしていることに注意する。即ちテスト函数の構成が $\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{\mu})$ を経由しているだけで、得られた結果には $H^\bullet(\mathfrak{g}_\infty(\mathbb{C}),\mathbf{K}'_\infty;\pi_\infty\otimes\mu)\neq 0$ となる全ての既約ユニタリ表現 π_∞ の寄与が含まれている。

$$\sum_{\pi\in\Pi(G(\mathbb{A}))_{\xi_\mu^{-1}}} m_{\mathrm{disc}}(\pi)\chi_\mu(\pi_\infty)\mathrm{tr}\pi_f(h).$$

しかし μ の最高ウェイトが正則ならば、そのような π_∞ は $\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{\mu})$ の元のみであり $\chi(\pi_\infty)=(-1)^{q(G)}$ であったから、(9.1) と 定理 9.2 から次を得る。

系 9.3 (離散系列表現の stable 重複度). $m_{\mathrm{disc}}(\pi_\infty,K)$ を π_∞ の $\bigoplus_{i=1}^h L^2(\Gamma_i\backslash G(\mathbb{R}))_{\xi_\mu^{-1}}$ での $\pi_\infty\in\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{\mu})$ の重複度とする。μ の最高ウェイトが正則の時、

$$\sum_{\pi_\infty\in\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{\mu})} m_{\mathrm{disc}}(\pi_\infty,K)$$
$$=(-1)^{q(G)}\sum_{M\in\mathcal{L}}(-1)^{\dim\mathfrak{a}_M^G}\frac{|W^M|}{|W|}\sum_{\gamma\in\mathfrak{O}^M(M)}\frac{\chi(M_\gamma)}{|\iota^M(\gamma)|}SI_M(\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{\mu}),\gamma)O_\gamma^M(\overline{(1_K)}_P)$$

である。ただし、1_K は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K)$ の単位元である。

References

[A0] J. Arthur, *The characters of discrete series as orbital integrals*, Invent. Math. **32** (1976), pp. 205–261.

[A1] ———, *A trace formula for reductive groups I. Terms associated to classes in* $G(\mathbb{Q})$, Duke Math. J. **45** (1978), pp. 911–952.

[A2] ———, *A trace formula for reductive groups II: Applications of a truncation operator*, Comp. Math. **40** (1980), pp. 87–121.

[A3] ———, *The trace formula in invariant form*, Ann. of Math. **114** (1981), pp. 1–74.

[A4] ———, *On the inner product of truncated Eisenstein series*, Duke Math. J. **49** (1982), pp. 35–70.

[A5] ———, *On a family of distributions obtained from Eisenstein series I: Application of the Paley-Wiener theorem*, Amer. Jour. of Math. **104** (1982), pp. 1243–1288, *II: Explicit formulas*, Amer. Jour. of Math. **104** (1982), pp. 1289–1336.

[A6] ———, *A Paley-Wiener theorem for real reductive groups*, Acta Math. **150** (1983), pp. 1–89.

[A7] ———, *A measure on unipotent variety*, Canad. Jour. Math. **37** (1985), pp. 1237–1274.

[A8] ———, *On a family of distributions obtained from orbits*, Canad. J. Math. **38** (1986), no. 1, pp. 179–214.

[A9] ———, *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. J. **56**, No. 2 (1988), pp. 223–293.

[A10] ———, *The invariant trace formula I. Local theory*, Jour. of the Amer. Math. Soc. **1** (1988), pp. 323–383.

[A11] ———, *The invariant trace formula II. Global theory*, Jour. of the Amer. Math. Soc. **1** (1988), pp. 501–554.

[A12] ———, *Intertwining operators and residues I. Weighted characters*, Jour. of Funct. Anal. **84** (1989), pp. 19–84, *II. Invariant distributions*, Composit. Math. **70** (1989), pp. 51–99.

[A13] ———, *The* L^2*-Lefschetz numbers of Hecke operators*, Invent. Math. **97** (1989), pp. 257–290.

[A14] ———, *Towards a stable trace formula*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, pp. 507–517 (electronic).

[AC] ——— and L. Clozel, Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula, Annals of Mathematics Studies, **120**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[BDK] J. Bernstein, P. Deligne, and D. Kazhdan, *Trace Paley-Wiener theorem for reductive p-adic groups*, J. Analyse Math. **47** (1986), pp. 180–192.

[B] A. Borel, *Ensembles fondamentaux pour les groupes arithmétiques*, in Colloque sur la Théorie des Groupes Algébriques (1962 Bruxelles), pp. 23–40, Gauthier-Villars, 1962 (Centre Belge de Recherches Mathématiques).

[B2] ———, *Automorphic L-functions*, in "Automorphic Forms, Representations, and L-functions", Proc. Sympos. in Pure Math. **33**, part 2, AMS, Providence, 1979, pp. 27–62.

[BH] ——— and Harish-Chandra, *Arithmetic subgroups of algebraic groups*, Ann. of Math. **75** (1962), pp. 485–535.

[BoT] ——— and J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. IHES, **27** (1965), pp. 55–165.

[C] L. Clozel, *Characters of non-connected, reductive p-adic groups*, Canad. Jour. Math. **39** (1987), pp. 149–167.

[C2] ———, *The fundamental lemma for stable base change*, Duke Math. J. **61** (1990), pp. 255–302.

[CD] L. Clozel and P. Delorme, *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs*, Invent. Math. **77** (1984), no. 3, pp. 427–453, *II*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **23** (1990), no. 2, pp. 193–228.

[CLL] L. Clozel, J-P. Labesse, R.P. Langlands, Morning Seminar on the Trace Formula, mimeographed notes, IAS, Princeton Univ., 1984.

[D] P. Delorme, *Théorème de Paley-Wiener invariant tordu pour le changement de base* $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, Compositio Math. **80** (1991), no. 2, pp. 197–228.

[DN] K. Doi and H. Naganuma, *On the functional equation of certain Dirichlet series*, Invent. Math. **9** (1969), pp. 1–14.

[DL] M. Duflo and J.-P. Labesse, *Sur la formule des traces de Selberg*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 4e. série, **4** (1971), pp. 193–284.

[FK] Y. Flicker and D. Kazhdan, *A simple trace formula*, J. Analyse Math. **50** (1988), pp. 189–200.

[Go] R. Godement, *Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques*, Séminaire Bourbaki, 1962/63, n. 257.

[Ha] M. Harris, *The local Langlands conjecture for* $\mathrm{GL}(n)$ *over a p-adic field*, $n < p$, Invent. Math. **134** (1998), no. 1, pp. 177–210.

[HT] M. Harris and R. Taylor, *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, preprint, Aug. 30, 1999, over 200 pages.

[He] G. Henniart, *Une preuve simple de la conjecture de Langlands locale pour* $GL(n)$, Prépublication Mathématique, Orsay, 1998.

[JL] H. Jacquet and R.P. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, Lect. Notes in Math. **114**, Springer Verlag, 1970.

[JS] H. Jacquet and J.A. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic representations II*, Amer. Jour. of Math. **103** (1981), pp. 777–815.

[Ka] D. Kazhdan, *Cuspidal geometry of p-adic groups*, J. Analyse Math. **47** (1986), pp. 1–36.

[KnS] A.W. Knapp and E.M. Stein, *Intertwining operators for semisimple Lie groups II*, Invent. Math. **60** (1980), pp. 9–84.

[Ko1] R. Kottwitz, *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. **49** (1982), pp. 785–806.

[Ko2] ———, *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), no. 3, pp. 365–399.

[Ko3] ———, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51** (1984), no. 3, pp. 611–650.

[Ko4] ———, *Base change for unit elements of Hecke algebras*, Composit. Math. **60** (1986), pp. 237–250.

[Ko5] ———, *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. **108** (1992), no. 3, pp. 653–665.

[Ko6] ———, *Harmonic analysis on semisimple p-adic Lie algebras*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, pp. 553–562 (electronic).

[KS] ——— and D. Shelstad, Foundations of twisted endoscopy, Astérisque No. 255 , SMF, 1999.

[Lab] J.P. Labesse, *La formule des traces d'Arthur-Selberg*, Séminaire Bourbaki, (1984–85), n. 636.

[Lab2] ———, *Le lemme fondamental pour changement de base stable*, Duke Math. J. **61** (1990), pp. 519–530.

[LL] ——— and R.P. Langlands, *L-indistinguishability for* $\mathrm{SL}(2)$, Canad. J. Math. **31** (1979), no. 4, pp. 726–785.

[L1] R.P. Langlands, *Eisenstein series* in "Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups", Proc. Sympos. in Pure Math. **9**, Amer. Math. Soc., Providence, 1966, pp. 235–252.

[L2] ———, On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series, Lect. Notes in Math. **544**, Springer, Berlin, Heidelberg, 1976.

[L3] ———, Base change for $GL(2)$, Annals of Math. Studies, **96**, Princeton Univ. Press, 1980.

[L4] ———, Les débuts d'une formule des traces stable, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, **13**, Université de Paris VII, U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1983.

[L5] ———, *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, in "Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups", Math. Surveys Monographs, **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 101–170.

[LR] R.P. Langlands and D. Ramakrishnan eds. The zeta functions of Picard modular surfaces, Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, PQ, 1992.

[Lau] G. Laumon, *Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour* $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$, Compositio Math. **105** (1997), no. 3, pp. 267–359.

[LRS] G. Laumon, M. Rapoport, and U. Stuhler, *$\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence*, Invent. Math. **113** (1993), no. 2, pp. 217–338.

[MW] C. Mœglin and J.L. Waldspurger, Décomposition Spectrale et Séries d'Eisenstein, Une Paraphrase de l'Écriture, Progress in Math. **113**, Birkhäuser, 1994.

[Mu] W. Müller, *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms*, Ann. of Math. (2) **130**, (1989), no. 3, pp. 473–529, *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms. II*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), no. 2, pp. 315–355.

[OW] M.S. Osborne and G. Warner, *The Selberg trace formula. I. Γ-rank one lattices*, J. Reine Angew. Math. **324** (1981), pp. 1–113, *II. Partition, reduction, truncation*, Pacific J. Math. **106**, (1983), no. 2, pp. 307–496, III. Inner product formulae (initial considerations), Mem. Amer. Math. Soc. **44** (1983), no. 283, *IV. Inner product formulae (final considerations)* in "Lie group representations I", (College Park, Md. 1982/1983), Lecture Notes in Math. **1024**, Springer, Berlin-New York, 1983, pp. 112–263, *V. Questions of trace class*, Trans. Amer. Math. Soc. **286** (1984), no. 1, pp. 351–376, *VI. Implications of estimability*, Amer. J. Math. **107** (1985), no. 6, pp. 1369–1437, *VII. Application of the truncation process to the continuous spectrum*, Pacific J. Math. **140** (1989), no. 2, pp. 263–352, *VIII. Contribution from the continuous spectrum*, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991), no. 2, pp. 623–653.

[Rao] R. Rao, *Oribital integrals on reductive groups*, Ann. of Math. **96** (1972), pp. 505–510.

[Ro] J.D. Rogawski, *Trace Paley-Wiener theorem in the twisted case*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), no. 1, pp. 215–229.

[Ro2] ———, Automorphic representations of unitary groups in three variables, Annals of Mathematics Studies **123**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[Sa] H. Saito, Automorphic Forms and Algebraic Extensions of Number Fields, Lectures in Math., Dept. of Math. Kyoto Univ. **8**, Kinokuniya Bookstore, Tokyo, 1975.

[SZ] L. Saper and S. Zucker, *An introduction to L^2-cohomology*, in "Several complex variables and complex geometry", Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989), Proc. Sympos. Pure Math., **52**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 519–534.

[Se] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, in "Atle Selberg Collected Papers" Vol. 1, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1989, pp. 423–463.

[Se2] ———, *Discontinuous groups and harmonic analysis* in Proc. Int. Cong. Math., 1962, pp. 177–189.

[Sha] F. Shahidi, *On certain L-functions*, Amer. Jour. of Math. **103** (1981), pp. 297–355.

[Sha2] ———, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; Complementary series for p-adic groups*, Ann. of Math. **132** (1990), pp. 273–330.

[She] D. Shelstad, *L-indistinguishability for real groups*, Math. Ann. **259** (1982), pp. 385–430.

[Shi] T. Shintani, *On liftings of holomorphic cusp forms* in "Automorphic forms, representations and L-functions", Proc. Sympos. in Pure Math. **33**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 97–110.

[Tm] T. Tamagawa, *Adèles*, in "Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups", Proc. Sympos. in Pure Math. **9**, Amer. Math. Soc., Providence, 1966, pp. 113–121.

[Ta] J. Tate, *Number theoretic background*, in "Automorphic Forms, Representations, and L-functions", Proc. Sympos. in Pure Math. **33**, part 2, AMS, Providence, 1979, pp. 3–26.

[Ti] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, in "Automorphic Forms, Representations, and L-functions", Proc. Sympos. in Pure Math. **33**, part 1, pp. 29–69, .

[W] A. Weil, Basic Number Theory, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Enzeldarstellungen, **114**, Springer Verlag, 1974.

INDEX

九州大学大学院数理学研究科 〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1
E-mail address: takuya@math.kyushu-u.ac.jp