

q -ANALOGUES OF THE HOOK FORMULAS

西川 和広[†], 石川 雅雄[†], 田川 裕之[‡]

[†] 鳥取大学教育学部数学教室

[‡] 和歌山大学教育学部数学教室

1. INTRODUCTION

対称群の複素数体上の既約表現の次元を与える公式として有名な hook の公式があるが、ここでは Kostka-Foulks polynomial の特別な場合 (weight が 1^n すなわち standard tableaux の場合) に、この hook の公式の q -analogue が得られることを示す。ここで使う方法は Lascoux-Schützenberger によって得られた charge を計算する方法である。さらに、ここでは、その方法を拡張して、shifted の場合や rim hook tableaux の場合の charge を定義し、この hook の公式の拡張について調べる。ただし、一般の rim hook tableaux の場合および shifted rim hook tableaux の場合は、まだ研究中である。

2. NOTATION AND PRELIMINARIES

partition とは 非負整数の (有限又は無限の) 非増加列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ のことで

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots$$

を満たし 0 でない項は有限個である。0 でない項 λ_i は λ の parts と呼ばれ parts の個数を λ の length と呼び $l(\lambda)$ と表記する。また parts の和は λ の weight といい $|\lambda|$ と表記する。

partition λ の diagram とは $1 \leq j \leq \lambda_i$ を満たす cells $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ の集合のことである。partition λ の conjugate とは、 λ の diagram を主対角線に関して折り返し (transpose) て得られる diagram の partition λ' のことである。任意の与えられた λ に対して

$$n(\lambda) = \sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i = \sum_{i \geq 1} \binom{\lambda'_i}{2}$$

と定義する。 λ のセル $x = (i, j) \in \lambda$ における hook-length とは

$$h(x) = h(i, j) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1.$$

である。 λ, μ を partition とする。 λ の diagram が μ の diagram を含むとき $\lambda \supset \mu$ と書き差集合 $\lambda/\mu = \lambda - \mu$ を skew diagram という。skew diagram λ/μ は、また weight $|\lambda/\mu| = |\lambda| - |\mu|$ の skew partition と呼ばれる。

Definition 2.1. λ/μ を n の skew diagram とするとき skew shape λ/μ の (column-strict) tableaux とは次の条件を満たすように正の整数を $\lambda - \mu$ の箱の中に書き込んだものである。

- (1) それぞれの行について左から右に弱い意味で増加する。
- (2) それぞれの列について上から下に強い意味で増加する。

任意の tableau T に対して T の weight をベクトル $\alpha(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ によって定義する。ただし α_i は i を含む箱の数とする。ある tableau T が $1, 2, \dots, n$ のそれぞれの数を唯一つだけ含んでいるとき standard tableau という。よってその tableau T の weight は $(1, 1, \dots, 1)$ である。skew shape λ/μ の standard tableaux 全体の集合を $\text{SYT}(\lambda/\mu)$ と表記する。Schur 関数は tableaux に付随した母関数として定義される。すなわち

$$s_{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, \dots) = \sum_T x^T$$

である。ここで和は shape λ/μ のすべての tableaux を渡り、また $x^T = \prod_i x_i^{\alpha_i}$ とする。

本論においては以下の表記を用いる。複素数 a, q, n に対して

$$(a; q)_{\infty} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k), \quad (a; q)_n = (a; q)_{\infty} / (aq^n; q)_{\infty},$$

さらに

$$(n)_q = (q^n; q)_1, \quad (n)_q! = (q; q)_n.$$

とする。 $n_1, n_2, \dots, n_r$ が整数で $n = \sum_{i=1}^r n_i \geq 0$ のとき q -多項係数 (または Gauss 多項係数) を

$$\left[\begin{matrix} n \\ n_1, n_2, \dots, n_r \end{matrix} \right]_q = \frac{(q; q)_n}{\prod_{i=1}^r (q; q)_{n_i}}.$$

によって定義する。特に $r = 2$ のとき $\left[\begin{matrix} n \\ n_1, n_2 \end{matrix} \right]_q$ は $\left[\begin{matrix} n \\ n_1 \end{matrix} \right]_q$ と表記され q -2 項係数 と呼ばれる。

Definition 2.2. λ/μ を 通常のまたは shifted (後に定義) な skew partition とする。また T を shape λ/μ の通常のまたは shifted または domino (後に定義) tableau とする。このとき tableau T に含まれる成分を行ごとに右から左へ、第 1 行から最終行まで読むことで tableau word $w = w(T) = a_1 a_2 \dots a_n$ を得る。もし T が domino tableau ならば i 行と $i+1$ 行の 2 行に渡る垂直の domino に関しては i 行を読んだとき 1 度しか読まれない。 T の charge $\text{ch } T$ (resp. cocharge $\text{coch } T$) を tableau word $w(T)$ の charge $\text{ch}(w)$ (resp. cocharge $\text{coch}(w)$) によって次のように定義する。word w の weight とは sequence $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ でここで μ_i は i に等しい a_j の個数である。我々は $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ と仮定する。すなわち μ は partition である。もし $\mu = (1^n)$ ならば w を standard word と呼ぶ。

- (1) 最初は w は a standard word と仮定する。 w の各成分にその元の index が以下のようにあると考える。1 の index を 0 とする。そして仮に r が index i であるとするとき $r+1$ の index は
 - i) $r+1$ の位置が r より右 (resp. 左) のとき index i
 - ii) $r+1$ の位置が r より左 (resp. 右) のとき index $i+1$

となる。 w の charge $\text{ch}(w)$ (resp. cocharge $\text{coch}(w)$) は index の和とする。

- (2) w を一般の任意の word とする。 w に科せられた唯一の条件は、その weight が partition μ になることである。 w から standard word を次のように抜き取る。左から word w を読んでいき w の中で最初にある 1 を選ぶ。次に選んだ 1 よりも右にある 2 の中で最初にある 2 を選ぶ。これを 3, 4 と続ける。仮に、選んだ s の右に $s+1$ がない場合は、左端にもどって始める。この行程により長さ μ'_1 の standard subword w_1 が選ばれる。次に w から w_1 を取り除き 長さ μ'_2 の standard subword w_2 を得る行程を残りの word に対して続ける。これを繰り返すことによって standard subword の列が得られる。 w の charge $\text{ch}(w)$ (resp. cocharge $\text{coch}(w)$) は、これらの standard subwords の charges (resp. cocharges) の和 $\text{ch}(w) = \sum_i \text{ch}(w_i)$ (resp. $\text{coch}(w) = \sum_i \text{coch}(w_i)$) として定義する。

本文では我々は主に standard の場合のみ扱う。

λ/μ が通常の skew partition のとき

$$K_{\lambda/\mu, \nu}(t) = \sum_T t^{\text{ch} T}$$

と定義する。ここで和は shape λ/μ かつ weight ν のすべての tableaux T を渡る。

λ/μ が skew shifted partition のとき

$$\tilde{K}_{\lambda/\mu, \nu}(t) = \sum_T t^{\text{ch} T}$$

と定義する。ここで和は shape λ/μ かつ weight ν のすべての shifted tableaux T を渡る。

λ/μ が domino で埋め尽くすことが出来る通常の (skew) partition とするとき

$$K_{\lambda/\mu, \nu}(t, q) = \sum_T t^{\text{ch} T} q^{\text{Spin} T}$$

と定義する。ここで和は shape λ/μ かつ weight ν の domino tableaux 全体を渡る。

3. 通常の場合

この節の目的は次の定理を証明することである。

Theorem 3.1. λ を n の partition とする。このとき

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \text{SYT}(\lambda)} t^{\text{ch}(T)} &= t^{n(\lambda')} \frac{(t; t)_n}{\prod_{x \in \lambda} (1 - t^{h(x)})}, \\ \sum_{T \in \text{SYT}(\lambda)} t^{\text{coch}(T)} &= t^{n(\lambda)} \frac{(t; t)_n}{\prod_{x \in \lambda} (1 - t^{h(x)})}, \end{aligned}$$

ここで和は shape λ のすべての standard tableaux T についてたす。

以下は、この定理の証明の概要である。

Definition 3.1. λ/μ を n の skew partition とし、 $T \in \text{SYT}(\lambda/\mu)$ とする。standard tableaux T の inverse ligne of route of order n とは $1 \leq k \leq n-1$ かつ $(k+1)$ が T の中で k よりも下にあるような正整数 k 全体の集合である。この集合を $\text{Iligne } T$ と表記し、また $\overline{\text{Iligne}} T = [n-1] \setminus \text{Iligne } T$ とおく。また、定義として

$$\text{Ides } T = \#\text{Iligne } T, \quad \text{Imaj } T = \sum_{k \in \text{Iligne } T} k.$$

記号 $\text{Ides } T$ と $\text{Imaj } T$ はそれぞれ *idescents* の個数と *inverse major index* の個数を表す。次のことを見るのは易しい。

$$\text{ch } T = \sum_{k \in \overline{\text{Iligne}} T} (n-k), \quad \text{coch } T = \sum_{k \in \text{Iligne } T} (n-k).$$

このとき $\text{ch } T + \text{coch } T = \binom{n}{2}$ が成り立つ。

Lemma 3.2. λ/μ を n の skew-partition とする。このとき

$$\frac{1}{(u; t)_{n+1}} \sum_{T \in \text{SYT}(\lambda/\mu)} u^{\text{Ides } T} t^{\text{coch } T} = \sum_{r=0}^{\infty} u^r s_{\lambda/\mu}(1, t, t^2, \dots, t^r)$$

Proof. これは (P, ω) -partition の理論を使って証明ができる。ここでは証明は省略する。(参照: [Sta1])

Remark 3.3. $\text{coch } T = n \text{Ides } T - \text{Imaj } T$ であるので上の公式の t に t^{-1} を u に ut^n を代入することによって次のよく知られた公式を得る。

$$\frac{1}{(u; t)_{n+1}} \sum_{T \in \text{SYT}(\lambda/\mu)} u^{\text{Ides } T} t^{\text{Imaj } T} = \sum_{r=0}^{\infty} u^r s_{\lambda/\mu}(1, t, t^2, \dots, t^r)$$

Corollary 3.4. λ/μ を n の skew-partition とすると

$$\frac{\sum_{T \in \text{SYT}(\lambda/\mu)} t^{\text{coch } T}}{(t; t)_n} = s_{\lambda/\mu}(1, t, t^2, \dots)$$

$$\frac{\sum_{T \in \text{SYT}(\lambda/\mu)} t^{\text{ch } T}}{(t; t)_n} = s_{\lambda'/\mu'}(1, t, t^2, \dots)$$

Corollary 3.5. λ/μ を n の skew-partition とすると

$$\sum_{T \in \text{SYT}(\lambda/\mu)} t^{\text{coch } T} = (t; t)_n \det \left(\frac{1}{(t; t)_{\lambda_i - \mu_j - i + j}} \right) = (t; t)_n \det \left(\frac{t^{(\lambda'_i - \mu'_j - i + j)}}{(t; t)_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j}} \right)$$

$$\sum_{T \in \text{SYT}(\lambda/\mu)} t^{\text{ch } T} = (t; t)_n \det \left(\frac{1}{(t; t)_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j}} \right) = (t; t)_n \det \left(\frac{t^{(\lambda_i - \mu_j - i + j)}}{(t; t)_{\lambda_i - \mu_j - i + j}} \right)$$

Proof. 上の公式と Schur 関数についての Jacobi-Trudi の等式からすぐに得られる。

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots)$ を partition とする。このとき operator R_i を次のように定義する。

$$R_i \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i + 1, \dots).$$

この定義より任意の整数 k に対して $R_i^k \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i + k, \dots)$ である。 $\mu = 0$ のときは上の行列式は次の式に書き直されることは容易にわかる。

$$(t; t)_n \det \left(\frac{1}{(t; t)_{\lambda_i - i + j}} \right) = \det \left(R_i^{j-i} \right) \left[\begin{matrix} n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \end{matrix} \right]_t$$

Lemma 3.6. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ が n の partition とすると

$$\det \left(R_i^{j-i} \right) \left[\begin{matrix} n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \end{matrix} \right]_t = t^{n(\lambda)} \frac{(t; t)_n \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)_t}{\prod_{i=1}^r (t; t)_{\lambda_i + r - i}}$$

Proof. この等式の証明は Vandermonde の行列式による。証明は読者に委ねる。

上の補題より目的の定理が得られる。実際、補題の右辺の積を定理の形に変形するのはさほど難しいことではない。

4. SHIFTED の場合

Definition 4.1. partition λ が strict であるとは、すべての parts が異なることである。 $i > 1$ に対して λ の通常の diagram の第 i 行を $(i-1)$ 個だけ右にずらして得られる diagram を strict partition λ の shifted diagram といい $S(\lambda)$ と表記する。別の言葉で言えば shifted diagram $S(\lambda)$ は $i \leq j \leq \lambda_i + i - 1$ を満たす箱 $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ の集合である。 λ と μ が strict partitions で $S(\lambda) \supset S(\mu)$ とするとき、 $S(\lambda - \mu) = S(\lambda) - S(\mu)$ を skew shifted diagram と呼ぶ。

Definition 4.2. λ と μ を strict partitions such that $\lambda \supset \mu$. shape $S(\lambda - \mu)$ の shifted tableaux とは正の整数を $S(\lambda - \mu)$ の箱の中に次の条件を満たすように書き込んだものである。

- (1) 各行については左から右に非減少。
- (2) 各列については上から下に増加。

この shifted tableaux に付随した母関数として $G_{\lambda/\mu}$ を定義する。すなわち

$$G_{\lambda/\mu} = G_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, \dots) = \sum_T x^T$$

ここで和は shape $S(\lambda - \mu)$ のすべての shifted tableaux 全体に渡る。

注) $G_{\lambda/\mu}$ は必ずしも対称多項式ではない。

Definition 4.3. $S(\lambda - \mu)$ を n の skew shifted diagram とする。skew shifted shape $S(\lambda - \mu)$ standard shifted tableau とは $1, 2, \dots, n$ の数がちょうど 1 回ずつ現れる shifted tableau T のことである。skew shifted shape $S(\lambda - \mu)$ の standard shifted tableau 全体の集合を $\text{SSYT}(\lambda/\mu)$ によって表す。

任意の strict partition λ に対して

$$n(\lambda) = \sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i, \quad \tilde{n}(\lambda) = \sum_{(i,j) \in S(\lambda)} j = \sum_{i \geq 1} \left\{ \binom{\lambda_i + i}{2} - \binom{i}{2} \right\}$$

と定義する。この節の目的は 2 通りの異なる方法で次の定理を証明することである。

Theorem 4.1. λ を n の *strict partition* とする。このとき

$$\sum_{T \in \text{SSYT}(\lambda/\mu)} t^{\text{ch}(T)} = t^{\tilde{n}(\lambda)} \frac{(t; t)_n}{\prod_{x \in \lambda} (1 - t^{h(x)})},$$

$$\sum_{T \in \text{SSYT}(\lambda/\mu)} t^{\text{coch}(T)} = t^{n(\lambda)} \frac{(t; t)_n}{\prod_{x \in \lambda} (1 - t^{h(x)})},$$

ここで和は、すべての *shape* λ の *standard shifted tableaux* T を動く。

Definition 4.4. $S(\lambda - \mu)$ を n の *skew shifted diagram* とし、 $T \in \text{SSYT}(\lambda/\mu)$ とする。*standard shifted tableaux* T の *inverse ligne of route* とは $1 \leq k \leq n-1$ であり、かつ $(k+1)$ が T の中で k よりも下にあるような整数 k 全体の成す集合である。この集合 *inverse ligne of route* を $\text{lligne } T$ で表記し $\overline{\text{lligne}} T = [n-1] - \text{lligne } T$ かつ $\text{Ides } T = \# \text{lligne } T$ とおく。このとき

$$\text{ch } T = \sum_{k \in \overline{\text{lligne}} T} (n - k), \quad \text{coch } T = \sum_{k \in \text{lligne } T} (n - k).$$

が成り立つ。

Lemma 4.2. λ/μ を n の *skew shifted partition* とする。このとき

$$\frac{1}{(u; t)_{n+1}} \sum_{T \in \text{SSYT}(\lambda/\mu)} u^{\text{Ides } T} t^{\text{coch } T} = \sum_{r=0}^{\infty} u^r G_{\lambda/\mu}(1, t, t^2, \dots, t^r)$$

が成り立つ。

Proof. この補題も (P, ω) -partition の理論で証明できる。詳細は省略する。(参照: [Sta1])

この補題より直ちに次の系を得る。

Corollary 4.3. λ/μ を n の *skew shifted partition* とする。

$$\frac{1}{(t; t)_n} \sum_{T \in \text{SSYT}(\lambda/\mu)} t^{\text{coch } T} = G_{\lambda/\mu}(1, t, t^2, \dots)$$

Theorem 4.4. λ を n の *strict partition* とする。 λ を $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ の形に書く。ここで $\lambda_1 > \dots > \lambda_r \geq 0$ であり r は偶数とする。このとき

$$G_{\lambda}(1, t, t^2, \dots) = \text{pf} \left[\frac{(\lambda_i)_t - (\lambda_j)_t}{(t; t)_{\lambda_i} (t; t)_{\lambda_j} (\lambda_i + \lambda_j)_t} \right]$$

が成り立つ。

Proof. この定理は *lattice path method* で証明することができる。ここでは、証明を省略する。

Lemma 4.5. λ を Theorem 4.4 と同様とする。このとき

$$\text{pf} \left[\frac{(\lambda_i)_t - (\lambda_j)_t}{(\lambda_i + \lambda_j)_t} \right] = t^{n(\lambda)} \prod_{i < j} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)_t}{(\lambda_i + \lambda_j)_t}$$

が成り立つ。

Theorem 4.1 の第 1 の証明. 上の定理より

$$\sum_T t^{\text{coch}(T)} = t^{n(\lambda)} \frac{(t; t)_n}{\prod_i (t; t)_{\lambda_i}} \prod_{i < j} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)_t}{(\lambda_i + \lambda_j)_t}.$$

となる。この式の右辺を Theorem 4.1 の右辺の形に変形することはさほど難しいことではない。□

次に Schur's Q -functions を使った別証を与える。

Definition 4.5. alphabet の順序集合 $\{1' < 1 < 2' < 2 < \dots\}$ を $\mathbf{P}'$ と表記する。 $1', 2', \dots$ 等の数字は *marked* と呼ばれ、 $a \in \mathbf{P}'$ の任意の文字の mark (ダッシュ) を取ったものを $|a|$ によって表記する。 λ と μ を $\lambda \supset \mu$ を満たす strict partitions とする。shape $S(\lambda - \mu)$ の *marked shifted tableau* とは $S(\lambda - \mu)$ の各箱の中に $\mathbf{P}'$ の文字を次の条件を満たすように書き込んだものである。

- (1) 各文字は、各行について左から右に、各列について上から下に、非減少である。
- (2) すべての $k \geq 1$ に対して、マークが付いていない文字 k は各列に高々 1 回しか現れない。
- (3) すべての $k \geq 1$ に対して、マーク付きの文字 k' は各行に高々 1 回しか現れない。

T の *weight* とは、数列 $\alpha(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ のことである。ここで、任意の $k \geq 1$ に対して α_k は T の中で k または k' が書き込まれた箱の数である。各 *marked shifted tableau* T に対して その *weight* $x^{\alpha(T)} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$ を付随させ、 $Q_{\lambda/\mu}$ を、その母関数とする。すなわち

$$Q_{\lambda/\mu} = Q_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, \dots) = \sum_T x^{\alpha(T)}$$

ここで和は、すべての shape $S(\lambda - \mu)$ の *marked shifted tableaux* T を動く。

Theorem 4.6. λ を n の *shifted partition* とするとき

$$\frac{\prod_{i \geq 1} \prod_{k=0}^{\lambda_i - 1} (1 + t^k)}{(t; t)_n} \sum_{T \in \text{SSYT}(\lambda)} t^{\text{coch} T} = Q_{\lambda}(1, t, t^2, \dots)$$

である。

Proof. この定理の証明は、まだ与えていないので予想式である。しかし、回りくどいが第 1 の証明から間接的に証明されるので完全な予想式であるとも言えない。

西川 和広[†], 石川 雅雄[†], 田川 裕之[‡]

Theorem 4.7. λ を n の *strict partition* とする。先程と同様に λ を $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ の形に書く。ここで $\lambda_1 > \dots > \lambda_r \geq 0$ であり r は偶数である。このとき

$$Q_\lambda = \text{pf} [Q_{(\lambda_i, \lambda_j)}]$$

が成り立つ。

Proof. この定理の証明は Macdonald の本 [Ma] にも書いてあるし、また lattice path method でも証明できる。

Theorem 4.1 の第 2 の証明. $r > 0$ のとき

$$q_r(1, t, t^2, \dots) = Q_{(r,0)}(1, t, t^2, \dots) = \frac{\prod_{k=0}^{r-1} (1+t^k)}{(t; t)_r}$$

であり、また $r > s > 0$ のとき

$$Q_{(r,s)}(1, t, t^2, \dots) = \frac{\prod_{k=0}^{r-1} (1+t^k) \prod_{k=0}^{s-1} (1+t^k)}{(t; t)_r (t; t)_s} \frac{t^s (r-s)_t}{(r+s)_t}$$

が成り立つ。(参照: [Ma]) よって、上の補題より

$$\sum_T t^{\text{coch}(T)} = t^{n(\lambda)} \frac{(t; t)_n}{\prod_i (t; t)_{\lambda_i}} \prod_{i < j} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)_t}{(\lambda_i + \lambda_j)_t}$$

となる。第 1 の証明と同様にこの右辺の積を、Theorem 4.1 の右辺の形に変形することは難しいことではない。□

4. RIM HOOK TABLEAUX の場合

Rim Hook tableaux や その特別な場合の domino tableaux の場合についても現在、共同研究中である程度の実例計算や予想式が存在するので出来たところまで当日報告したいと思います。

REFERENCES

- [CL] C. Carré and B. Leclerc, *Splitting the square of a schur functions into its symmetric and antisymmetric parts*, Journal of Algebraic Combinatorics **4** (1995), 201–231.
- [IW] M. Ishikawa, M. Wakayama, *Minor summation formula of pfaffians*, Linear and Multilinear Alg. **39** (1995), 285–305.
- [KLLT] A. Kirillov, A. Lascoux, B. Leclerc and J.Y. Thibon, *Séries génératrices pour les tableaux de dominos*, C. R. Acade. Sci. Paris, **318** (1994), 395–400.
- [Kr] C. Krattenthaler, *Bijective proofs of the hook formula for the number of standard tableaux, ordinary and shifted*, Elec. J. of Combi., **2** (1995).
- [Ma] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, Second Edition*, Oxford University Press, 1995.
- [Ste1] J. Stembridge, *Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups*, Adv. Math. **74** (1989), 87–134.

q -ANALOGUES OF THE HOOK FORMULAS

- [Ste2] J. Stembridge, *Nonintersecting paths, pfaffians and plane partitions*, Adv. Math. **83** (1990), 96–131.
- [Sta1] R. Stanley, *Ordered structures and partitions*, Memoirs of the American math. Soc. **119** (1972).
- [Sta2] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics I*, Cambridge University Press, 1997.

石川 雅雄, 鳥取大学教育学部数学教室, 〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101
E-mail address: `ishikawa@fed.tottori-u.ac.jp`

西川 和広, 鳥取大学教育学部数学教室, 〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101
E-mail address: `nisikawa@venus.fed.tottori-u.ac.jp`

田川 裕之, 和歌山大学教育学部数学教室, 〒 640-8510 和歌山市栄谷 930
E-mail address: `tagawa@math.edu.wakayama-u.ac.jp`