

DRINFELD FUNCTOR AND FINITE-DIMENSIONAL REPRESENTATIONS OF YANGIAN $Y(\mathfrak{sl}_n)$

名古屋大学多元数理科学研究科 荒川 知幸

1. はじめに

ヤンギアンとは, Drinfeld により導入された量子群である ([1]). ここでの我々の興味は, A_ℓ 型のヤンギアン $Y(\mathfrak{sl}_n)$ の有限次元表現である. ヤンギアン $Y(\mathfrak{sl}_n)$ の有限次元既約表現は, Drinfeld 多項式と呼ばれる $n-1$ 個のモニック多項式の列でパラメータ付けされることが既に知られている ([2]). ところが, $Y(\mathfrak{sl}_n)$ の有限次元表現は半単純ではなく, 一般にはその既約表現を具体的に構成するのは難しい. 従って, 与えられた Drinfeld 多項式に対応する既約表現の指標を得ることが, 最初の目標となる.

ところが, 一方, Drinfeld は, [3] の中で, Schur 関手 (あるいは Weyl の相互律) の拡張として, 退化アフィンヘッケ環 (degenerate affine Hecke algebra) $\mathcal{H}_\ell$ の有限次元表現のなす圏から, ヤンギアン $Y(\mathfrak{sl}_n)$ 有限次元表現のなす圏への, Drinfeld 関手と呼ばれる完全関手 D_ℓ を構成している. 退化アフィンヘッケ環 $\mathcal{H}_\ell$ の有限次元既約表現の “指標” (Grothendieck 群のなかでの変換公式) は既にわかっているのので, それを用いようというのは自然な発想と思われる.

ところで, [3] における Drinfeld の定理は次のようなものであった.

定理 1 ([3]). $\ell < n$ とする.

この時, 関手 D_ℓ は有限次元 $\mathcal{H}_\ell$ 加群のなす圏とレベル ℓ 有限次元 $Y(\mathfrak{sl}_n)$ 加群のなす圏との間の圏同値を与える.

ここで, レベル ℓ 有限次元 $Y(\mathfrak{sl}_n)$ 加群に定義のついては [4] を参照して頂きたい. ともかく, $\ell < n$ の場合に限ってしまうと, 全ての $Y(\mathfrak{sl}_n)$ の既約表現が, Drinfeld 関手による $\mathcal{H}_\ell$ の既約表現の像として現われるわけではないので, 上記の目的に対しては, 上の定理だけでは, 不十分になってしまうのである¹

従って, ここでは, Drinfeld の定理を, Schur 関手の場合と同レベルに拡張し, その結果を用いて, ヤンギアン $Y(\mathfrak{sl}_n)$ の指標公式を導出することを考えたいと思う.

なお, ヤンギアンと量子群 U_q , 退化アフィンヘッケ環とアフィンヘッケ環の有限次元表現論は, それぞれ平行であるので, 以下に述べる結果は, 適当な読み替えの下, そのままアフィンヘッケ環と U_q との間の相互律に適応される.

また, ヤンギアンあるいは U_q の有限次元表現の指標, あるいは Grothendieck 群の系統的取り扱いに関して, 最近 Frenkel-Reshtikhin による興味深い試みがなされていること ([5]), また, 指標公式に関しては, E. Vasserot が交叉コホモロジーを用いて同様の式を記述していることも付け加えておく ([6]).

¹定理 1 の証明は文献に存在しないので, この $\ell < n$ という仮定が, Drinfeld の証明において本質的かどうかは筆者は知らない. しかし, Chari-Pressley が U_q とアフィンヘッケ環の場合に, 同様の定理を得ている ([4]), その証明には $\ell < n$ という仮定を本質的に使っている.

以下, 体は $\mathbb{C}$, また登場する代数も全て $\mathbb{C}$ 上の代数とする.

2. 準備

2.1. 自然数 n を固定する. ヤングアン $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の定義から始める.

定義 2. 代数 $Y(\mathfrak{gl}_n)$ を次の生成元と関係式によって定める.

$$\text{生成元: } t_{ij}^{(k)} \quad (1 \leq i, j \leq n, k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.1.1)$$

$$\text{関係式: } [t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s-1)}] - [t_{ij}^{(r-1)}, t_{kl}^{(s)}] = t_{kj}^{(r-1)} t_{il}^{(s-1)} - t_{kj}^{(s-1)} t_{il}^{(r-1)} \quad (2.1.2)$$

$$(1 \leq i, j, k, l \leq n, r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}). \quad (2.1.3)$$

ここで, $t_{ij}^{(-1)} = \delta_{ij} \text{id}$ とおいた.

生成元の母関数を

$$t_{ij}(u) := \sum_{d=0}^{\infty} t_{ij}^{(d-1)} u^{-d} \in Y(\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]]$$

で定める. このとき, 対応

$$t_{ij}(u) \mapsto \sum_{a=1}^n t_{ia}(u) \otimes t_{aj}(u) \quad (\text{余積}),$$

$t(u) \mapsto t(u)^{-1}$ (対合射), $t(u) \mapsto 1$ (余単位射) により $Y(\mathfrak{gl}_n)$ はホップ代数となる.

$U(\mathfrak{gl}_n)$ を複素リー環 $\mathfrak{gl}_n$ の普遍包絡環とする. $U(\mathfrak{gl}_n)$ は, 埋め込み $E_{ij} \mapsto t_{ij}^{(0)}$ により $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の部分代数となる. 逆に, $a \in \mathbb{C}$ に対して代数射

$$\begin{aligned} \text{ev}_a: Y(\mathfrak{gl}_n) &\longrightarrow U(\mathfrak{gl}_n) \\ t_{ij}(u) &\longmapsto \delta_{ij} + \frac{E_{ij}}{u-a} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

が定まる. これにより, $\mathfrak{gl}_n$ の表現 (V, π) に対し, $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の表現 $(V, \pi \circ \text{ev}_a)$ が定まる. この $Y(\mathfrak{gl}_n)$ 加群を V_a で表す.

量子行列式 $\text{qdet } t(u)$ を

$$\text{qdet } t(u) = \sum_{w \in W_n} (-1)^{\text{sgn}(w)} t_{w(1),1}(u) t_{w(2),2}(u-1) \cdots t_{w(n),n}(u-n+1)$$

で定める. ここで, W_n は n 次対称群. すると, $\text{qdet } t(u)$ の係数は代数的に独立であり, $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の中心 $Z(Y(\mathfrak{gl}_n))$ を生成する ([7]).

$Y(\mathfrak{gl}_n)$ の同型射 σ_f を, $\sigma_f(t_{ij}(u)) = f(u) t_{ij}(u)$ で定義する. ここで, $f(u) \in 1 + u^{-1} \mathbb{C}[[u^{-1}]]$. ヤングアン $Y(\mathfrak{sl}_n)$ は, 次で定義される $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の部分ホップ代数である:

$$Y(\mathfrak{sl}_n) := \{x \in Y(\mathfrak{gl}_n) \mid \sigma_f(x) = x \ \forall f \in 1 + u^{-1} \mathbb{C}[[u^{-1}]]\}.$$

次が成立する.

定理 3 ([7]).

$$Y(\mathfrak{gl}_n) \cong Z(Y(\mathfrak{gl}_n)) \otimes Y(\mathfrak{sl}_n). \quad (2.1.5)$$

2.2. $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の最高ウェイト表現は, $\mathfrak{gl}_n$ の時と同様に定義される: $Y(\mathfrak{gl}_n)$ 加群 V が最高ウェイト表現であるとは,

$$\begin{aligned} V &= Y(\mathfrak{gl}_n) \cdot v, \\ t_{ij}(u) \cdot v &= 0 \quad (1 \leq i < j \leq n), \\ t_{ii}(u-i) \cdot v &= \zeta_i(u)v \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

となる $v \in V$ と $\zeta_i(u) \in 1 + u^{-1}\mathbb{C}[[u^{-1}]]$ が存在することである. また, このような v は V の最高ウェイトベクトル, $\zeta(u) = (\zeta_1(u), \dots, \zeta_n(u))$ は最高ウェイトと呼ばれる. 中心 $\text{qdet } t(u)$ は V には定数 $\zeta_1(u)\zeta_2(u-1)\dots, \zeta_n(u-n+1)$ で作用する.

定理 4 ([2]).

(1) 最高ウェイト $\zeta(u) = (\zeta_1(u), \dots, \zeta_n(u))$ の $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の既約最高ウェイト表現 V が, 有限次元表現である為の必要十分条件は,

$$\frac{\zeta_k(u)}{\zeta_{k+1}(u+1)} = \frac{Q_k(u+1)}{Q_k(u)} \quad (2.2.1)$$

を満たすモニック多項式の列 $Q(u) = (Q_1(u), \dots, Q_{n-1}(u))$ が存在することである.

(2) (1) の対応は有限次元既約 $Y(\mathfrak{sl}_n)$ 表現の同値類と $n-1$ 個のモニック多項式の集合との一対一対応を与える.

(2.2.1) 式で定義される多項式の列を $Q(u) = (Q_1(u), \dots, Q_{n-1}(u))$ を V の Drinfeld 多項式という².

2.3. ℓ を自然数とする.

定義 5. 代数 $\mathcal{H}_\ell$ を次の生成元と関係式により定義する.

$$\text{生成元: } s_1, s_2, \dots, s_{\ell-1}, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_\ell \quad (2.3.1)$$

$$\text{関係式: } s_i^2 = 1 \quad (1 \leq i \leq \ell-1) \quad (2.3.2)$$

$$s_i \cdot s_{i+1} \cdot s_i = s_{i+1} \cdot s_i \cdot s_{i+1} \quad (1 \leq i \leq \ell-2) \quad (2.3.3)$$

$$s_i \cdot s_j = s_j \cdot s_i \quad (|i-j| > 1) \quad (2.3.4)$$

$$[\epsilon_i, \epsilon_j] = 0 \quad (1 \leq i, j \leq \ell) \quad (2.3.5)$$

$$s_i \cdot \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \cdot s_i = -1 \quad (1 \leq i \leq \ell-1) \quad (2.3.6)$$

$$s_i \cdot \epsilon_j = \epsilon_j \cdot s_i \quad (|i-j| > 1) \quad (2.3.7)$$

$\mathcal{H}_\ell$ は GL_ℓ 型の退化アフィンヘッケ環, あるいは graded affine Hecke algebra([8]) と呼ばれる.

定義より $\mathcal{H}_\ell$ は W_ℓ の群多元環 $\mathbb{C}[W_\ell]$ 及び ℓ 変数多項式環 $\mathbb{C}[\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell]$ を部分代数として含み, ベクトル空間としては

$$\mathcal{H}_\ell \cong \mathbb{C}[W_\ell] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell]$$

となる. また,

$$\mathcal{H}_\ell = \mathbb{C}[W_\ell] \cdot \mathbb{C}[\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell] = \mathbb{C}[\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell] \cdot \mathbb{C}[W_\ell]$$

が成立する.

²通常 Drinfeld 多項式の記号は $P(u)$ なのだが, ここでは後の都合上 $Q(u)$ を使わせて頂く

2.4. 自然数 r に対し,

$$P_r = \mathbb{C}^r, \quad P_r^+ := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in P_r \mid \lambda_i - \lambda_j \notin -\mathbb{N} \ (i < j)\}, \quad (2.4.1)$$

$$P_{r, \mathbb{Z}}^+ := P_r^+ \cap \mathbb{Z}^r \quad (2.4.2)$$

とおく. $\mathcal{H}_\ell$ の零表現を除く既約有限次元表現のパラメーター付けは次の集合で与えられる.

$$S(\ell) := \bigsqcup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ (\lambda, \mu) \in P_r^+ \times P_r \mid \lambda_i - \mu_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^r (\lambda_i - \mu_i) = \ell \right\}. \quad (2.4.3)$$

これを以下に説明する.

複素数 a に対し, $\mathcal{H}_\ell$ の一次元表現 $\mathbb{C}_{a; \ell} = \mathbb{C}1_{a; \ell}$ を次で定義する.

$$s_i \cdot 1_{a; \ell} = 1_{a; \ell} \quad (i = 1, \dots, \ell - 1), \quad (2.4.4)$$

$$\epsilon_i \cdot 1_{a; \ell} = (a - \ell + i)1_{a; \ell} \quad (i = 1, \dots, \ell). \quad (2.4.5)$$

$S(\ell) \ni (\lambda, \mu)$ に対して, ℓ の分割 $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ が, $\ell_i = \lambda_i - \mu_i$ により定まる. この分割を $\nu_{\lambda, \mu}$ とかく. 次で $\mathcal{H}_\ell$ の誘導表現 $\mathcal{K}(\lambda, \mu)$ を定義する.

$$\mathcal{K}(\lambda, \mu) := \mathcal{H}_\ell \otimes (\mathcal{H}_{\ell_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{\ell_r}) (\mathbb{C}_{\lambda_1; \ell_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}_{\lambda_r; \ell_r}), \quad (2.4.6)$$

ここで, $\mathcal{H}_{\ell_1} \otimes \mathcal{H}_{\ell_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{\ell_r}$ は,

$$\epsilon_a \mapsto \epsilon_{a + \sum_{j=1}^{h-1} \ell_j}, \quad s_a \mapsto s_{a + \sum_{j=1}^{h-1} \ell_j}$$

で定義される埋め込み $\mathcal{H}_{\ell_h} \hookrightarrow \mathcal{H}_\ell$ により, $\mathcal{H}_\ell$ の部分代数とみなしている.

定義より, W_ℓ 加群としての次の同型が成立する.

$$\mathcal{K}(\lambda, \mu) \cong \mathbb{C}[W_\ell/W_{\ell_1} \times \dots \times W_{\ell_r}]. \quad (2.4.7)$$

従って, ℓ の分割 ν に対して, 対応する W_ℓ の既約表現を $U(\nu)$ と書けば,

$$\mathcal{K}(\lambda, \mu) \cong U(\nu_{\lambda, \mu}) \oplus \bigoplus_{\nu > \nu_{\lambda, \mu}} U(\nu)^{\oplus c_\nu}, \quad (2.4.8)$$

なる W_ℓ 加群としての分解が成立する. ここで, $>$ は分割の中の dominance order であり, c_ν 達はある自然数である.

定理 6 ([9]). $S(\ell) \ni (\lambda, \mu)$ に関して次の同値な事実が成立する.

(1) $\mathcal{H}_\ell$ 加群 $\mathcal{K}(\lambda, \mu)$ は唯一の既約商加群 $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$ をもつ. また, 分解(2.4.8)における $U(\nu)$ の, $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$ 上の像は零ではない.

(2) $\mathcal{K}(\lambda, \mu)$ は分解(2.4.8)において $\mathcal{H}_\ell$ 上 $U(\nu)$ で生成される.

上の定理により, $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$ は, $\mathcal{K}(\lambda, \mu)$ の唯一の既約商加群として定義される. $\mathcal{K}(\lambda, \mu)$ はスタンダード加群と呼ばれる.

2.5. ここで, あとの都合上, $\mathcal{H}_\ell$ の別の生成元を導入する.

$\mathcal{H}_\ell$ の元 y_i ($i = 1, \dots, \ell$) を

$$y_i = \epsilon_i - \sum_{j \leq i} s_{ij}$$

で定める. ここで, $s_{ij} = (i, j) \in W_\ell \subset \mathcal{H}_\ell$. すると, 交換関係

$$[y_i, y_j] = -(y_i - y_j)s_{ij} \quad (2.5.1)$$

$$w \cdot y_i = y_{w(i)} \cdot w \quad (2.5.2)$$

が確かめられる. これにより, 元 $y_1, \dots, y_\ell$ と $s_i \in W_\ell$ も, 関係式 (2.3.2-2.3.4), (2.5.1-2.5.2) を持つ $\mathcal{H}_\ell$ の生成元となることがわかる.

3. DRINFELD 関手

3.1. $\mathcal{H}_\ell$ 加群 M に対し, ベクトル空間 $M \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes \ell}$ を考える. 対角作用 $w \mapsto w \otimes w$ により, $M \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes \ell}$ は W_ℓ 加群となる. ここで, $(\mathbb{C}^n)^{\otimes \ell}$ 上に, 対称群はベクトルの入れ替えとして作用している.

ここで, 空間 $D_\ell(M)$ を $M \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes \ell}$ の反対称部分空間として定義する:

$$D_\ell(M) := [M \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes \ell}]^{\text{Anitissymmetric}}$$

命題 7 ([3]). 対応

$$t_{ij}^{(r)} \mapsto \sum_{a=1}^{\ell} (y_a)^r \otimes \tau_a(E_{ij}) \quad (3.1.1)$$

により $D_\ell(M)$ 上に $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の (従って $Y(\mathfrak{sl}_n)$ の) 作用が定まる. ここで, $\tau_i(X)$ は X の $(\mathbb{C}^n)^{\otimes \ell}$ の左から i 番目の $\mathbb{C}^n$ への作用を表す.

証明の概略. 上の作用が意味を持つことは, (2.5.2) 式より (3.1.1) 式の右辺が対称群の作用と可換であることから従う. 実際に作用を定めていることは単純計算により確かめられる ([10] 参照). $\square$

上の命題より, $\mathcal{H}_\ell$ の有限次元表現のなす圏から $Y(\mathfrak{gl}_n)$ あるいは $Y(\mathfrak{sl}_n)$ 有限次元表現のなす圏への関手 D_ℓ が定まる. この関手を Drinfeld 関手と呼ぶ. 定義より D_ℓ が完全関手であることは容易に分かる.

3.2. 最初に Drinfeld 関手の基本的性質を述べる ([4] 参照).

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ を $\mathfrak{gl}_n$ のウェイトとし, $L(\lambda)$ で $\mathfrak{gl}_n$ の最高ウェイト λ の既約最高ウェイト加群を表す.

最初の命題はワイルの相互律から明らかであろう.

命題 8. M を $\mathcal{H}_\ell$ 加群, $M = \bigoplus_{\nu=(\nu_1, \dots, \nu_r)} U(\nu)^{\oplus c_\nu}$ を W_ℓ 加群としての分解とする.

この時, $\mathfrak{gl}_n$ 加群として次の同型が成立する.

$$D_\ell(M) \cong \bigoplus_{\nu' \leq \nu} L(\nu')^{\oplus c_\nu}.$$

ここで, ν' は ν のヤング図形としての転置であり, $\mathfrak{gl}_n$ の支配的整ウェイトと同一視している.

命題 9. M_1 および M_2 をそれぞれ $\mathcal{H}_{\ell_1}$, $\mathcal{H}_{\ell_2}$ 加群とする. この時, $Y(\mathfrak{gl}_n)$ 加群としての同型

$$D_{\ell_1}(M_1) \otimes D_{\ell_2}(M_2) \cong D_{\ell_1+\ell_2} \left(\mathcal{H}_{\ell_1+\ell_2} \otimes_{(\mathcal{H}_{\ell_1} \otimes \mathcal{H}_{\ell_2})} (M_1 \otimes M_2) \right)$$

が成立する.

命題 9 において, ベクトル空間としての同型は容易にわかる. ヤングアン加群としての同型も, 表現 (3.1.1) の別の表示を使えば簡単に分かるのだがここでは省略する.

3.3. $S(\ell)$ の部分集合 $S^{(n)}(\ell)$ を次で定義する.

$$S^{(n)}(\ell) := \{(\lambda, \mu) \in S(\ell) \mid \lambda_i - \mu_i \leq n \ \forall i\}.$$

定理 10. $S(\ell)$ の元 (λ, μ) について,

(1) スタンダード加群の像 $D_\ell(K(\lambda, \mu))$ は, 零でなければ $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の最高ウェイト表現³.

(2) 既約表現の像 $D_\ell(\mathcal{L}(\lambda, \mu))$ は零でなければ $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の既約表現

(3) $D_\ell(K(\lambda, \mu)) \neq 0 \iff D_\ell(\mathcal{L}(\lambda, \mu)) \neq 0 \iff (\lambda, \mu) \in S_n(\ell)$.

命題 11. M を $\mathcal{H}_\ell$ 加群, また U を, W_ℓ 加群としての M のある既約部分加群とする. $M = \mathcal{H}_\ell \cdot U$, $D_\ell(U) \neq 0$ を仮定する. この時, $D_\ell(M) = Y(\mathfrak{gl}_n) \cdot D_\ell(U)$ となる. ここで, $D_\ell(U)$ は U の Drinfeld 関手による $D_\ell(M)$ 上のベクトル空間としての像.

この命題の証明は, 本質的に M が W_ℓ の符号表現からの誘導表現の時⁴に帰結させて行う ([11] 参照).

定理 10 の証明. (1) (2.4.8) 式, 及び命題 8 より, $\mathfrak{gl}_r$ 加群として次の同型が成立することに注意する.

$$D_\ell(K(\lambda, \mu)) \cong L(\nu'_{\lambda, \mu}) \oplus \bigoplus_{\substack{\gamma > \nu \\ \gamma_i \leq n}} L(\gamma')^{\oplus c_\gamma} \quad (c_\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad (3.3.1)$$

$D_\ell(M) \neq 0$ とする. すると, (3.3.1) 式より, $L(\nu'_{\lambda, \mu}) = D_\ell(U(\nu'_{\lambda, \mu})) \neq 0$. ところが, $M(\lambda, \mu) = \mathcal{H}_\ell \cdot U(\nu'_{\lambda, \mu})$ であったから (定理 6), 命題 11 より, $D_\ell(M(\lambda, \mu)) = Y(\mathfrak{gl}_n) \cdot L(\nu'_{\lambda, \mu})$. 従って, $D_\ell(K(\lambda, \mu))$ は $L(\nu'_{\lambda, \mu})$ の $\mathfrak{gl}_n$ の最高ウェイトベクトル v で生成される. 再び分解 (3.3.1) 式より, ウェイト $\nu'_{\lambda, \mu}$ は $D_\ell(M(\lambda, \mu))$ に現われる $\mathfrak{gl}_n$ ウェイトの中で最高. 従って, v は $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の最高ウェイトベクトルとならなくてはならない. (2) $D_\ell(\mathcal{L}(\lambda, \mu)) \neq 0$ とし, V をその零ではない部分 $Y(\mathfrak{gl}_n)$ 加群とする. ここで, $\mathfrak{gl}_n$ 加群としての V の零ではない既約部分加群 L を一つとる. ワイルの相互律より, 既約 W_ℓ 部分加群 $U \subset \mathcal{L}(\lambda, \mu)$ が存在し, $L = D_\ell(U)$ となる. $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$ は既約なので, $\mathcal{L}(\lambda, \mu) = \mathcal{H}_\ell \cdot U$. よって, 命題 11 より $D_\ell(\mathcal{L}(\lambda, \mu)) = Y(\mathfrak{gl}_n) \cdot L \subset Y(\mathfrak{gl}_n) \cdot V$. (3) $K(\lambda, \mu)$ については (1) で既にみた. 残りは, $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$ は $K(\lambda, \mu)$ の $U(\nu'_{\lambda, \mu})$ の像が零ではない商加群 (定理 6) であることより従う. $\square$

$(\lambda, \mu) \in S^{(n)}(\ell)$ について,

$$M(\lambda, \mu) := D_\ell(K(\lambda, \mu)), \quad V(\lambda, \mu) := D_\ell(\mathcal{L}(\lambda, \mu)) \quad (3.3.2)$$

と置く. 定理 10 より, $M(\lambda, \mu)$ は最高ウェイト加群, $V(\lambda, \mu)$ は $M(\lambda, \mu)$ の唯一の既約商加群である.

3.4. $M(\lambda, \mu)$ の具体形と, $V(\lambda, \mu)$ の Drinfeld 多項式は次で記述される.

命題 12. $S^{(n)}(\ell)$ の元 (λ, μ) ($\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$) について,

(1) 次の $Y(\mathfrak{gl}_n)$ 加群としての同型が成立する.

$$M(\lambda, \mu) \cong L(\Lambda_{\ell_1})_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes L(\Lambda_{\ell_1})_{\lambda_r}. \quad (3.4.1)$$

ここで, $\ell_i = \lambda_i - \mu_i$.

(2) $V(\lambda, \mu)$ の Drinfeld 多項式 $Q(u) = (Q_1(u), \dots, Q_{n-1}(u))$ は次で与えられる.

$$Q_k(u) = \prod_{\substack{i=1, \dots, r \\ \lambda_i - \mu_i = k}} (u - \lambda_i), \quad (3.4.2)$$

³ 注意 15 を参照

⁴ これは無限次元表現だが, 適当な意味に Drinfeld 関手を拡張しておく.

証明. (1) の同型は $\mathfrak{gl}_n$ 加群としては自明である. $Y(\mathfrak{gl}_n)$ 加群としての同型も, 命題 9 及び $\mathcal{K}(\lambda, \mu)$ の定義式から容易に確かめられる. (2) は, (1) より単純計算により従う. $\square$

ここで, (3.4.2) 式から容易に分かるように, 全ての有限次元 $Y(\mathfrak{sl}_n)$ 加群が $V(\lambda, \mu)$ という形で得られることに注意する. 実際, 有限次元 $Y(\mathfrak{sl}_n)$ 加群のパラメーター付けは, Drinfeld 多項式 $Q_k(u)$ の根に $\lambda_i - \mu_i = k$ なる λ_i 達を対応させることにより, 次の集合でも与えられる

$$\mathcal{S}^{(n-1)} := \bigsqcup_{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{S}^{(n-1)}(\ell) \subset \bigsqcup_{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{S}^{(n)}(\ell).$$

注意 13. $M(\lambda, \mu)$ の, [12] の意味での指標は容易に計算できる.

注意 14. $\lambda - \rho, \mu - \rho \in P_r^+$ のとき, $V(\lambda, \mu)$ はタイム表現 ([13] 参照) となる. ここで, $\rho = (\frac{r-1}{2}, \frac{r-3}{2}, \dots, -\frac{r-1}{2})$.

注意 15. 定理 10(1) と上の命題 12 より, $L(\Lambda_{\ell_1})_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes L(\Lambda_{\ell_r})_{\lambda_r}$ ($\lambda_i - \lambda_j \neq -N \forall i < j$) は最高ウェイト表現であるということになるが, これは既に知られた事実である ([14]).

4. 指標公式

4.1. さて, これで必要な情報がほぼそろったので, あとは $\mathcal{H}_\ell$ の multiplicity formula を $Y(\mathfrak{sl}_n)$ の指標公式に置き換えるのみである. そのためにまず $\mathcal{H}_\ell$ の multiplicity formula を用意しておく. その為, $\mathcal{S}(\ell)$ を拡張して,

$$\tilde{\mathcal{S}}(\ell) := \bigsqcup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ (\lambda, \mu) \in P_r^+ \times P_r \mid \lambda_i - \mu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^r (\lambda_i - \mu_i) = \ell \right\}. \quad (4.1.1)$$

とおく. $\tilde{\mathcal{S}}(\ell)$ は $\mathcal{S}(\ell)$ の定義式(2.4.3)において, $\lambda_i - \mu_i = 0$ を許したものである. $\tilde{\mathcal{S}}(\ell) \ni (\lambda, \mu)$ から $\lambda_i - \mu_i = 0$ なる λ_i, μ_i を取り除くという操作を施した後, $(\lambda, \mu) \in \mathcal{S}(\ell)$ に一致する時, $\mathcal{K}(\lambda, \mu) = \mathcal{K}(\lambda', \mu')$, $\mathcal{L}(\lambda, \mu) = \mathcal{L}(\lambda', \mu')$ とおく.

$P_r^+ \ni \lambda, \mu$ に対して,

$$W_r(\lambda, \mu) := \{w \in W_r \mid (\lambda, w \cdot \mu) \in \tilde{\mathcal{S}}(\ell)\}$$

とおく. ここで, $w \cdot \mu$ は W_r の P_r への自然な作用である. また, $W_\lambda = \{w \in W_r \mid w \cdot \lambda = \lambda\}$ とし, $W_r(\lambda, \mu)$ の両側剰余類 $W_\lambda \backslash W_r / W_\mu$ での像を $\overline{W_r(\lambda, \mu)}$ と書く.

さて, $P_{w,x}(u)$ を A_r 型の Kazhdan-Lusztig 多項式, また $\ell(w)$, $w > x$ をそれぞれ W_ℓ の元達の長さ, Bruhat ordering とする. 簡単の為, 本質的な場合のみを述べる.

定理 16 ([15], ([16],[17] も見よ)). $\lambda, \mu \in P_{r,\mathbb{Z}}^+$, $w \in W_r(\lambda, \mu)$ とする. この時 $\mathcal{H}_\ell$ の有限次元表現のなす Grothendieck 群のなかで, 次が成立する.

$$[\mathcal{K}(\lambda, w \cdot \mu)] = \sum_{\substack{x \in \overline{W_r(\lambda, \mu)} \\ x_{LR} \geq w_R}} P_{w_R, x_{LR}}(1) [V(\lambda, x \cdot \mu)] \quad (4.1.2)$$

$$[\mathcal{L}(\lambda, w \cdot \mu)] = \sum_{\substack{x \in W_r(\lambda, \mu) \\ x \geq w_{LR}}} (-1)^{\ell(w_{LR}w_0) - \ell(xw_0)} P_{xw_0, w_{LR}w_0}(1) [\mathcal{K}(\lambda, x \cdot \mu)] \quad (4.1.3)$$

ここで, w_{LR}, w_R はそれぞれ, 剰余類 $W_\lambda \cdot w \cdot W_\mu$, $w \cdot W_\mu$ のなかの最長元であり, w_0 は W_r の最長元である.

ここで, 上と同様,

$$\tilde{\mathcal{S}}^{(n)}(\ell) := \bigsqcup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ (\lambda, \mu) \in P_r^+ \times P_r \mid \lambda_i - \mu_i \in \{0, 1, \dots, n\} \sum_{i=1}^r (\lambda_i - \mu_i) = \ell \right\} \quad (4.1.4)$$

$$W_r^{(n)}(\lambda, \mu) := \{w \in W_r \mid (\lambda, w \cdot \mu) \in \tilde{\mathcal{S}}^{(n)}(\ell)\}. \quad (4.1.5)$$

とおく. $\tilde{\mathcal{S}}^{(n)}(\ell) \ni \lambda, \mu$ に対して, 最高ウェイト表現 $M(\lambda, \mu)$, 既約ウェイト表現 $V(\lambda, \mu)$ も同様に定義される.

次は, 既に明らかであろう.

定理 17. $\lambda, \mu \in P_{r, \mathbb{Z}}^+$, $w \in W_r^{(n)}(\lambda, \mu)$ とする. この時, $Y(\mathfrak{sl}_n)$ の Grothendieck 群のなかで, 次が成立する.

$$[M(\lambda, w \cdot \mu)] = \sum_{\substack{x \in W_r^{(n)}(\lambda, \mu) \\ x_{LR} \geq w_R}} P_{w_R, x_{LR}}(1) [V(\lambda, x \cdot \mu)] \quad (4.1.6)$$

$$[V(\lambda, w \cdot \mu)] = \sum_{\substack{x \in W_r^{(n)}(\lambda, \mu) \\ x \geq w_{LR}}} (-1)^{\ell(w_{LR}w_0) - \ell(xw_0)} P_{xw_0, w_{LR}w_0}(1) [M(\lambda, x \cdot \mu)] \quad (4.1.7)$$

注意 18. 上の指標公式は Drinfeld 多項式の根が整数の時のみの式だが, これから全ての既約表現の指標公式を得ることができる.

REFERENCES

- [1] V. G. Drinfeld. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Soviet Math. Dokl.*, Vol. 32, pp. 254–258, 1985.
- [2] V. G. Drinfeld. A new realization of Yangians and of quantized affine algebras. *Soviet Math. Dokl.*, Vol. 36, pp. 212–216, 1988.
- [3] V. G. Drinfeld. Degenerate affine Hecke algebras and Yangians. *Funct. Anal. Appl.*, Vol. 20, No. 1, pp. 62–64, 1986.
- [4] V. Chari and A. Pressley. Quantum affine algebras and affine Hecke algebras. *Pacific J. Math.*, Vol. 174, No. 2, pp. 295–326, 1996.
- [5] E. Frenkel and N. Reshetikhin. The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of W-algebras. *preprint, math.QA/9810055*.
- [6] E. Vasserot. Affine quantum groups and equivariant K-theory. *preprint math.QA/9803024*.
- [7] A. Molev, M. Nazarov, and G. Olshanski. Yangians and classical Lie algebras. *Russian Math. Surveys*, Vol. 51, No. 2, pp. 205–283, 1996.
- [8] G. Lusztig. Affine Hecke algebras and their graded version. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 2, No. 3, pp. 599–635, 1989.
- [9] A. Z. Zelevinsky. Induced representations of reductive p-adic groups II. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4^e, Vol. Serie 13, pp. 165–210, 1980.
- [10] D. Bernard, M. Gaudin, F. D. M. Haldane, and V. Pasquier. Yang-Baxter equation in long-range interacting systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. 26, No. 5219–5236, 1993.
- [11] T. Arakawa. Drinfeld functor and finite-dimensional representations of Yangian. *preprint math.QA/9807144*.
- [12] A. Knight. Spectra of tensor products of finite dimensional representations of Yangian. *J. Algebra*, Vol. 174, pp. 187–496, 1995.
- [13] M. Nazarov and V. Tarasov. Representations of Yangians with Gelfand-Zetlin bases. *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 496, pp. 181–212, 1998. (math.QA/9502008).
- [14] T. Akasaka and M. Kashiwara. Finite-dimensional representations of quantum affine algebras. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. 33, No. 5, pp. 839–867, 1997. (math.QA/9703028).
- [15] V. A. Ginzburg. Proof of the Deligne-Langlands conjecture. *Soviet. Math. Dokl.*, Vol. 35, No. 2, pp. 304–308, 1987.

- [16] T. Arakawa and T. Suzuki. Duality between $sl_n(\mathbb{C})$ and the degenerate affine Hecke algebra. *to appear in J. Alg.* (math.QA/971037).
- [17] T. Suzuki. Rogawski's conjecture of the Jantzen filtration for the degenerate affine Hecke algebra of type A. *preprint, math.QA/9804012.*