

特殊直交群のある unrefined minimal K-type について

刈山和俊 (尾道短期大学)

§0. 概要

われわれは p -進シンプレクティック群に関する[K]の結果を p -進特殊直交群に拡張できたことをここに報告する. すなわち, $G = SO_N$ のLie環のvery cuspidal 元を定義して, この元に対応する G のあるParahoric部分群のfiltration部分群の1次元表現はMoy-Prasad [MP]の意味で unrefined minimal K-type であり, さらにそれを含む G の既約許容表現が supercuspidal であることを証明することができた.

§1. 直交群

1.1. F を剰余標数が2でない非Archimedes局所体とし, $\mathcal{O}$ をその整数環, そして $\mathfrak{p}$ をその極大イデアルとする. ϖ を $\mathfrak{p}$ のある素元とする. n を2以上のある整数とし, V を F 上の次元が $N = 2n$ または $2n + 1$ のベクトル空間とする. $I = \{\pm 1, \dots, \pm n\}$ とおき, さらに $N = 2n$ のときは, $\tilde{I} = I$ そして $N = 2n + 1$ のときには, $\tilde{I} = I \cup \{0\}$ とする. $\{e_i\}_{i \in \tilde{I}}$ を V の F 上のある基底とし, これより $V = F^N$ と同一視する. F^N における非退化な双1次形式

$$f((x_{-n}, \dots, x_n), (y_{-n}, \dots, y_n)) = \sum_{i \in \tilde{I}} x_i y_{-i}$$

を考察する. J をこの形式 f が $\{e_i\}$ に関して表示する $N \times N$ 対称行列とする.

$\text{End}_F(V)$ を V 上のすべての1次変換のなす環とし, $\tilde{G} = GL_F(V)$ をその乗法群とする. $\tilde{g} = \text{End}_F(V)$ と書く. 形式 f の直交群が

$$G = O_N = \{g \in \tilde{G} \mid f(gv, gw) = f(v, w) \ (v, w \in V)\}$$

$$G^0 = SO_N = G \cap SL_F(V)$$

と与えられる. σ を形式 f で決まる $\text{End}_F(V)$ 上の対合(involution)とする. 実際

$$\sigma(x) = J^{-1t}xJ \quad (x \in \text{End}_F(V))$$

ここで, ${}^t x$ は行列 x の転置とする. すると G と G^0 の Lie 環 $\mathfrak{g}$ が

$$\mathfrak{g} = \{ x \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid x + \sigma x = 0 \}$$

と与えられる.

1.2. G^0 の極大トラス T を

$$T = \{ \text{diag}(t_{-n}, \dots, t_n) \mid t_{-i} t_i = t_0 = 1 \ (i \in I) \}$$

とする. 準同型 $a_i: T \rightarrow GL_1 \ (i=1, \dots, n)$ を $a_i(\text{diag}(t_{-n}, \dots, t_n)) = t_{-i}$ と定義する. するとこれらは T の F 上の代数群の指標群 $X^*(T)$ の整数環 $\mathbb{Z}$ 上のある基底をなす. $X^*(T)$ の中で, $a_{-i} = -a_i$, $a_{ij} = a_i + a_j \ (i, j \in I)$ とする. Σ を (G, T) に

関するルート系とし, 土方 [H] にしたがって, $\Phi = (\Sigma \cup \{0\}) \times \mathbb{Z}$ をおく. すると Φ は拡張されたルート系となり, ある基底 $\tilde{\Pi}$ をもつ. Σ のある基底 Π と, Φ のある基底 $\tilde{\Pi}$ を次のようにとり, 今後それを固定する.

$G = SO_{2n+1}$ について

$$\Sigma = \{ a_{ij} \mid i, j \in I, i \neq \pm j \} \cup \{ a_i \mid i \in I \}$$

$$\Pi = \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}, \alpha_i = a_{i, -i-1} \ (1 \leq i \leq n), \alpha_n = a_n$$

$$\tilde{\Pi} = \{ \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n \}, \xi_0 = (-a_{1,2}, 1), \xi_i = (\alpha_i, 0) \ (1 \leq i \leq n).$$

$G = SO_{2n}$ について

$$\Sigma = \{ a_{ij} \mid i, j \in I, i \neq \pm j \}$$

$$\Pi = \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}, \alpha_i = a_{i, -i-1} \ (1 \leq i \leq n), \alpha_n = a_{n-1, n}$$

$$\tilde{\Pi} = \{ \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n \}, \xi_0 = (-a_{1,2}, 1), \xi_i = (\alpha_i, 0) \ (1 \leq i \leq n).$$

1.3. B を $G^0 = SO_N$ の Bruhat-Tits ビルディングとする. これは Lie 群のリーマン対称空間の拡張物である. $A^* = X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とし, 自然にアフィン空間とみなせる, ここで $\mathbb{R}$ は実数体である. すると Bruhat-Tits [BT1], [T] から, B は G の作用をもち, $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(A^*, \mathbb{R})$ にアフィン同型なアパートとよばれる集合 A を含み,

$$B = \bigcup_{g \in G^0} gA$$

となり, そして G^0 の部分群の作用に関するある条件で特徴づけることができる. また

[BT1-3]から、 $\mathcal{B}$ は G^0 上のvaluationの同値類の集合や、とくに古典群の場合には、 V 上の F -normの同値類の集合という実体をもつ。今後 $\mathcal{B}$ のアパート A を $\{a_i\}$ の双対基底によって $\mathbb{R}^n$ と同一視する。

§2. Parahoric部分群とそのfiltration

2.1. $\tilde{\Pi}$ の真部分集合 θ について、代数群のparahoric部分群のようにして岩堀一松本[IM]が G^0 のparahoric部分群 $P(\theta)$ を定義した。これはBruhat-Tits理論では、ある $p \in A$ について

$$P(\theta) = P_p$$

となり、 $T(\mathcal{O}) = \{\text{diag}(t_{-n}, \dots, t_n) \in G^0 \mid t_i \in \mathcal{O}^\times\}$ と $U_{a, -\langle p, a \rangle} = x_a(p^{-\langle p, a \rangle})$ ($a \in \Sigma$)で生成される G^0 の部分群である。ここで、 $\langle p, a \rangle$ は $A \times A^*$ 上の標準ペアリングであり、 $x_a: G_a \rightarrow G^0$ は G^0 の F 上の加法的ワン・パラメータ部分群である。この p と θ は「 $\alpha \in \theta$ に対してのみ $\alpha(p) = 0$ 」を満たす。 $P(\theta) = P_p$ を満たす p は唯一ではない。

2.2. 今後 $\theta \subseteq \tilde{\Pi}$ と $p \in A$ を、 $P(\theta) = P_p$ となるようにとる。2.1の同一視のもと $p = (p_i) \in A = \mathbb{R}^n$ とする。各実数 c について、 V の $\mathcal{O}$ -latticeを次のように定義する。

$$L(c) = \sum_{i \in I} p^{n_i(c)} e_i$$

ここで、 $n_0(c) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $c \leq n_0(c) \leq c + 1/2$, そして $n_i(c) \in \mathbb{Z}$, $p_i + c \leq n_i(c) < p_i + c + 1$ ($i \in I$) とする ([BT3]を参照)。すると集合 $\{L(c)\}_{c \in \mathbb{R}}$ は $\mathbb{Z}$ を添字集合としてもつ、すなわち $\{L(c)\}_{c \in \mathbb{R}} = \{L_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ そしてこれは次の2つの性質をもつ、(i) $L_i \supsetneq L_{i+1}$ ($i \in \mathbb{Z}$) (ii) $pL_i = L_{i+s}$ ($i \in \mathbb{Z}$) となる正の整数 s が唯一つ定まる。このような集合をlattice chainとよぶ。これは p ではなく θ にのみ唯一依存する。そこで $\mathcal{L}_\theta = \{L_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ と書き、そして(ii)の s を $\mathcal{L}_\theta$ の周期とよび、 $s(\theta) = s$ と書く。

2.3. $\mathcal{L}_\theta = \{L_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ から $\text{End}_F(V)$ の hereditary $\mathcal{O}$ -多元環 $\mathfrak{A}_\theta$ と、そのJacobson根基 $\mathfrak{P}_\theta$ を与えることができる。実際

$$\mathfrak{A}_\theta = \{x \in \text{End}_F(V) \mid xL_i \subseteq L_i \ (i \in \mathbb{Z})\}$$

$$\mathfrak{p}_\theta = \{x \in \text{End}_F(V) \mid xL_i \subseteq L_{i+1} \ (i \in \mathbb{Z})\}$$

このイデアル $\mathfrak{p}_\theta$ は可逆であるから、 $\mathfrak{p}_\theta^k$ ($k \in \mathbb{Z}$)をもつ。 $P = P_\theta = P(\theta)$ について、 $P_0 = P$ とし、正の整数 k について、 $P_k = P \cap (1 + \mathfrak{p}_\theta^k)$ としよう。すると、 $\{P_k\}_{k \geq 1}$ は P の正規部分群からなるfiltrationとなり、交換子関係 $[P_i, P_j] \subseteq P_{i+j}$ ($i, j \geq 1$)を満たす。また g においては、すべての整数 k について

$$g_{\theta, k} = g \cap \mathfrak{p}_\theta^k$$

とおこう。するとこれらは g の $\mathcal{O}$ -latticeとなり、 g のあるfiltrationを与える。

§3. 特別な部分集合 $\theta_{\tilde{\Pi}}$

3.1. [K]において、 $G = Sp_{2n}$ の特別な $\theta_{\tilde{\Pi}}$ について、付随するparahoric部分群 $P(\theta)$ のvery cuspidal表現を定義して、それらを考察した。その $\theta_{\tilde{\Pi}}$ は次のように特徴づけられる。 $\mathfrak{p}_\theta$ または $\mathfrak{p}_\theta^2$ は単項(principal), すなわち $\mathfrak{p}_\theta = z\mathfrak{u}_\theta = \mathfrak{u}_\theta z$ または $\mathfrak{p}_\theta^2 = z\mathfrak{u}_\theta = \mathfrak{u}_\theta z$ となる元 $z \in \text{End}_F(V)$ がとれる ([B]を参照)。また $2n = ms(\theta)$ または $2n = (m_1 + m_2)(s(\theta)/2)$ となる正の整数 m, m_1, m_2 がとれる。

$G^0 = SO_N$ についても、これらの性質を満たす特別な $\theta_{\tilde{\Pi}}$ に注目する。ただし $G^0 = SO_{2n+1}$ では1.1の V の部分空間 $V' = \sum_{i \in I} Fe_i$ に制限して考える。

3.2. この節では、 $G = SO_{2n+1}$ ($n \geq 2$)とする。 $\theta_{\tilde{\Pi}}$ として次のものに注目する。これらを2つの型(I), (II)に分ける。これは $\mathfrak{p}_\theta$ と $\mathfrak{p}_\theta^2$ の単項性に対応している。ここでは r, m, m_1, m_2 ($m_1 \neq m_2$)はすべて正の整数とする。

(I)型:

(a) $r \geq 2, m \geq 2$ そして $n = 2(r-1)m$,

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_m, \xi_{3m}, \xi_{5m}, \dots, \xi_{(2r-3)m}\} \quad (D_m \times A_{2m-1}^{r-2} \times B_m)$$

(b) $r \geq 2, m \geq 1$ そして $n = (2r-1)m$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_{2m}, \xi_{4m}, \dots, \xi_{2(r-1)m}\} \quad (A_m^{r-1} \times B_m)$$

(c) $r \geq 2$ そして $n = 2r-2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{2r-3m} = \xi_{n-1}\} \quad (A_1^{r-1})$$

ここでは $B_1 = A_1$ と約束する.

(II) 型:

(a) $r \geq 2$ は奇数, $m_1 \geq 4$ は偶数, $m_2 \geq 1$ そして $n = (m_1 + m_2)(r - 1)/2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_{m_1/2}, \xi_{m_1/2+m_2}, \xi_{3m_1/2+m_2}, \xi_{3m_1/2+2m_2}, \dots, \xi_{(r-2)m_1/2+(r-1)m_2}\} \quad (D_{m_1/2} \times A_{m_1-1}^{(r-3)/2} \times A_{m_2-1}^{(r-1)/2} \times B_{m_2/2})$$

(a') $r, m_1, m_2 \geq 2$ はすべて偶数そして $n = (m_1 + m_2)(r - 1)/2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_{m_1/2}, \xi_{m_1/2+m_2}, \xi_{3m_1/2+m_2}, \xi_{3m_1/2+2m_2}, \dots, \xi_{(r-1)m_1/2+(r-2)m_2}\} \quad (D_{m_1/2} \times A_{m_1-1}^{(r-2)/2} \times A_{m_2-1}^{(r-2)/2} \times B_{m_2/2})$$

(c) $r \geq 2$ は奇数, $m_2 \geq 3$ そして $n = (2 + m_2)(r - 2)/2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_1, \xi_{1+m_2}, \xi_{3+m_2}, \xi_{3+2m_2}, \xi_{5+2m_2}, \dots, \xi_{(r-2)+(r-1)m_2/2}\} \quad (A_1^{(r-1)/2} \times A_{m_2-1}^{(r-1)/2})$$

(c') $r \geq 2, m_2 \geq 4$ はともに偶数そして $n = (2 + m_2)(r - 1)/2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_1, \xi_{1+m_2}, \xi_{3+m_2}, \xi_{3+2m_2}, \xi_{5+2m_2}, \dots, \xi_{(r-1)+(r-2)m_2/2}\} \quad (A_1^{(r-2)/2} \times A_{m_2-1}^{(r-2)/2} \times B_{m_2/2})$$

3.3. この節では, $G = SO_{2n}$ ($n \geq 3$) とする. 同様に r, m, m_1, m_2 は正の整数とする.

(I) 型:

(a) $m \geq 2$ は偶数, $r \geq 2$ そして $n = (r - 1)m$,

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_{m/2}, \xi_{3m/2}, \xi_{5m/2}, \dots, \xi_{(2r-3)m/2}\} \quad (A_{m-1}^{r-2} \times D_{m/2}^2)$$

(c1) $m \geq 2$ は偶数, $r \geq 1$ そして $n = (2r - 1)m/2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_{m/2}, \xi_{3m/2}, \dots, \xi_{(2r-3)m/2}\} \quad (A_{m-1}^{r-1} \times D_{m/2})$$

(c2) $m \geq 4$ は偶数, $r \geq 1$ そして $n = (2r - 1)m/2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_m, \xi_{2m}, \dots, \xi_{(r-1)m}\} \quad (A_{m-1}^{r-1} \times D_{m/2})$$

(d1) $r \geq 2, m \geq 2$ そして $n = (r - 1)m$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_m, \xi_{2m}, \dots, \xi_{(r-2)m}\} \quad (A_{m-1}^r)$$

(d2) $r \geq 2, m \geq 2$ そして $n = mr$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_m, \xi_{2m}, \dots, \xi_{(r-1)m}, \xi_{rm} = \xi_n\} \quad (A_1^r)$$

(e1) $r \geq 2$ として $n = 2r - 1$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{2r-3}, \xi_{2r-1} = \xi_n\} \quad (A_1^{r-1})$$

(e2) $r \geq 2$ として $n = 2r - 1$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_2, \xi_4, \dots, \xi_{2r-2}, \xi_{2r-1} = \xi_n\} \quad (A_1^{r-1})$$

(f) $r \geq 3$ として $n = 2r - 2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{2r-3}, \xi_{2r-2} = \xi_n\} \quad (A_1^{r-1})$$

(II) 型:

(a) $r \geq 2$ は奇数, $m_1 \geq 2$ は偶数, $m_2 \geq 1$ として $n = (m_1 + m_2)(r - 1)/2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_{m_1/2}, \xi_{m_1/2+m_2}, \xi_{3m_1/2+m_2}, \xi_{5m_1/2+m_2}, \dots, \xi_{(r-2)m_1/2+(r-3)m_2/2}\} \quad (A_{m_1-1}^{(r-3)/2} \times A_{m_2-1}^{(r-1)/2} \times D_{m_1/2})$$

(b1) $r \geq 2$, $m_1 \geq 2$ はともに偶数として $n = (m_1 + 2)(r - 1)/2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_{m_1/2}, \xi_{2+m_1/2}, \xi_{2+3m_1/2}, \xi_{4+3m_1/2}, \dots, \xi_{(r-2)+(r-1)m_1/2} = \xi_{n-1}, \xi_n\} \quad (D_{m_1/2} \times A_1^{(r-2)/2} \times A_{m_1-1}^{(r-2)/2})$$

(b2) $r \geq 2$, $m_2 \geq 6$ はともに偶数として $n = (m_1 + m_2)(r - 1)/2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_1, \xi_{1+m_2}, \xi_{3+m_2}, \xi_{3+2m_2}, \xi_{5+2m_2}, \dots, \xi_{(r-1)+(r-2)m_2/2}\} \quad (A_1^{(r-2)/2} \times A_{m_2-1}^{(r-2)/2} \times D_{m_2/2})$$

(f) $r \geq 4$ は偶数, $m_2 \geq 1$ として $n = (2 + m_2)(r - 1)/2$

$$\theta = \tilde{\Pi} - \{\xi_0, \xi_1, \xi_{1+m_2}, \xi_{3+m_2}, \xi_{3+2m_2}, \xi_{5+2m_2}, \dots, \xi_{(r-2)+(r-1)m_2/2}, \xi_n\} \quad (A_1^{(r-3)/2} \times A_{m_2-1}^{(r-1)/2})$$

ここで $D_2 = A_1 \times A_1$ と約束する.

3.4. 3.2と3.3の各 $\theta_{\tilde{\Pi}}$ について, われわれは $\mathcal{L}_{\theta} = \langle L_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}}$ を具体的に決定することができる. ここではそれを記述しない.

§4. Very cuspidal 元

4.1. 今後 $\theta_{\tilde{\Pi}}$ は3.2と3.3のいずれかとする.

定義 ([K]) ある整数 M に対して, $\alpha \in \mathfrak{g}_{\theta, M}, \alpha \in \mathfrak{g}_{\theta, M+1}$ となる α が次の条件を満たすとき very cuspidal とよぶ.

- (a) θ が (I) 型ならば, $s(\theta)$ と M の最大公約数 $(s(\theta), M) = 1$, また θ が (II) 型ならば $(s(\theta), M) = 2$. 今後 $c = (s(\theta), M)$ と書く.
- (b) α は $\tilde{\mathfrak{g}} = \text{End}_F(V)$ において半単純(semisimple)とし, 次の性質を満たす. α は直積因子 a_i をもち,
 - (1) 高だか1つの i について $a_i = 0$, 残りは $a_i \neq 0$ である.
 - (2) $\sigma a_i = -a_i$, ここで σ は 1.1 の対合である.
 - (3) a_i によって F 上生成される $\tilde{\mathfrak{g}}$ の部分環 $E_i = F[a_i]$ が体(field)になる.
 - (4) $a_i \neq 0$ となるすべての i について, a_i の E_i における付置(order)が M/c となる.
 - (5) $a_i \neq 0$ となるすべての i について, E_i/F の分岐指数(the order of ramification)が $s(\theta)/c$ となる.
 - (6) $\bar{\omega}^{-M/c} a_i^{s(\theta)/c} + \rho_{E_i}$ が剰余体 $\bar{F} = \mathcal{O}/P$ 上剰余体 $\bar{E}_i = \mathcal{O}_{E_i}/\rho_{E_i}$ を生成する.
- (c) α によって F 上生成される $\tilde{\mathfrak{g}}$ の部分多元環 $F[\alpha]$ の F 上の次元が N に等しい.

4.2. $\alpha \in \mathfrak{g}$ が very cuspidal ならば, α の G における中心化群(centralizer)の連結成分 $Z_G(\alpha)^0$ が G のコンパクト Cartan 部分群となることを簡単に示すことができる. このような半単純元を非アイソトロピック(anisotropic)かつ正則(regular)であると言おう.

§5. Very cuspidal 元の存在

5.1. t を不定元とする多項式環 $F[t]$ のある対合 σ を, $g(t) = \sum_{i=1}^n a_i t^i$ について

$$\sigma g(t) = \sum_{i=1}^n a_i (-t)^i$$

で定義する.

定理 $m(t)$ をその次数が N の $F[t]$ におけるモニック分離多項式とする. $m(t)$ を最小

多項式としてもつ g の非アイソトロピック正則半単純元 α が存在するための必要十分条件は, $m(t)$ のモニック既約因子 $m_i(t)$ ($1 \leq i \leq l$) が次の3つの条件を満たすことである.

- (1) $m_i(t)$ は存在すれば t を除いて偶数次数である.
- (2) $\sigma m_i(t) = \pm m_i(t)$ ($1 \leq i \leq l$).
- (3) $m(t)$ が $\pm t$ で割りきれなければ,

$$m(0) \equiv (-1)^n \pmod{(F^\times)^2}$$

を満たす.

この定理は, 局所体上の2次形式の分類論と Milnor の [Mi] の結果を用いて証明することができる.

5.2. $\alpha \in g$ を非アイソトロピック正則半単純元とし, $\tilde{g}$ の部分環 $A = F[\alpha]$ の F 上の次元が N に等しいと仮定する. すると一般に A は次のように F 上の有限次分離拡大体 E_i の有限個の直積に分解する(4.1の定義を参照),

$$A = F[\alpha] = \prod_{i=i_0}^l E_i$$

ここで $N = 2n+1$ については $i_0 = 0$, $E_0 = F$ として $N = 2n$ については $i_0 = 1$ と約束する. この分解にしたがって, $\alpha = (a_i)$, とくに $a_0 = 0$. V は F 上のベクトル空間として A と同一視できそして $\mu_0 \in F^\times = E_0^\times$, $\sigma \mu_i = \mu_i$ となる $\mu_i \in E_i^\times$ ($1 \leq i \leq l$) がとれて, $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in A = V = \prod_i E_i$ について

$$f(x, y) = \sum_{i=i_0}^l \text{Tr}_{E_i/F}(\mu_i x_i \sigma(y_i))$$

ここで, $\text{Tr}_{E_i/F}$ は E_i から F へのトレース写像である.

5.3. 仮定と記号は5.2のとおりとする. $1 \leq i \leq l$ の各 i に対して, e_i , f_i をそれぞれ E_i/F の分岐指数と相対次数(the modular degree)とする. b_i を μ_i の E_i における付置(order) そして d_i を E_i/F の共役差積の指数(the differential exponent)とし, そして

$$\delta_i = b_i + d_i$$

とおく.

5.3. 定理 $\theta_{\neq \tilde{\Pi}}$ を3.2と3.3の集合とし, M を θ が (I), (II) 型にしたがって, $(s(\theta), M) = 1, 2$ となるある整数とする. さらに $\alpha \in g$ をある非アイソトロピック正則半単純元で, $\alpha = (a_i) \in A = \prod_i E_i$, f_i, d_i そして d_i を5.2のような値とする. すると $g\alpha g^{-1}$ が $g_{\theta, M}$ における very cuspidal 元となるように $g \in G$ を取れるための必要十分条件は, 次の3つの条件が満たされるときである. (I) 型について,

(1) $N = 2n$ ならば, $\sum_{i=1}^l f_i = m$ かつ $\sum_{i=1}^l d_i f_i \equiv 0 \pmod{2}$ そして $N = 2n+1$ ならば, $\sum_{i=1}^l f_i = m$.

(2) $\delta_1 + 1 - 2n_1 = \dots = \delta_l + 1 - 2n_l = \delta$ そしてこの δ は $L_0^* = L_0$ ならば奇数でさもなくば偶数であるように l 個の整数 $(n_1, \dots, n_l)$ を見出せる.

(3) すべての $a_i \neq 0$ は4.1(b)を満たす.

ここで m は3.2と3.3の中の整数, $\mathcal{L}_{\theta} = \{L_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ そして $L_0^* = \{x \in V \mid f(x, L_0) \equiv 0\}$.

(II) 型について

(1) 必要ならば E_i を並べ替えて, $\sum_{i=1}^q f_i = m_1$, $\sum_{i=q+1}^l f_i = m_2$ とできる整数 q ($1 < q \leq l$) が存在する.

(2) (1)の E_i の順序に関して, $\delta_1 + 1 - 2n_1 = \dots = \delta_l + 1 - 2n_l = \delta$ そしてこの δ が偶数となるような l 個の整数 $(n_1, \dots, n_l)$ が存在する.

(3) すべての $a_i \neq 0$ が4.1(b)を満たす.

§6. Unrefined minimak K-type

6.1. $\theta_{\neq \tilde{\Pi}}$ を3.2と3.3のある部分集合とし, $P = P(\theta)$ を2.1の対応する parahoric 部分群とする.

F の加法的指標 ψ で $\mathcal{O}$ 上で自明, $\omega^{-1}\mathcal{O}$ 上で非自明なものを1つ固定しよう. C を $\{x \in g \mid$

$1+x$ が可逆}上のCayley変換

$$C(x) = (1-x)(1+x)^{-1}$$

とする. $\mathbb{Z}$ 上の関数 λ を

$$\lambda(k) = 1 - k - s(\theta) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

によって定義する. P_{i-1} ($i \geq 1$) は P_i の正規部分群で, P_{i-1}/P_i は可換であるから, P_i 上自明な P_{i-1} の各指標 (= 1次元表現) χ は商群 $\mathfrak{g}_{\theta, \lambda(i)}/\mathfrak{g}_{\theta, \lambda(i)+1}$ のあるコセット $\alpha + \mathfrak{g}_{\theta, \lambda(i)+1}$ が次の等号を通して対応することがわかる.

$$\chi(C(x)) = \psi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(x\alpha)\right)$$

ここで tr は $\mathrm{End}_F(V)$ の普通のトレースである. この対応が次の同型を与える.

$$(P_{i-1}/P_i)^\wedge \cong \mathfrak{g}_{\theta, \lambda(i)}/\mathfrak{g}_{\theta, \lambda(i)+1}$$

ここで $H^\wedge$ はある可換群 H の Pontrjagin 双対を表す. このとき指標 χ はコセット $\alpha + \mathfrak{g}_{\theta, \lambda(i)+1}$ で表示されるとよぼう.

6.2. 2以上のある整数 m について, P_m 上自明な P_{m-1} の指標 χ が非自明なあるコセット $\alpha + \mathfrak{g}_{\theta, \lambda(i)}$ で表示されていると仮定しよう.

定義([MP]) もしそのコセットがいかなる冪単 (nilpotent) 元も含まなければ, 対応するその指標 χ は非退化 (non-degenerate) とよぶ. またこのとき組 (P_{m-1}, χ) を unrefined minimal K-type とよぶ.

6.3. 命題 m を 2 以上のある整数とし, $\alpha \in \mathfrak{g}_{\theta, \lambda(m)}$ が very cuspidal とする. するとコセット $\alpha + \mathfrak{g}_{\theta, \lambda(i)+1}$ によって表示される P_m 上自明な P_{m-1} の指標 χ は非退化である.

6.4. 定理 m を 2 以上のある整数とする. G のある既約許容表現 π が, ある very cuspidal 元 $\alpha \in \mathfrak{g}_{\theta, \lambda(m)}$ のコセット $\alpha + \mathfrak{g}_{\theta, \lambda(m)+1}$ で表示される P_m 上自明な P_{m-1} の指標と交叉するならば, π は supercuspidal である.

参照文献

- [BT1] F. Bruhat and J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local I, Données radicielles valuées, Publ. Math. I.H.E.S., 41 (1972), 5-251.
- [BT2] F. Bruhat and J. Tits, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local 1^{re} partie: les groupes lineaire general, Bull. Soc. Math. France, 112 (1984), 259-301.
- [BT3] F. Bruhat and J. Tits, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, 2^{me} partie: groupes unitaires, Bull. Soc. Math. France, 115 (1987), 141-195
- [H] H. Hijikata, Some supercuspidal representations induced from parahoric subgroups, in "Automorphic forms in several variables", Progress in Math. 46 (1984), 160-178.
- [IM] N. Iwahori and H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups, Publ. Math. I.H.E.S., 25 (1965), 5-48.
- [K] K. Kariyama, Very cuspidal representations of p-adic symplectic groups, J. Algebra, 207 (1998), 205-255.
- [MP] A. Moy and G. Prasad, Unrefined minimal K-types for p-adic groups, Invent. Math. 116 (1994), 233-274.
- [T] J. Tits, Reductive groups over local fields, in "Automorphic forms, representations and L functions" eds. A. Borel and W. Casselman, Proc. of Sympos. Pure Math. 33 (Part 1), Amer. Math. Soc., Providence, 1979.