

アフィン超代数とアフィン量子超代数の定義関係式 について

Hiroyuki Yamane*

20th October 1998

1. データ

次の条件を満たす3つ組 $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ をデータと呼ぶ。

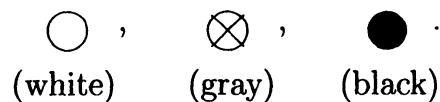
- (i) $\mathcal{E}$ は有限次元複素ベクトル空間で非退化対称形式 $(,) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{C}$ が与えられている。
- (ii) Π は $\mathcal{E}$ の1次独立な有限部分集合である。
- (iii) $p : \Pi \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ は写像である。
- (iv) $\mathcal{E}$ の真部分空間 $\mathcal{E}'$ で3つ組 $(\mathcal{E}', \Pi, p)$ が (i), (ii), (iii) を満たすものはない。

2. Dynkin 図形

ここではあるデータの Dynkin 図形を定義する。ここでの Dynkin 図形は全てのアフィン超代数を与えるデータに対して定義されているが全ての Kac-Moody 超代数のデータに対して定義されているわけではない。(Kac-Moody 超代数とアフィン超代数の定義は3で与える。)

あるデータ $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ に対して Dynkin 図形を次のようにして与える。 $n+1 = |\Pi|$ 個の Π の元を $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ と書く。即ち $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 。

まず Dynkin 図形の頂点としてつぎの3つのものが必要である。

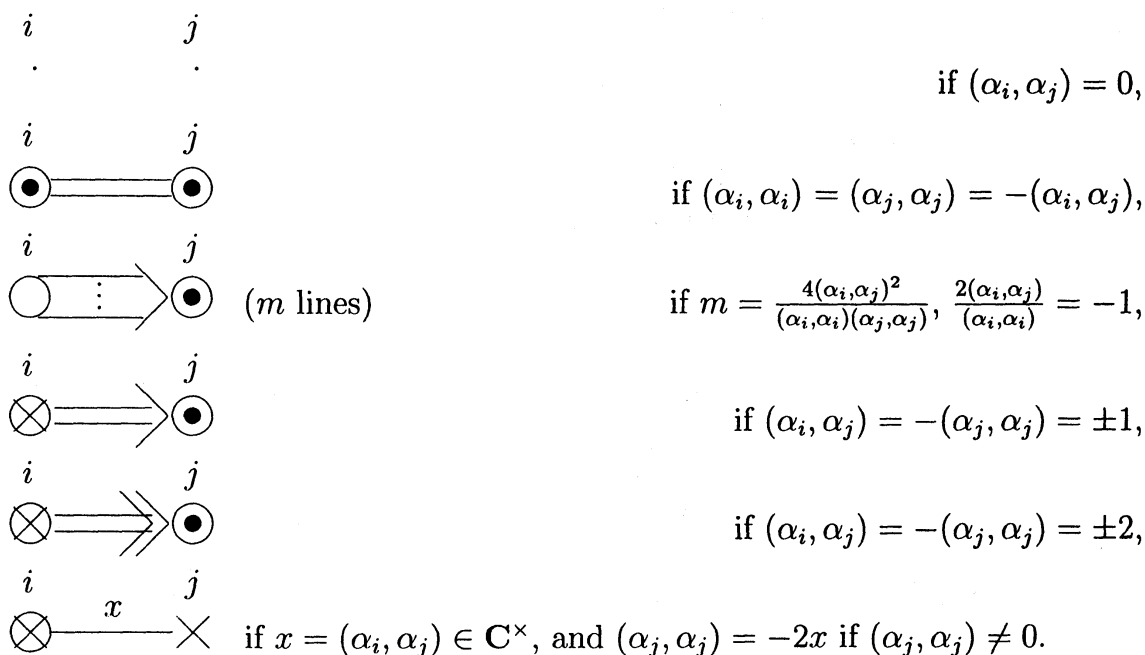


これらをそれぞれ白色頂点、灰色頂点、黒色頂点と呼ぶことにする。 i 番目の Π の元 α_i が $(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$ かつ $p(\alpha_i) = 0$ をみたすときは白色頂点、 $(\alpha_i, \alpha_i) = 0$ かつ $p(\alpha_i) = 1$ をみたすときは灰色頂点、 $(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$ かつ $p(\alpha_i) = 1$ をみたすときは黒色頂点を対応させる。
($(\alpha_i, \alpha_i) = 0$ かつ $p(\alpha_i) = 0$ は考えない。) 頂点 $\cdot$ は3つの頂点のいずれかを表わす。頂点

*Dept. of Math., Osaka Univ., Toyonaka 560-0043 Japan

× は白色頂点か灰色頂点のいずれかを表わす。頂点 $\odot$ は白色頂点か黒色頂点のいずれかを表わす。

i 番目と j 番目と 2 頂点の間の辺を次のように書く。



ここで x がゼロでない整数ならば辺 $\otimes \text{---} x \text{---} \times$ は辺 $\otimes \text{---} \vdots \text{---} \times \quad (|x| \text{ lines})$ とも

書く。さらに辺 $\otimes \text{---} \text{---} \circ$ は辺 $\otimes \text{---} \text{---} \circ$ とも書く。辺 $\times \text{---} \vdots \text{---} \times$ は

辺 $\circ \text{---} \text{---} \circ$ または辺 $\otimes \text{---} \text{---} \otimes$ を表わす。

さらに $(\alpha_j, \alpha_j) = 0$ かつ $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ かつ $(\alpha_j, \alpha_k) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ のとき (α_i, α_j) と (α_j, α_k) が共に正であるか負であるとき i 番目と j 番目の 2 頂点の間の辺と j 番目と k 番目の 2 頂点の間の辺にそれぞれそれらに直交する短い 1 本線を書く。 (α_i, α_j) と (α_j, α_k) が異符号のときどちらかの辺には直交する短い 1 本線を書かないかまたはどちら

らの辺にも短い 1 本線を書かない。例えば $\times \text{---} | \text{---} \otimes \text{---} | \text{---} \times$ は $2(\alpha_i, \alpha_j) =$

$(\alpha_j, \alpha_k) = \pm 2$ であって、 $\times \text{---} \text{---} \otimes \text{---} \text{---} \times$ と $\times \text{---} \text{---} \otimes \text{---} | \text{---} \times$

と $\times \text{---} | \text{---} \otimes \text{---} \text{---} \times$ は $-2(\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_j, \alpha_k) = \pm 2$ である。

この状況以外の 3 つの頂点の間の 2 つの辺のどちらかまたは両方に短い 1 本線があってもそれを見捨てる。

3. Kac-Moody超代数

データ $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ に対して複素リー超代数 $\mathcal{G}^\sharp = \mathcal{G}^\sharp(\mathcal{E}, \Pi, p)$ がつぎの条件を満たすとき $\mathcal{G}^\sharp$ は許容的であるということにする。

- (x) 複素ベクトル空間として $\mathcal{H} = \mathcal{E}^*$ は $\mathcal{G}^\sharp$ に埋めこまれている。
- (y) リー超代数 $\mathcal{G}^\sharp$ はパリティが $p(H) = 0, p(E_i) = p(F_i) = p(\alpha_i)$ である生成元 $\{H \in \mathcal{H}, E_i, F_i (i = 0, \dots, n)\}$ をもっている。
- (z) 生成元 $\{H, E_i, F_i\}$ はつぎの式をみたす。

$$[H, H'] = 0 (H, H' \in \mathcal{H}), [H, E_i] = \alpha_i(H)E_i, [H, F_i] = -\alpha_i(H)F_i$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}H_{\alpha_i}$$

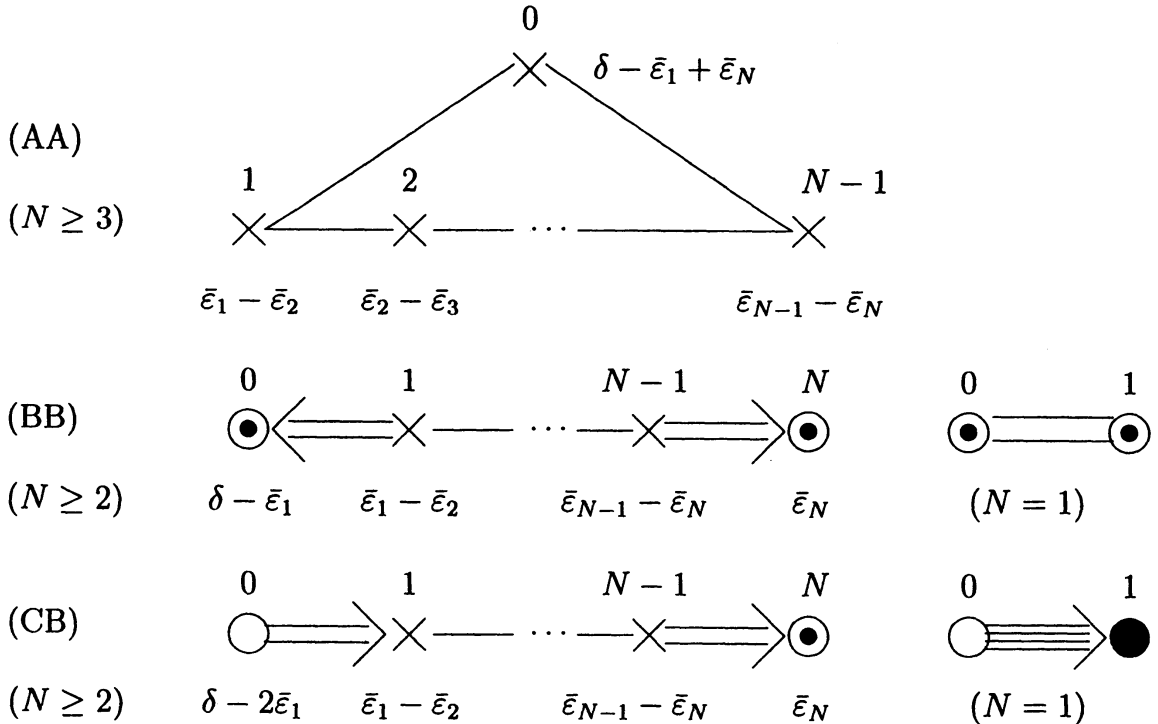
ここで $\alpha \in \mathcal{E}$ にたいして $H_\alpha \in \mathcal{H}$ は任意の $\nu \in \mathcal{E}$ にたいして $\nu(H_\alpha) = (\nu, \alpha)$ を満たすものである。

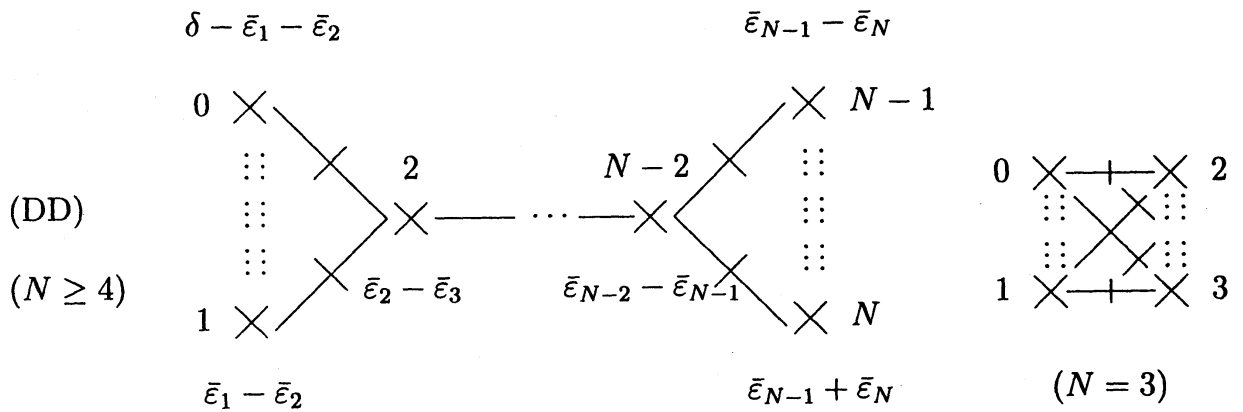
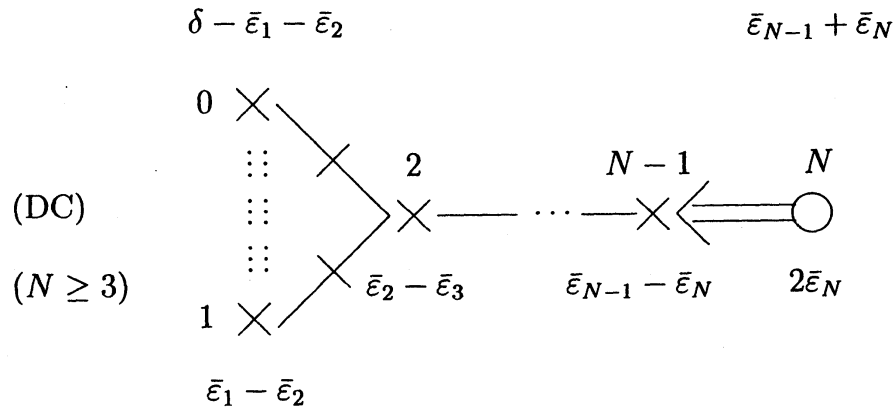
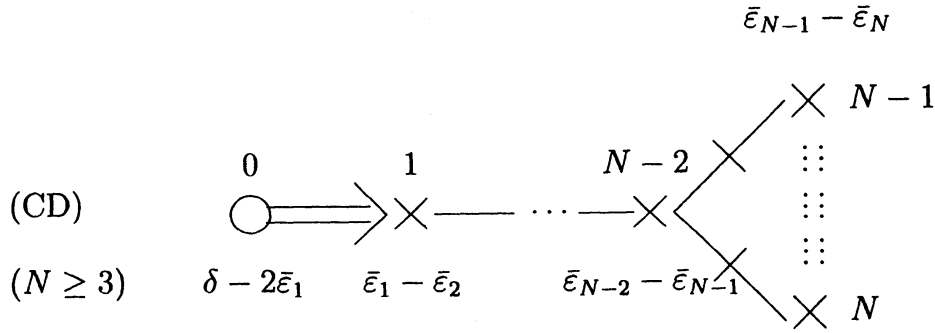
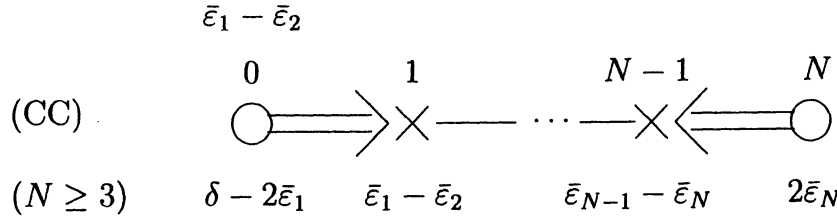
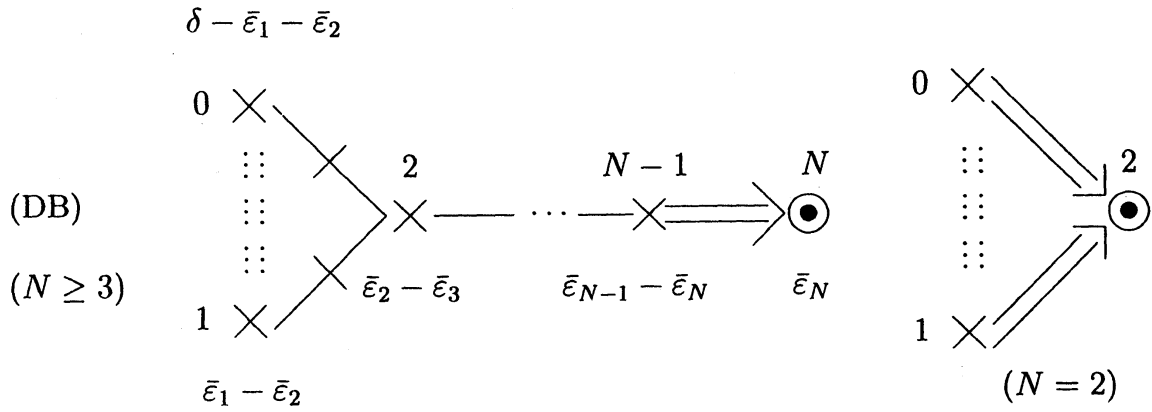
2つの許容的リー超代数 $\mathcal{G}^\sharp = \mathcal{G}^\sharp(\mathcal{E}, \Pi, p)$ と $\mathcal{G}^\sharp = \mathcal{G}^\sharp(\mathcal{E}, \Pi, p)$ にたいして $\Psi(H) = H, \Psi(E_i) = E_i$ and $\Psi(F_i) = F_i$ である準同形写像 $\Psi = \Psi[\mathcal{G}^\sharp, \mathcal{G}^\sharp] : \mathcal{G}^\sharp \rightarrow \mathcal{G}^\sharp$ があるとき $\mathcal{G}^\sharp \succ \mathcal{G}^\sharp$ とかくことにする。順序 $\succ$ にたいして最大の許容的リー超代数を $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{E}, \Pi, p)$ 、最小の許容的リー超代数を $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{E}, \Pi, p)$ であらわす。 $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{E}, \Pi, p)$ を Kac-Moody超代数と呼ぶ。

注意 違う Dynkin 図形に対するアフィン超代数が同形になることもある。このことについては後で詳しく述べる。

4. アフィン超代数

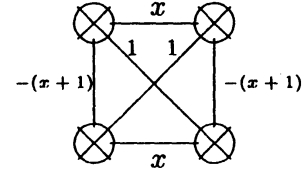
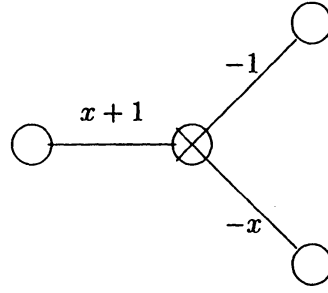
下記の Dynkin 図形を与えるデータ $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ を「アフィン超代数のデータ」と呼び、リー超代数 $\mathcal{G}(\mathcal{E}, \Pi, p)$ を「アフィン超代数」と呼ぶ。下記の $\bar{e}_i (1 \leq i \leq N)$ と δ は $(\bar{e}_i, \bar{e}_i) = \pm 1, (\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0 (i \neq j), (\bar{e}_i, \delta) = 0, (\delta, \delta) = 0$ をみたすものである。



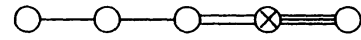
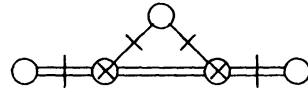
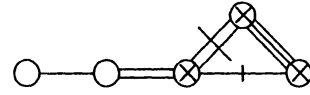
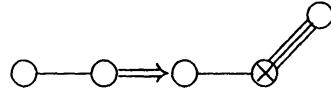


$D(2, 1; x)^{(1)}$

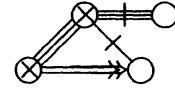
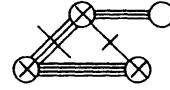
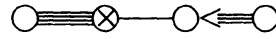
$(x \neq 0, -1)$



$F(4)^{(1)}$



$G(3)^{(1)}$



上記の Dynkin 図形を持つ Kac-Moody 超代数をアフィン超代数と呼ぶ理由は下記の定理による。

定理 4. (Van De Laur) symmetrizable Kac-Moody 超代数が finite growth である必要十分条件はそれが有限次元 Kac-Moody 超代数かまたはアフィン超代数であることである。

5. アフィンの許容的超代数

許容的リー超代数 $\mathcal{G}^\sharp = \mathcal{G}^\sharp(\mathcal{E}, \Pi, p)$ と $\alpha \in \mathcal{E}$ に対して $\mathcal{G}_\alpha^\sharp = \{X \in \mathcal{G}^\sharp \mid [H, X] = \alpha(H)X \ (H \in \mathcal{H})\}$ とおく。そして $\Phi[\mathcal{G}^\sharp] = \{\alpha \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \mid \dim \mathcal{G}_\alpha^\sharp \neq 0\}$ とおく。このとき

$$\mathcal{G}^\sharp = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi[\mathcal{G}^\sharp]} \mathcal{G}_\alpha^\sharp$$

である。 $\Pi = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$ に対して $P_+ = \mathbf{Z}_+ \alpha_0 \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}_+ \alpha_n$ とおく。 $P_- = -P_+$ とおく。 $P = P_+ + P_-$ をルート格子 P_+ , P_- をそれぞれルート格子の正部分、負部分と呼ぶ。 $\mathcal{N}[\mathcal{G}^\sharp]_\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Phi[\mathcal{G}^\sharp] \cap P_\pm} \mathcal{G}_\alpha^\sharp$ とおく。このとき $\mathcal{G}^\sharp$ は三角分割

$$\mathcal{G}^\sharp = \mathcal{N}[\mathcal{G}^\sharp]_+ \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}[\mathcal{G}^\sharp]_-$$

をもつ。あきらかに $\Phi[\tilde{\mathcal{G}}] = (P_+ \cup P_-) \setminus \{0\}$ であって $\mathcal{N}[\mathcal{G}^\natural]_+$ (resp. $\mathcal{N}[\mathcal{G}^\natural]_-$) は E_i (resp. F_i) を生成元とする自由超代数である。 $\Phi(\mathcal{E}, \Pi, p) = \Phi[\mathcal{G}]$ とおく。あきらかに

$$\mathcal{G}^\natural \succ \mathcal{G}^{\sharp\sharp} \implies \Phi[\tilde{\mathcal{G}}] \supset \Phi[\mathcal{G}^\natural] \supset \Phi[\mathcal{G}^{\sharp\sharp}] \supset \Phi(\mathcal{E}, \Pi, p)$$

である。

いまからデータ $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ をアフィン超代数のものとする。このとき許容的リー超代数 $\mathcal{G}^\natural = \mathcal{G}^\natural(\mathcal{E}, \Pi, p)$ が $\Phi[\mathcal{G}^\natural] = \Phi(\mathcal{E}, \Pi, p)$ をみたすときアフィンの許容的超代数であるという。アフィンの許容的超代数のなかで順序 $\succ$ のもとで極大のものがただ一つ存在するそれを $\mathcal{G}^\natural = \mathcal{G}^\natural(\mathcal{E}, \Pi, p)$ とかいて極大アフィンの許容的超代数とよぶ。

$\Phi(\mathcal{E}, \Pi, p)$ の元 δ でつぎの性質を満たすものがただ一つ存在する：

$$\delta \in P_+ \quad \text{かつ} \quad \mathbf{C}\delta \cap (\Phi(\mathcal{E}, \Pi, p) \cup \{0\}) = \mathbf{Z}\delta$$

注意： [Y3] ではアフィンの許容的超代数の定義に次の条件もつけていた： $\alpha \in \Phi(\mathcal{E}, \Pi, p) \setminus \mathbf{Z}\delta$ ならば $\dim \mathcal{G}^\natural_\alpha = 1$ である。この条件は実はいらぬ。

定理 5. $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{E}, \Pi, p)$ をアフィン超代数、 $\mathcal{G}^\natural = \mathcal{G}^\natural(\mathcal{E}, \Pi, p)$ を極大アフィンの許容的超代数とする。 $\alpha \in \Phi(\mathcal{E}, \Pi, p)$ に対して $\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{G}^\natural_\alpha \cap \ker \Psi[\mathcal{G}^\natural, \mathcal{G}]$ とおく。(あきらかに $\ker \Psi[\mathcal{G}^\natural, \mathcal{G}] = \bigoplus_{\alpha \in \Phi(\mathcal{E}, \Pi, p)} \mathcal{J}_\alpha$ である。) このとき $\dim \mathcal{J}_\alpha \leq 1$ である。さらに $\dim \mathcal{J}_\alpha = 1$ である $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ と α は以下のものである：

(x) $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ の Dynkin 図形は (AA) で $\sum_{i=1}^N (\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i) = 0$ であって $\alpha \in (\mathbf{Z}\delta \setminus \{0\})$ で

あるもの。

(y) $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ の Dynkin 図形は (CC) (resp. (CD), resp. (DC), resp. (DD)) で $\sum_{i=1}^{N-1} p(\alpha_i) = \text{odd}$ (resp. = even, resp. = even, resp. = odd) で $\sum_{i=1}^N (\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i) = 0$ であって $\alpha \in (2\mathbf{Z} + 1)\delta$ であるもの。

(z) $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ の Dynkin 図形は (BB) で $\sum_{i=0}^N p(\alpha_i) = \text{odd}$ で $\sum_{i=1}^N (\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i) = 0$ であって $\alpha \in (4\mathbf{Z} + 2)\delta$ であるもの。

注意： Invariant form を持つリー超代数 $\mathfrak{g}$ とそれを不変にする有限位数 k の自己同形 τ に対して記号 $\mathfrak{g}^{(k)} = \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \tau, k)$ を標準的な (ねじれ) ループ超代数の中心拡大とする。 $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ が (x) (resp. (y), resp. (z)) のもののとき N はいつも偶数であって $\mathcal{G}^\natural$ は $sl(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})^{(1)} + \mathcal{H}$ (resp. $sl(N, N)^{(2)}$, resp. $sl(N+1, N+1)^{(4)}$) と同一視できる。この同一視のもとで $\ker \Phi[\mathcal{G}^\natural, \mathcal{G}]$ は $(\mathbf{C}[t, t^{-1}]I_r \setminus \mathbf{C}I_r) \cap \mathcal{G}^\natural$ と同一視される。ここで I_r は $r = N$ (resp. $= 2N$, resp. $= 2N+2$) 次の単位行列である。ちなみに $sl(r, m)$ は $r \neq m$ のときは有限次元単純リー超代数であるが $sl(r, r)$ は単純ではなく $sl(r, r)/\mathbf{C}I_{2r}$ が有限次元単純リー超代数である。Kac の記号ではどちらも $A(r-1, m-1)$ で表わしている。そして上記の同一視のもとで $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]/\mathbf{C}I_{2N}$ (resp. $\mathcal{G}$, resp. $\mathcal{G}$) は $A(\frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}-1)^{(1)}$ (resp. $A(N-1, N-1)^{(2)}$, resp. $A(N, N)^{(4)}$) と同一視される。

6. アフィン Weyl 群の作用

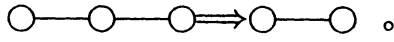
ここではデータ $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ を $G(3)^{(1)}$ 型以外のアフィン超代数のものとする。

頂点の数が $n+1$ で Dynkin 図形が (AA) (resp. (BB), resp. (BC) 又は (BD), resp. (CC) 又は (CD) 又は (DC) 又は (DD), resp. $D(2, 1; x)^{(1)}$, $F(4)^{(1)}$) であるデータの集合を $\text{Data}_n(\text{AA}) = \text{Data}_n^1$ (resp. $\text{Data}_n(\text{BB}) = \text{Data}_n^2$, resp. $\text{Data}_n(\text{BC}) = \text{Data}_n^3$, resp. $\text{Data}_n(\text{CC}) = \text{Data}_n^4$, resp. $\text{Data}_n(D(2, 1; x)^{(1)}) = \text{Data}_n^5$, resp. $\text{Data}_n(F(4)^{(1)}) = \text{Data}_n^6$)。データ $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ にたいしてデータ $(\mathcal{E}^\dagger, \Pi^\dagger, p^\dagger)$ を $|\Pi^\dagger| = |\Pi|$ かつ $\text{Imp}^\dagger = \{0\}$ を満たすもので Dynkin 図形は下記のものとする：

$(\mathcal{E}, \Pi, p) \in \text{Data}_n(\text{XY})$ のとき $(\mathcal{E}^\dagger, \Pi^\dagger, p^\dagger)$ の Dynkin 図形は (XY) で全ての頂点は白色であるもの。

$(\mathcal{E}, \Pi, p) \in \text{Data}_3(D(2, 1; x)^{(1)})$ のとき $(\mathcal{E}^\dagger, \Pi^\dagger, p^\dagger)$ の Dynkin 図形は (CC) で全ての頂点は白色であるもの。

$(\mathcal{E}, \Pi, p) \in \text{Data}_4(F(4)^{(1)})$ のとき $(\mathcal{E}^\dagger, \Pi^\dagger, p^\dagger)$ の Dynkin 図形は



このとき $(\mathcal{E}, \Pi, p) \in \text{Data}_n^r$ と $0 \leq i \leq n$ に対してつぎの性質を満たすような線形同型写像 $\iota = \iota(\mathcal{E}, \Pi, p) : (\mathcal{E}, \Pi, p) \rightarrow (\mathcal{E}^\dagger, \Pi^\dagger, p^\dagger)$ とデータ $({}^s_i \mathcal{E}, {}^s_i \Pi, {}^s_i p) \in \text{Data}_n^r$ と線形同型写像 $s_i = s_i(\mathcal{E}, \Pi, p) : (\mathcal{E}, \Pi, p) \rightarrow ({}^s_i \mathcal{E}, {}^s_i \Pi, {}^s_i p)$ が存在する。

(v) $\Pi^\dagger = \{\alpha_0^\dagger, \dots, \alpha_n^\dagger\}$ とする。このとき $s_i s_i = \text{id}_{\mathcal{E}}$ (特に $({}^s_i({}^s_i \mathcal{E}), {}^s_i({}^s_i \Pi), {}^s_i({}^s_i p)) = (\mathcal{E}, \Pi, p)$) であって $i \neq j$ に対して $\frac{4(\alpha_i^\dagger, \alpha_j^\dagger)^2}{(\alpha_i^\dagger, \alpha_i^\dagger)(\alpha_j^\dagger, \alpha_j^\dagger)} = 0, 2, 4, 6$ ならば $h(i, j) = 2, 3, 4, 6$ に対して $(s_i s_j)^{h(i, j)} = \text{id}_{\mathcal{E}}$ である。

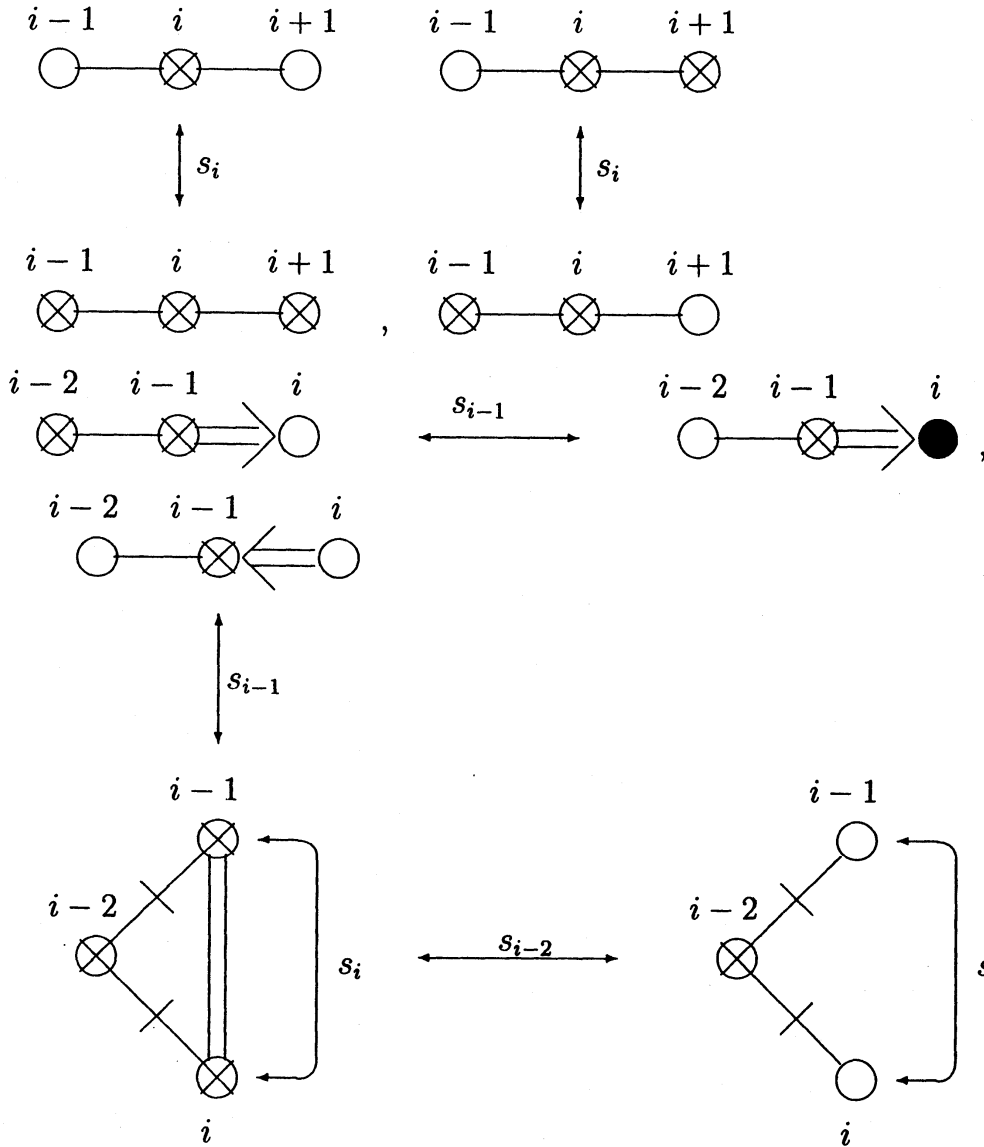
(w) $P, {}^s_i P, P^\dagger$ をそれぞれ $(\mathcal{E}, \Pi, p), ({}^s_i \mathcal{E}, {}^s_i \Pi, {}^s_i p), (\mathcal{E}^\dagger, \Pi^\dagger, p^\dagger)$ のルート格子とする。このとき $\iota(P) = P^\dagger = \iota({}^s_i P)$ かつ $s_i(P) = {}^s_i P$ であって $\alpha \in P$ に対して

$$s_i(\alpha) = \iota^{-1}(\iota(\alpha) - \frac{2(\iota(\alpha), \alpha_i^\dagger)}{(\alpha_i^\dagger, \alpha_i^\dagger)} \alpha_i^\dagger)$$

である。

(x) $(\mathcal{E}^\dagger, \Pi^\dagger, p^\dagger)$ の Dynkin 図形が (XX) (resp. $F(4)^{(1)}$) で $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ の Dynkin 図形が (XX) (resp. 2 段目の右のもの) であるとき各 i にたいして $\iota(\alpha_i) = \alpha_i^\dagger$ である。(ここで $X = A, B, C$ または D)

(y) $(\mathcal{E}^\dagger, \Pi^\dagger, p^\dagger)$ の Dynkin 図形が (XX) であるとき $\iota^{-1}(\alpha_i^\dagger) \in \Pi$ かつ $\iota^{-1}(\alpha_i^\dagger)$ に対する頂点が白色なら $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ と $({}^s_i \mathcal{E}, {}^s_i \Pi, {}^s_i p)$ の Dynkin 図形は同じだがそうでなければ Dynkin 図形は以下の様に変化する：



(ここで一番下の行の s_i は図形の自己同型である。)

7. Key Theorem

W_n^r を Data_n^r の $(\mathcal{E}^\dagger, \Pi^\dagger, p^\dagger)$ の Weyl 群とする。 $w \in W_n^r$ とする。 6 の (v) により $({}^w\mathcal{E}, {}^w\Pi, {}^wp)$ と $w = w(\mathcal{E}, \Pi, p) : (\mathcal{E}, \Pi, p) \rightarrow ({}^w\mathcal{E}, {}^w\Pi, {}^wp)$ を帰納的に $({}^{s_i}({}^{s_i}w\mathcal{E}), {}^{s_i}({}^{s_i}w\Pi), {}^{s_i}({}^{s_i}wp))$ と $s_i(s_i w) = s_i({}^{s_i}w\mathcal{E}, {}^{s_i}w\Pi, {}^{s_i}wp)(s_i w)(\mathcal{E}, \Pi, p)$ によって定義してよい。 wP を $({}^w\mathcal{E}, {}^w\Pi, {}^wp)$ の ルート格子 ${}^wP_+, {}^wP_-$ をその正部分と負部分とする。

定理 7. $(\mathcal{E}, \Pi, p) \in \text{Data}_n^r$ とする。 このとき $\alpha \in \Phi(\mathcal{E}, \Pi, p) \setminus \mathbf{Z}\delta$ (resp. $\alpha \in (P_+ \cup P_-) \setminus (\Phi(\mathcal{E}, \Pi, p) \cup \{0\})$) にたいして適当な $w \in W_m^r$ があって $w(\alpha) \in (\cup_{\beta \in {}^w\Pi} \mathbf{Z}\beta) \cap \Phi({}^w\mathcal{E}, {}^w\Pi, {}^wp)$ (resp. $w(\alpha) \in ({}^wP \setminus ({}^wP_+ \cup {}^wP_-)) \cup ((\cup_{\beta \in {}^w\Pi} \mathbf{Z}\beta) \setminus \Phi({}^w\mathcal{E}, {}^w\Pi, {}^wp))$) をみたす。

8. s_i の持ち上げ

$s_i : \mathcal{E} \rightarrow {}^{s_i}\mathcal{E}$ にたいして $s_i^* : \mathcal{H} \rightarrow {}^{s_i}\mathcal{H} = ({}^{s_i}\mathcal{E})^*$ を $s_i^*(H_\gamma) = H_{s_i(\gamma)}$ で定義する。

定理 8. $(\mathcal{E}, \Pi, p) \in \text{Data}_n^r$ とする。 $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{E}, \Pi, p)$, $\mathcal{G}^{\natural} = \mathcal{G}^{\natural}(\mathcal{E}, \Pi, p)$, ${}^{s_i}\mathcal{G} = \mathcal{G}({}^{s_i}\mathcal{E}, {}^{s_i}\Pi, {}^{s_i}p)$, ${}^{s_i}\mathcal{G}^{\natural} = \mathcal{G}^{\natural}({}^{s_i}\mathcal{E}, {}^{s_i}\Pi, {}^{s_i}p)$ とおく。このとき次の図式を可換にするような s_i^* にたいして自己同型写像 $L_i : \mathcal{G} \rightarrow {}^{s_i}\mathcal{G}$ 及び自己同型写像 $L_i^{\natural} : \mathcal{G}^{\natural} \rightarrow {}^{s_i}\mathcal{G}^{\natural}$ が存在する：

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}^{\natural} & \xrightarrow{L_i^{\natural}} & {}^{s_i}\mathcal{G}^{\natural} \\
 \Psi[\mathcal{G}^{\natural}, \mathcal{G}] \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \Psi[{}^{s_i}\mathcal{G}^{\natural}, {}^{s_i}\mathcal{G}] \\
 \mathcal{G} & \xrightarrow{L_i} & {}^{s_i}\mathcal{G} \\
 \uparrow & \curvearrowright & \uparrow \\
 \mathcal{H} & \xrightarrow{s_i^*} & {}^{s_i}\mathcal{H}
 \end{array}$$

定理 7 と 定理 8 より定理 8 の $\mathcal{G}$ および $\mathcal{G}^{\natural}$ にたいして $\alpha \in \Phi(\mathcal{E}, \Pi, p) \setminus \mathbf{Z}\delta$ ならば $\dim \mathcal{G}_{\alpha} = \dim \mathcal{G}^{\natural}_{\alpha} = 1$ であるのが分かる。

9. アフィンワイル的許容的超代数族

Data_n^r を固定する。各 $(\mathcal{E}, \Pi, p) \in \text{Data}_n^r$ にたいして許容的超代数 $\mathcal{G}^{\sharp} = \mathcal{G}^{\sharp}(\mathcal{E}, \Pi, p)$ が 1 つずつ与えられていてさらに次の図式を可換にする自己同型写像 $L_i^{\sharp} : \mathcal{G}^{\sharp} \rightarrow {}^{s_i}\mathcal{G}^{\sharp} = \mathcal{G}^{\sharp}({}^{s_i}\mathcal{E}, {}^{s_i}\Pi, {}^{s_i}p)$ が与えられているとき $(\{\mathcal{G}^{\sharp}\}, \{L_i^{\sharp}\})$ をアフィンワイル的許容的超代数族とよぶことにする。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}^{\sharp} & \xrightarrow{L_i^{\sharp}} & {}^{s_i}\mathcal{G}^{\sharp} \\
 \Psi[\mathcal{G}^{\sharp}, \mathcal{G}] \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \Psi[{}^{s_i}\mathcal{G}^{\sharp}, {}^{s_i}\mathcal{G}] \\
 \mathcal{G} & \xrightarrow{L_i} & {}^{s_i}\mathcal{G}
 \end{array}$$

さらにアフィンワイル的許容的超代数族達のなかで極大なアフィンワイル的許容的超代数族 $(\{\mathcal{G}^b\}, \{L_i^b\})$ がただ 1 つ存在する。すなわち任意のアフィンワイル的許容的超代数族 $(\{\mathcal{G}^{\sharp}\}, \{L_i^{\sharp}\})$ にたいしてつぎの図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}^b & \xrightarrow{L_i^b} & {}^{s_i}\mathcal{G}^b \\
 \Psi[\mathcal{G}^b, \mathcal{G}^{\sharp}] \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \Psi[{}^{s_i}\mathcal{G}^b, {}^{s_i}\mathcal{G}^{\sharp}] \\
 \mathcal{G}^{\sharp} & \xrightarrow{L_i^{\sharp}} & {}^{s_i}\mathcal{G}^{\sharp}
 \end{array}$$

ここで ${}^{s_i}\mathcal{G}^b = \mathcal{G}^b({}^{s_i}\mathcal{E}, {}^{s_i}\Pi, {}^{s_i}p)$ である。

定理 9. $\mathcal{G}^b = \mathcal{G}^q$ である。

10. 主結果

$\mathcal{G}^b$ の定義関係式を求めることは可能である。したがって定理 9 より $\mathcal{G}^q$ の定義関係式が求まる。さらに 5 の注意にある事実より $\mathcal{G}$ の定義関係式が求まる。 $G(3)^{(1)}$ にたいしても別のやりかたで定義関係式が求まる。

定理 10. $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{E}, \Pi, p)$ をアフィン超代数とする。このとき $\mathcal{G}$ は生成元 $H \in \mathcal{H}$, E_i, F_i ($0 \leq i \leq n$), とパリティ $p(H) = 0$, $p(E_i) = p(F_i) = p(\alpha_i)$ とつぎの定義関形式によって実現される。

$$(S1) \quad [H, H'] = 0, \quad (H, H' \in \mathcal{H})$$

$$(S2) \quad [H, E_i] = \alpha_i(H)E_i, \quad [H, F_i] = -\alpha_i(H)F_i,$$

$$(S3) \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij}H_{\alpha_i},$$

$$(S4)(1) \quad [E_i, E_j] = 0 \quad \text{if } (\alpha_i, \alpha_j) = 0, (i \neq j),$$

$$(S4)(2) \quad [E_i, E_i] = 0 \quad \text{if } \bigotimes_i,$$

$$(S4)(3) \quad [E_i, [E_i, \dots, [E_i, E_j] \dots]] = 0$$

(E_i appears $1 - 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_i, \alpha_i)$ times)

if $(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$ and $(-1)^{\{p(\alpha_i) \frac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\}} = 1$,

$$(S4)(4) \quad [[[E_i, E_j], E_k], E_j] = 0$$

$$\text{if } \begin{array}{c} i \quad -x \quad j \quad x \quad k \\ \times \text{---} \bigotimes \text{---} \times \end{array} (x \neq 0), \quad \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \times \text{---} \bigotimes \rightleftarrows \odot \end{array} \text{ or } \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \odot \leftleftarrows \bigotimes \rightleftarrows \odot \end{array},$$

$$(S4)(5) \quad [[[[E_i, E_j], [[E_i, E_j], E_k]], E_j] = 0 \quad \text{if } \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \bigotimes \text{---} \bigotimes \leftleftarrows \bigcirc \end{array},$$

$$(S4)(6) \quad [[[[[[E_i, E_j], E_k], E_l], E_k], E_j], E_k] = 0$$

$$\text{if } \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \times \text{---} \bigcirc \text{---} \bigotimes \leftleftarrows \bigcirc \end{array} \text{ or } \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \odot \leftleftarrows \bigcirc \text{---} \bigotimes \leftleftarrows \bigcirc \end{array},$$

$$(S4)(7) \quad (-1)^{p(\alpha_i)p(\alpha_k)}(\alpha_i, \alpha_k)[[E_i, E_j], E_k] = (-1)^{p(\alpha_i)p(\alpha_j)}(\alpha_i, \alpha_j)[[E_i, E_k], E_j]$$

$$\begin{aligned} & \text{if } (\alpha_i, \alpha_j) \neq 0, (\alpha_j, \alpha_k) \neq 0, (\alpha_k, \alpha_i) \neq 0, \\ & \quad (\alpha_i, \alpha_j) + (\alpha_j, \alpha_k) + (\alpha_k, \alpha_i) = 0 \\ & \text{and } p(\alpha_i)p(\alpha_j) + p(\alpha_j)p(\alpha_k) + p(\alpha_k)p(\alpha_i) = \bar{1}, \end{aligned}$$

$$(S4)(8) \quad [[[E_i, E_j], [E_j, E_k]], [E_j, E_l]] = x[[[E_i, E_j], [E_j, E_l]], [E_j, E_k]]$$

$$\text{if } \begin{array}{c} \textcircled{i} \xrightarrow{x+1} \textcircled{j} \xrightarrow{-1} \textcircled{k} \\ \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \textcircled{l} \end{array} \quad (x \neq -1, 0),$$

$$(S4)(9)$$

$$\begin{aligned} & [[[E_k, [E_l, [E_k, E_j]]], [E_k, [E_l, [E_k, [E_j, E_i]]]]], E_j] \\ & = 2[[[E_k, E_j], [[E_l, [E_k, E_j]], [E_k, [E_l, [E_k, [E_j, E_i]]]]]] \end{aligned}$$

$$(S4)(10)$$

$$\text{if } \begin{array}{c} \textcircled{i} \Rightarrow \textcircled{j} \xrightarrow{\quad} \textcircled{k} \Leftarrow \textcircled{l} \end{array},$$

$$[E_j, [E_k, [E_j, [E_k, E_i]]]] = [E_k, [E_j, [E_k, [E_j, E_i]]]]$$

$$(S4)(11)$$

$$\text{if } \begin{array}{c} \textcircled{k} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \textcircled{i} \quad \textcircled{j} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{y} \end{array}$$

$$[[[[[[[[[E_i, E_j], E_k], E_l], E_k], E_j], E_k], E_l], E_k], E_j], E_k] = 0$$

$$(S4)(12)$$

$$\text{if } \begin{array}{c} \textcircled{i} \xrightarrow{\quad} \textcircled{j} \xrightarrow{\quad} \textcircled{k} \xrightarrow{\quad} \textcircled{l} \end{array},$$

$$[[[[[E_l, E_k], E_j], E_i], E_k], E_j] = 2[[[[[E_l, E_k], E_j], E_i], E_j], E_k]$$

$$(S4)(13)$$

$$\text{if } \begin{array}{c} \textcircled{i} \xrightarrow{\quad} \textcircled{j} \xrightarrow{\quad} \textcircled{k} \xrightarrow{\quad} \textcircled{l} \end{array},$$

$$[[[E_i, E_j], [[E_i, E_j], [[E_i, E_j], E_k]]], E_j] = 0$$

$$(S4)(14)$$

$$\text{if } \begin{array}{c} \textcircled{i} \quad \textcircled{j} \quad \textcircled{k} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{y} \quad \textcircled{z} \end{array},$$

$$[E_j, [E_k, [E_k, [E_j, E_i]]]] = [E_k, [E_j, [E_k, [E_j, E_i]]]]$$

$$\text{if } \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \circ \text{---} \otimes \text{---} \bullet \end{array},$$

(S4)(15)

$$2[[[[[E_l, E_k], E_j], E_i], E_k], E_j] = 3[[[[[E_l, E_k], E_j], E_i], E_j], E_k]$$

$$\text{if } \begin{array}{c} l \quad k \quad j \quad i \\ \circ \text{---} \otimes \text{---} \circ \text{---} \leftarrow \circ \end{array},$$

(S4)(16)

$$[[[[[[[[[[[E_i, E_j], E_k], E_l], E_k], E_j], E_k], E_l], E_k], E_j], E_k], E_l], E_k], E_j], E_k] = 0$$

$$\text{if } \begin{array}{c} l \quad k \quad j \quad i \\ \circ \text{---} \otimes \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array},$$

(S5)(a) ($1 \leq a \leq 16$) (S4)(a) の E_i を F_i に取り替えたもの。

$$(S6) \quad x(k; \delta) = 0 \quad \text{if } k > 0 \text{ and } \dim(\ker \Psi[\mathcal{G}^h, \mathcal{G}] \cap \mathcal{G}_{k\delta}^h) \neq 0,$$

$$(S7) \quad y(k; \delta) = 0 \quad \text{if } k > 0 \text{ and } \dim(\ker \Psi[\mathcal{G}^h, \mathcal{G}] \cap \mathcal{G}_{-k\delta}^h) \neq 0.$$

ここで $x(k; \delta)$ (resp. $y(k; \delta)$) は $\mathcal{N}[\tilde{\mathcal{G}}]_+ \cap \tilde{\mathcal{G}}_{k\delta}$ (resp. $\mathcal{N}[\tilde{\mathcal{G}}]_- \cap \tilde{\mathcal{G}}_{-k\delta}$) の元であって、 $\Psi[\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G}^h](x(k; \delta))$ (resp. $\Psi[\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G}^h](y(k; \delta))$) が 1 次元空間である $\ker \Psi[\mathcal{G}^h, \mathcal{G}] \cap \mathcal{G}_{k\delta}^h$ (resp. $\ker \Psi[\mathcal{G}^h, \mathcal{G}] \cap \mathcal{G}_{-k\delta}^h$) を張るものである。(5の注意の事実を考慮すれば $x(k; \delta)$ (resp. $y(k; \delta)$) を構成するのは容易である。)

11. アフィン量子超代数の場合

データ $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ に対して $\mathbf{C}(q)$ ($\mathbf{D}(2, 1; x)^{(1)}$ のときは $\mathbf{C}(q)$ の適当な拡大体) 上の Hopf 代数 $U_q(\mathcal{E}, \Pi, p)$ を Lusztig の教科書と同様の方法で (定義関係式を使わずに) 定義されたものとする。 $\Pi = \{\alpha_i \mid (0 \leq i \leq n = |\Pi| - 1)\}$ とする。 $U_q(\mathcal{E}, \Pi, p)$ はつぎの関係式を満たす生成元 $\{K_i^\pm, E_i, F_i \mid (0 \leq i \leq n)\}$ をもつ。 $\alpha, \beta \in P$ とする。 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して $K_i X_\alpha K_i^{-1} = q^{(\alpha, \alpha_i)} X_\alpha$, $K_i X_\beta K_i^{-1} = q^{(\beta, \alpha_i)} X_\beta$ を満たす元 X_α, X_β に対して

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - (-1)^{p(\alpha)p(\beta)} q^{-(\alpha, \beta)} X_\beta X_\alpha$$

とおく。

定理 11. データ $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ をアフィン型であってしかも $\mathcal{G}(\mathcal{E}, \Pi, p) = \mathcal{G}^h(\mathcal{E}, \Pi, p)$ であるかまたは定理 5 の (x) のものとする。 このとき $U_q(\mathcal{E}, \Pi, p)$ は生成元 $\{K_i^\pm, E_i, F_i \mid (0 \leq i \leq n)\}$ と次の定義関係式によって実現される：

$$(QS1) \quad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad K_i K_j = K_j K_i,$$

$$(QS2) \quad K_i E_j K_i^{-1} = q^{(\alpha_i, \alpha_j)} E_j, \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^{-(\alpha_i, \alpha_j)} F_j,$$

$$(QS3) \quad E_i F_j - (-1)^{p(\alpha_i)p(\alpha_j)} F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}$$

(QS4)(a) ($1 \leq a \leq 16$) 定理 10 の (S4)(a) の記号 [と] をそのまま [と] にとりかえて、さらに係数 $y \in \mathbb{C}$ を $(q^y - q^{-y})/(q - q^{-1})$ にとりかえたもの。

(QS5)(a) ($1 \leq a \leq 16$) (QS4)(a) の E_i を F_i にとりかえたもの。

$$(QS6) \quad \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^i k \bar{d}_j \right] K_\delta^{\frac{k}{2}} h_{ik} = 0 \quad (k > 0) \quad ((\mathcal{E}, \Pi, p) \text{ が定理 5 の (x) のもののとき})$$

$$(QS7) \quad \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^i k \bar{d}_j \right] K_\delta^{-\frac{k}{2}} h_{i,-k} = 0 \quad (k > 0) \quad ((\mathcal{E}, \Pi, p) \text{ が定理 5 の (x) のもののとき})$$

ここで h_{ik} と $h_{i,-k}$ は Beck の論文 [B] の同じ記号のものと同様に定義されるものである。

12. $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ が (AA) のときの Drinfeld realization

Beck [B] と同様にしつぎの定理をえる。

定理 12. $(\mathcal{E}, \Pi, p)$ が (AA) のとき $U_q(\mathcal{E}, \Pi, p)$ は生成元 $\{K_\alpha (\alpha \in P + \frac{1}{2}\mathbb{Z}\delta), x_{ij}^\pm, h_{ik} (1 \leq i \leq N-1, j, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)\}$ と次の定義関係式によって実現される：

$$\begin{aligned} K_0 &= 1, \quad K_\alpha K_\beta = K_{\alpha+\beta}, \\ K_\alpha x_{jk}^\pm K_\alpha^{-1} &= q^{(\pm\alpha_j + k\delta, \alpha)} x_{jk}^\pm, \\ [h_{ik}, h_{jl}] &= \delta_{k,-l} \frac{1}{k} Q_{ij,k} \frac{K_\delta^k - K_\delta^{-k}}{q - q^{-1}}, \\ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^i k \bar{d}_j \right] K_\delta^{\frac{k}{2}} h_{i,k} &= 0 \quad (k \neq 0) \quad \text{if } \sum_{i=1}^N \bar{d}_i = 0, \\ [h_{ik}, x_{jl}^\pm] &= \pm \frac{1}{k} Q_{ij,k} K_\delta^{\mp \frac{|k|}{2}} x_{j,k+l}^\pm, \\ x_{ik+1}^\pm x_{jl}^\pm - (-1)^{p(\alpha_i)p(\alpha_j)} q^{\pm(\alpha_i, \alpha_j)} x_{jl}^\pm x_{ik+1}^\pm &= (-1)^{p(\alpha_i)p(\alpha_j)} q^{\pm(\alpha_i, \alpha_j)} x_{ik}^\pm x_{jl+1}^\pm - x_{jl+1}^\pm x_{ik}^\pm, \\ [x_{ik}^+, x_{jl}^-] &= \delta_{ij} \frac{K_\delta^{\frac{k-l}{2}} \psi_{ik+l} - K_\delta^{\frac{l-k}{2}} \phi_{ik+l}}{q - q^{-1}}, \\ [x_{ik}^\pm, x_{jl}^\pm] &= 0 \quad \text{if } (\alpha_i, \alpha_j) = 0, \end{aligned}$$

(以下の式で $\text{Sym}_{k_1, k_2, \dots, k_s}$ は $\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$ にたいする symmetrization をあらわす。)

$$\text{Sym}_{k_1, k_2} [[x_{ik_1}^\pm, [x_{ik_2}^\pm, x_{jl}^\pm]]] = 0 \quad \text{if } (\alpha_i, \alpha_i) \neq 0 \text{ and } (\alpha_i, \alpha_j) \neq 0,$$

$$\text{Sym}_{k_1, k_2} [[[[x_{il}^\pm, x_{jk_1}^\pm], x_{um}^\pm], x_{jk_2}^\pm]] = 0 \quad \text{if } \begin{array}{c} i \quad j \quad u \\ \times \longrightarrow \otimes \longrightarrow \times \end{array},$$

ここで ψ_{ik} と ϕ_{ik} は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \psi_{ik} z^k &= K_i \exp((q - q^{-1}) \sum_{r \geq 1} h_{ir} z^r), \\ \sum_{k \geq 0} \phi_{ik} z^k &= K_i^{-1} \exp((q^{-1} - q) \sum_{r \geq 1} h_{i,-r} z^r). \end{aligned}$$

References

- [B] J.Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Commun. Math. Phys. 165(1994), 555-568.
- [D] V.G.Drinfeld, *Quantum groups*, Proc. Int. Congr. Math., Berkeley, 1 (1986), Amer. Math. Soc. (1988), 798-820.
- [FSS] L.Frappet-A.Seiarino-P.Sorba, *Structure of basic Lie superalgebras and of their affine extensions*, Commun. Math. Phys. 121(1989) 457-500.
- [GK] O.Gabber-V.G.Kac, *On defining relations of certain infinite-dimensional Lie algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 5(1981), 185-189.
- [J] M.Jimbo, *A q -defference analogue of $U(G)$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys., 10(1985), 798-820.
- [K1] V.G.Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [K2] V.G.Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math., 26 (1977), 8-96.
- [KT] S.M.Khoroshkin-V.N.Tolstoy, *Twisting of quantum (super)algebras. Connection of Drinfeld's and Cartan-Weyl realization for quantum affine algebras*, preprint (1993)
- [L] G.Lusztig, *Introductin to Quantum Groups*, Birkhauser, 1993.
- [LS] D.Leites-V.Serganova, *Defining relations for classical Lie superalgebras. I. Superalgebras with Cartan matrix or Dynkin-type diagram.*, In: J. Mickelsson e.a., (ed.) *Proc. Topological and Geometrical Methods in Field Theory*, World Sci., Singapore, 1992, 194-201.
- [LSS] D.Leites-M.Saveliev-V.Serganova, *Embeddings of Lie superalgebra $osp(1,2)$ and nonlinear symmetric equatuions*, Group-theoretical methods in Physics, Moscow (1986) 255-298.
- [VdL1] J.W. Van De Leur, *Contragrredient Lie superalgebras of finite growth*, Thesis, University of Utrecht (1986)
- [VdL2] J.W. Van De Leur, *A classification of contragrredient Lie superalgebras of finite growth*, Comm. Algebra 17 (1989), 1815-1842.
- [Y1] H.Yamane, *Quantized enveloping algebras associated to simple Lie superalgebras and Their R -matrices*, Publ. RIMS Kyoto Univ., 30, no. 1 (1994) 15-87.
- [Y2] H.Yamane, *A Serre type theorem for affine Lie superalgebras and their quantized enveloping superalgebras*, Proc. Japan Acad.,70 Ser.A (1994) 31-36.

- [Y3] H.Yamane, *On defining relations of affine Lie superalgebras and affine quantized universal enveloping superalgebras*, submitted