

ON THE ABEL TRANSFORM AND THE CHEREDNIK TRANSFORM OF BC_1 TYPE.

東京大学数理科学研究科 博士課程 2 年 本田 龍央

1 Introduction.

Riemann 対称空間 G/K 上の G の class 1 の表現に付随する帯球関数 ϕ_λ に対する球変換 $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}f(g) = \int_G f(g)\phi_\lambda(g)dg \quad f \in \mathcal{D}(G/K)$$

は Abel 変換 $\mathcal{A}$ 、及び A 上の Fourier 変換 $\mathcal{F}$

$$\mathcal{A}f(a) = a^\rho \int_N f(an)dn \quad \forall f \in C_c^\infty(G//K)$$

$$\mathcal{F}f(a) = \int_A f(a)a^{-i\lambda}da \quad \forall f \in C_c^\infty(A)^W$$

によって

$$(1) \quad \mathcal{H} = \mathcal{F}\mathcal{A}$$

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(G//K) & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W \\ \mathcal{A} \downarrow & & \parallel \\ C_c^\infty(A)^W & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W \end{array}$$

と分解される (ただし $G = KAN$ は G の岩沢分解、 $C_c^\infty(G//K)$, $C_c^\infty(A)^W$ はそれぞれ G , A 上の compact 台を持つ両側 K 不変、 W 不変な C^∞ 級関数の空間、 W は Weyl 群、 $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)^W$ は W 不変な $\mathfrak{h}^*(= (\mathfrak{a} \otimes \mathbb{C})^*)$ 上の Paley-Wiener 型の増大度を持つ整関数の空間). これにより Paley-Wiener 型の定理は通常の Fourier 変換のそれに帰着される. またこれを基に Rosenberg によって球関数に対する逆公式等が証明された (cf. [3] [2]).

Heckman-Opdam の定義した超幾何関数は対称空間の場合の制限 root 系に対して現れる各 root 空間の重複度を連続化したものと考えられ、この超幾何関数に対しても上に対応する球変換、この変換に対する Paley-Wiener 型の定理、または逆公式等が考えられる. さらに Opdam はこの超幾何関数を非対称な (即ち Weyl 群に関して不変でない) 場合に拡張した関数 (Cherednik 作用素に関する同時固有関数) に対して球

変換（すなわち Cherednik 変換）を定義し、上に述べた重複度がすべて正の場合に Paley-Wiener 型の定理、逆公式、Plancherel の公式を得る事に成功した。このような関数に対しては連続化された重複度に対応する群論的な幾何学的対象が無いために、もはや群論的な approach をそのまま適応する事は出来ず、何らかの工夫を要するようになる。しかし Koornwinder は [4] の中で上に述べた Abel 変換の explicit な表示を rank 1 の時に与え、それにより超幾何関数（Koornwinder の用語では Jacobi 関数）に対する (1) のような分解を与え、純群論的な解釈により Paley-Wiener 型の定理、及び逆公式を与えた。

そこでここでは Koornwinder の方法を非対称な場合に拡張し、Abel 変換が退化 Hecke 代数においてどのように考えられるか、Cherednik 変換がどのように分解されるか、また重複度に関する制限を弱めた時の Cherednik 変換に対する逆公式について述べていく。

2 準備.

2.1 退化 Hecke 代数. 一応ここで使う記号を与えるが定義等の詳細は Opdam[5] を参照。

$\mathfrak{a}$ を n 次元 Euclid 空間、 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{a}$ の複素化とする。 $R \subset \mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ 上の root system、 R^0 を inmultiplicable root の全体、 W を R の Weyl 群とする。 R の positive system R_+ を 1 つとって固定し、 $\mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_+^*$ によって対応する Weyl chamber、 $\Pi(= \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$ によって R_+ に対応する R の基底、 $R_+^0 = R_+ \cap R^0$ とする。さらに R の multiplicity、即ち R 上の W 不変関数の全体が作る線形空間を $\mathcal{K}$ と記す。特に $k \in \mathcal{K}$ に対し R^0 上の multiplicity k_α^0 を $k_\alpha^0 := k_\alpha + 2^{-1}k_{\alpha/2}$ で表す。また $k \in \mathcal{K}$ に対して $\rho_k = 2^{-1} \sum_{\alpha \in R_+^0} k_\alpha \alpha$ とする。

$H_k(\cong S(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[W])$ によって $R_+^0, k^0 \in \mathcal{K}$ に対応する退化 affine Hecke 代数を記す。また $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対応する $S(\mathfrak{h})$ の 1 次元表現を χ_λ 、 $\mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C}$ をその表現空間とし、 $1 \in \mathbb{C}$ に対応する $\mathbb{C}_\lambda$ の元を 1_λ と記すとき、 λ に対応する H_k の standard 表現を $I_\lambda = H_k \otimes_{S(\mathfrak{h})} \mathbb{C}_\lambda$ によって与える。 I_λ は $\mathbb{C}[W]$ 加群として $\mathbb{C}[W]$ ($\mathbb{C}[W]$ の左正則表現) と同型である。また I_λ 上に $(w \otimes 1_\lambda, w' \otimes 1_\lambda) := \delta_{w, w'} (\forall w, w' \in W)$ により内積を与えることにする。

I_λ 上には次のような 2 種類の特殊な基底をとることが出来る：

(i) W の Bruhat order に関し帰納的に I_λ の元を次のように定める：

(2)

$$v_e = e \otimes 1$$

(3)

$$v_{r_\alpha w} = \frac{w\lambda(\alpha^\vee)}{w\lambda(\alpha^\vee) + k_\alpha^0} r_\alpha v_w + \frac{k_\alpha^0}{\lambda(\alpha^\vee) + k_\alpha^0} v_w \quad \text{if } \alpha \text{ is simple and } w < r_\alpha w.$$

(ii) $\mathbb{C}[W]$ の表現に忠ずる基底をとる. $\tau \in \widehat{W}$ に対しては ϕ_i^τ ($i = 1, \dots, \deg \tau$) 等とおくことにする. 特に trivial 表現、及び sign 表現に対し

$$(4) \quad \phi := \frac{1}{\#W} \sum_{w \in W} wv_e, \quad \phi_e^- = \frac{1}{\#W} \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} wv_e,$$

とおく.

この standard 表現を用いて $\mathfrak{h}^*$ 上の vector 束 $\mathbf{I}$ を

$$\mathbf{I} := \prod_{\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_+^*} \mathbf{I}_\lambda$$

によって与える. この vector 束の section の空間 $\Gamma(\sqrt{-1}\mathfrak{a}_+^*, \mathbf{I})$ 上に球測度 ν を

$$d\nu(\lambda) = \frac{(2\pi)^{-n} \tilde{c}_{w_0}^2(\rho_k, k)}{\tilde{c}_{w_0}(\lambda, k) \tilde{c}_{w_0}(w_0\lambda, k)} d\omega(\lambda)$$

で与える. ただし

$$\tilde{c}(\lambda, k) = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{\Gamma(\lambda(\alpha^\vee) - k_\alpha - \frac{1}{2}k_{\alpha/2})}{\Gamma(\lambda(\alpha^\vee) - k_\alpha)}$$

とし、 w_0 を W の最長元、 ω を $\sqrt{-1}\mathfrak{a}_+$ 上の体積要素 $\sqrt{-1}d\lambda$ に対応する Borel 測度の完備化とする. また L_p section の全体を $L_p(\sqrt{-1}\mathfrak{a}_+^*, \mathbf{I})$ と記す事にする.

2.2 $\mathbf{H}_k$ の $C^\infty(\mathfrak{a})$ 上の表現. $C^\infty(\mathfrak{a})$ 上には Cherednik 作用素と W の作用により $\mathbf{H}_k$ の表現が構成される. 即ち、次の定理が成り立つ:

Theorem 1 (Cherednik). $k \in \mathcal{K}, \xi \in \mathfrak{h}$ に対し

$$D_\xi(R_+, k) := \partial_\xi + \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha \alpha(\xi) \frac{1}{1 - e^{-\alpha}} (1 - r_\alpha) - \rho_k(\xi)$$

とおくとき

$$(5) \quad W \in w \mapsto w \ni \text{End}(C^\infty(\mathfrak{a}))$$

$$(6) \quad \mathfrak{h} \in \xi \mapsto D_\xi(R_+, k) \ni \text{End}(C^\infty(\mathfrak{a}))$$

は $\mathbf{H}_k$ の表現を与える.

この $D_\xi(R_+, k)$ を Cherednik 作用素と呼ぶ. さらに

Theorem 2 (Opdam [5] Theorem 3.15.). (i) 次の条件を満たす $\mathfrak{h}^* \times$

$\mathcal{K}_+ \times (\mathfrak{a} + \sqrt{-1}U_\pi)$ 上の正則関数が 1 意に存在する:

$$(a) \quad G(\lambda, k)(0) = 1$$

$$(b) \quad D_\xi(R_+, k)G(\lambda, k) = \lambda(\xi)G(\lambda, k) \quad \forall \xi \in \mathfrak{h}.$$

(ii) $G(\lambda, k)$ は次の形で与えられる :

$$G(\lambda, k) = \#WD(\lambda, k)F(\lambda, k)$$

ここで $D(\lambda, k)$ はある微分作用素であり、 $F(\lambda, k)$ は Heckman-Opdam の超幾何関数.

$G(\lambda, k)$ は原点において 1 となるように正規化しておいたが、都合により原点の値を $\tilde{c}(\rho_k, k)$ により正規化し、これを $\tilde{G}(\lambda, k)$ と記しておく.

2.3 PW 上の表現. 一方、 $C_c^\infty(\mathfrak{a})$ の双対に当たる Paley-Wiener 型を持つ関数空間 (即ち $\mathfrak{h}^*$ 上の整関数で指数型の増大度をもつ関数の空間) 上には次のように H_k の作用を定める. 先ず $H_k \cong S(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C}[W]$ である事に注意して、 $0 \in \mathfrak{h}^*$ に対応する $S(\mathfrak{h})$ の極大 ideal $\mathfrak{m} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ をとり、 $S(\mathfrak{h})$ の $\mathfrak{m}$ 進完備化 $\widehat{S(\mathfrak{h})}$ を考える. H_k の $\mathfrak{m}$ 進完備化を

$$\widehat{H}_k := \widehat{S(\mathfrak{h})} \otimes_{S(\mathfrak{h})^W} H_k$$

によって定め、さらに $\widehat{H}_k \otimes_{\mathbb{C}[W]} (\text{triv})$ という $\mathbb{C}[W]$ の trivial 表現からの $\widehat{H}_k$ の誘導表現を考える. Paley-Wiener 型を持つ関数空間は $\widehat{S(\mathfrak{h})}$ に自然に埋め込まれるので、上の操作を経由して $\widehat{H}_k \otimes_{\mathbb{C}[W]} (\text{triv})$ の部分 H_k 加群に埋め込まれる. これを **PW** と記すことにし、特に PW_0 によって $k=0$ に対応する空間を表す事にする. この **PW** から $\Gamma(\sqrt{-1}\mathfrak{a}_+^*, \mathbf{I})$ への写像を

$$\pi(f \otimes e)(\lambda) = \sum_{w \in W} f(w\lambda) \prod_{\alpha \in R_+^0} (1 - \frac{k_\alpha^0}{w\lambda(\alpha^\vee)}) v_w, \quad \lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{a}_+^*$$

によって定義する. 2.1 で構成した $\Gamma(\sqrt{-1}\mathfrak{a}_+^*, \mathbf{I})$ 上には自然な H_k の表現があり、 π は H_k に関する injective な intertwiner になっている.

2.4 Cherednik 変換の定義 $\mathbf{I}_\lambda$ の定義により $\mathcal{J}_\lambda : \mathbf{I}_\lambda \ni v_e \mapsto G(\lambda, k) \in C^\infty(\mathfrak{a})$ という H_k 準同型を得る. 特に ϕ に対して $F(\lambda, k)$ が対応している. この $G(\lambda, k)$ を用いて Cherednik 変換を次のように定義する :

$f \in C_c^\infty(\mathfrak{a})$ に対して、 $\mathcal{F}f(\lambda) \in \mathbf{I}_\lambda$ を

$$(\mathcal{F}f(\lambda), v) := \int_{\mathfrak{a}} f(x) \overline{\mathcal{J}_\lambda(v)(x)} d\mu(x)$$

により定める. ただし $d\mu$ は dx を $\mathfrak{a}$ 上の Lebesgue 測度とし、

$$\delta_k(x) := \prod_{\alpha \in R} |\sinh \frac{\alpha}{2}(x)|^{k_\alpha}, \quad d\mu(x) := \delta_k(x) dx.$$

また特に $k = 0$ に対応する Cherednik 変換を $\mathcal{F}$ と記す事にする. これは通常の Fourier 変換に他ならない. また $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a})$ に対しては特に $\mathcal{F}f(\lambda) = \sum_{w \in W} \mathcal{F}_w f(\lambda) v_w = \sum_{\tau \in \widehat{W}} \sum_i \mathcal{F}_i^\tau f(\lambda) \phi_i^\tau$ とし¹, 特に $\tau = \text{triv}, \text{sign}$ のときは $\mathcal{F}_\phi = \mathcal{F}^{\text{triv}}, \mathcal{F}_{\phi_e^-} = \mathcal{F}^{\text{sign}}$ と記す. $\mathcal{F}$ についても同様.

一方 $\mathcal{F}$ の逆変換に当たるものとして, $\sigma \in L_1(\sqrt{-1}\mathfrak{a}_+^*, \mathbf{I})$ に対して $\mathcal{J}\sigma$ が

$$(7) \quad \mathcal{J}\sigma(x) = \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}_+^*} \mathcal{J}_\lambda(\sigma(\lambda))(x) d\nu(\lambda)$$

として定義される.

3 Abel 変換について.

3.1 $C_c^\infty(\mathfrak{a})$ 上の Abel 変換. 以下 $R = \{\pm\alpha/2, \pm\alpha\}$ は BC_1 型の root 系とする. $\sigma > 0$ に対し $\mathfrak{a}_+ \times \mathfrak{a}_+$ 上の関数 c^σ を $c_\sigma(s, t) := \cosh(\sigma(\alpha/2)(s)) - \cosh(\sigma(\alpha/2)(t))$ とし, さらに $\mu \in \mathbb{C}$ s.t. $\Re\mu > 0$ に対し次のような積分変換を考える:

$$(8) \quad \mathcal{W}_\mu^\sigma f(t) := \frac{2^\mu}{\Gamma(\mu)} \int_t^\infty f(s) c_\sigma(s, t)^{\mu-1} \sinh \sigma \frac{\alpha}{2}(s) ds,$$

$$(9) \quad \mathcal{R}_\mu^\sigma g(s) := \frac{2^\mu}{\Gamma(\mu)} \sinh \sigma \frac{\alpha}{2}(s) \int_0^s g(t) c_\sigma(s, t)^{\mu-1} dt,$$

ただし $t, s \in \overline{\mathfrak{a}_+}, \forall f \in C_c^\infty(\mathfrak{a}), \forall g \in L_1(\overline{\mathfrak{a}_+})$. 上の変換は $\mathfrak{a}$ 上の偶関数に対して拡張でき, μ の関数として $\mathbb{C}$ 上の整関数に解析接続をもつ. またそれぞれは bijective であり, 次のような関係にある:

$$(10) \quad \int_{\mathfrak{a}_+} \mathcal{W}_\mu^\sigma f(t) g(t) dt = \int_{\mathfrak{a}_+} f(t) \mathcal{R}_\mu^\sigma g(t) dt.$$

さらに $\delta^{(\sigma)} := \sigma \sinh(\sigma(\alpha/2))$ とおくことにし, $\Re k_\alpha, \Re k_{\alpha/2} > 0$ (resp. $\Re k_\alpha > -1$ and $\Re k_{\alpha/2} > 1$) のとき, $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a})^\pm$ ($C_c^\infty(\mathfrak{a})$ の偶 (resp. 奇) 関数全体) に対して, $\mathcal{A}_\phi f : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}$ (resp. $\mathcal{A}_{\phi_e^-} f : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}$) を次で与える:

$$(11) \quad \mathcal{A}_\phi f := \mathcal{W}_{k_{\alpha/2}}^{1/2} \circ \mathcal{W}_{k_\alpha}^1 f$$

$$(12) \quad (\text{resp. } \mathcal{A}_{\phi_e^-} f := \delta^{(1/2)} \circ \mathcal{W}_{k_{\alpha/2}-1}^{1/2} \circ \mathcal{W}_{k_\alpha+1}^1 \circ (\delta^{(1)})^{-1} f).$$

$f \in C_c^\infty(\mathfrak{a})$ に対し, $f = f^+ + f^-$ を偶, 奇関数への分解とすると, $\mathcal{A}f : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\mathcal{A}f := \mathcal{A}_\phi f^+ + \mathcal{A}_{\phi_e^-} f^-$$

¹特に $\mathcal{F}_e$ を Cherednik は [1] では “Opdam transform” と呼んでおり, 一方 Opdam は上の変換を “Cherednik transform” と呼んでいる.

で定義する. 定義より明らかに $\mathcal{A} : C_c^\infty(\mathfrak{a}) \ni f \mapsto \mathcal{A}f \in C_c^\infty(\mathfrak{a})$ は bijective である.

3.2 PW 上の対応物. 上の Abel 変換に対応して PW 上にもある変換が導かれる. これは次のように表される:

$f \otimes e \in \mathbf{PW}$ に対して $f \otimes e = f^+ \otimes e + f^- \otimes e$ を $f \otimes e$ の $\mathbf{PW}$ における偶、奇関数への分解とする. このとき次のような $\mathbb{C}$ 線形写像 $\mathcal{A}^{pw} : \mathbf{PW} \rightarrow \mathbf{PW}_0$ が定義できる:

$$(13) \quad \mathcal{A}^{pw}(f \otimes e) := f^+ \otimes e + \frac{\alpha^\vee}{\alpha^\vee + k_\alpha^0} f^- \otimes e.$$

また

$$(14) \quad (\mathcal{A}^{pw})'(f \otimes e) = f^+ \otimes e + \frac{\alpha^\vee + k_\alpha^0}{\alpha^\vee} f^- \otimes e.$$

とするとこれが $\mathcal{A}^{pw}$ の逆を与える事が容易に確かめられ、さらに任意の $f \otimes e \in \mathbf{PW}, \xi \in \mathfrak{h}$ に対して次が成立する事が容易に確かめられる:

$$(15) \quad \mathcal{A}^{pw}(\xi \cdot f \otimes e) = \xi \mathcal{A}^{pw}(f \otimes e), \quad \mathcal{A}^{pw}(r_\alpha \cdot f \otimes e) = r_\alpha \mathcal{A}^{pw}(f \otimes e).$$

それぞれの左辺における ξ, r_α の作用は $\mathbf{PW}_0$ における作用であることに注意する.

4 Paley-Wiener 型の定理.

ここで BC_1 型の Cherednik 変換を上で定義した変換を用いて表す事を考える. 今の場合 Heckman-Opdam の超幾何関数は Gauss の超幾何関数によって表され、これによって Gauss の超幾何関数に対する公式を応用する事が出来、特に次を得ることができる:

Proposition 3. (i) $\Re k_\alpha, \Re k_{\alpha/2} > 0$ のとき、

$$\delta_k(t) \widetilde{G}^+(\lambda, k) = \mathcal{R}_{k_\alpha}^1 \circ \mathcal{R}_{k_{\alpha/2}}^{1/2} (\cosh \lambda).$$

(ii) $\Re k_\alpha - 1, \Re k_{\alpha/2} + 1 > 0$ のとき、

$$\delta_k(t) \widetilde{G}^-(\lambda, k) = \frac{\lambda(\alpha^\vee) + k_\alpha^0}{\lambda(\alpha^\vee)} (\delta^{(1)})^{-1} \circ \mathcal{R}_{k_\alpha+1}^1 \circ \mathcal{R}_{k_{\alpha/2}-1}^{1/2} \circ \delta^{(1/2)} (\sinh \lambda).$$

ここで $\widetilde{G}^\pm$ は $\widetilde{G}$ の偶、奇関数部分を表す.

正規化を変更した $\tilde{G}$ に対応する Cherednik 変換を $\tilde{\mathcal{F}}$ と記すとき、 $\tilde{\mathcal{F}}$ について上の命題を適応すると (10) から

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}_\phi f^+(\lambda) &= 2 \int_{\mathfrak{a}_+} f^+ \tilde{G}^+(-\lambda, k) \delta_k dx \\ &= 2 \int_{\mathfrak{a}_+} f^+ \mathcal{R}_{k_\alpha}^1 \circ \mathcal{R}_{k_{\alpha/2}}^{1/2} (\cosh(-\lambda)) dx \\ &= 2 \int_{\mathfrak{a}_+} \mathcal{W}_{k_{\alpha/2}}^{1/2} \circ \mathcal{W}_{k_\alpha}^1 (f^+) \cosh(-\lambda) dx \\ &= 2 \int_{\mathfrak{a}_+} \mathcal{A}_\phi(f^+) \cosh(-\lambda) dx\end{aligned}$$

同様に

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\phi_e^-} f^-(\lambda) = 2 \frac{\lambda(\alpha^\vee) - k_\alpha^0}{\lambda(\alpha^\vee)} \int_{\mathfrak{a}_+} \mathcal{A}_{\phi_e^-}(f^-) \sinh(-\lambda) dx.$$

を得る. これらを併せて次の等式を得る:

$$\pi^{-1} \circ \tilde{\mathcal{F}} f(\lambda) = (\mathcal{A}^{pw})^{-1} \circ \pi^{-1} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{A}(f)(\lambda)$$

この等式は k に関して解析接続する事により任意の k について成り立つ事になる. また下の図式が (1) に対応する分解となる:

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(\mathfrak{a})_k & \xrightarrow{\pi^{-1} \circ \tilde{\mathcal{F}}} & \mathbf{PW}_k \\ \mathcal{A} \downarrow & & \mathcal{A}^{pw} \downarrow \\ C_c^\infty(\mathfrak{a})_0 & \xrightarrow{\pi^{-1} \circ \mathcal{F}} & \mathbf{PW}_0. \end{array}$$

したがって $\mathcal{A}, \mathcal{A}^{pw}, \mathcal{F}$ がそれぞれ bijective である事、及び (15) より次の事が得られる:

- Theorem 4.** (i) (Palay-Wiener) 任意の $k \in \mathcal{K}$ に対して, $\tilde{\mathcal{F}}$ は $C_c^\infty(\mathfrak{a})$ から $\pi(\mathbf{PW})$ への同型.
(ii) $\mathcal{A}(D_\xi(R_+, k)f) = \partial_\xi \mathcal{A}(f)$, $\mathcal{A}(r_\alpha f) = r_\alpha \mathcal{A}(f)$ ($\forall \xi \in \mathfrak{h}$, $\alpha \in R$, $\forall f \in C_c^\infty(\mathfrak{a})$).

5 逆公式.

上で定義した wave packet $\mathcal{J}$ を $k \in \mathcal{K}$ が負になる事を想定して、特に $\pi(\mathbf{PW})$ 上に於いて次のように定義を変更しておく:

先ず今の場合 $\tilde{c}$ が

$$\tilde{c}(\lambda, k) := \frac{\Gamma(\lambda(\alpha^\vee) + \frac{1}{2}k_{\alpha/2})}{\Gamma(\lambda(\alpha^\vee) + \frac{1}{2}k_{\alpha/2} + k_\alpha)} \frac{\Gamma(2\lambda(\alpha^\vee))}{\Gamma(2\lambda(\alpha^\vee) + k_{\alpha/2})},$$

で与えられる事に注意して、 $k \in \mathcal{K}$ に対して

$$-\overline{\mathfrak{a}}_{+<k}^* = \{\eta \in -\overline{\mathfrak{a}}_+^* : \eta(\alpha^\vee) < k_\alpha^0, \eta(\alpha^\vee) < \frac{1}{2}k_{\alpha/2} + \frac{1}{2}\}$$

とする。さらに $\eta \in -\overline{\mathfrak{a}}_{+<k}^*$ 及び $f \otimes e \in \mathbf{PW}$ に対して

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{J}}\pi(f \otimes e)(x) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\eta+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} f^+(\lambda)\Psi^+(\lambda, k)(x) \frac{d\omega(\lambda)}{\tilde{c}(-\lambda, k)} \\ & \quad + \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\eta+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} f^-(\lambda)\Psi^-(\lambda, k)(x) \frac{d\omega(\lambda)}{\tilde{c}(-\lambda, k)} \end{aligned}$$

とおく。ここで $\Psi^\pm$ は $F(\lambda, k)$ の $\mathfrak{a}_+$ における Harish-Chandra 展開

$$F(\lambda, k) = \sum_{w \in W} \frac{\tilde{c}(w\lambda, k)}{\tilde{c}(\rho_k, k)} \Phi(w\lambda, k)$$

における Harish-Chandra 級数 $\Phi(\lambda, k)$ の $G(\lambda, k)$ に対する類似の級数 Ψ の偶、奇関数部分を表す。このとき次がこのとき次が成立する：

Theorem 5. 任意の $k \in \mathcal{K}$ に対して $\mathbf{PW}$ 上に於いて $(\pi\mathcal{F})^{-1} = \mathcal{J}\pi$.

これは Proposition 3 の $\Psi^\pm$ に対する類似を求め、これを用いて (10) を使って容易に証明される。

さらに $\eta \rightarrow 0$ と積分路を変更する事により留数項を拾って行くと次が得られる事になる：

Theorem 6. $k \in \mathcal{K}$ に対して

$$k \notin \{ k \in \mathcal{K} : k_{\alpha/2} + 1 < 0 \text{ and } k_\alpha \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{-k_{\alpha/2}/2 - 1/2} \}$$

となるとする。さらに

$$D(k) := \{ z \in -\overline{\mathfrak{a}}_+^* : z(\alpha^\vee) \in k_\alpha^0 + \mathbb{N} \text{ or } z(\alpha^\vee) \in \frac{1}{2}k_{\alpha/2} + \frac{1}{2} + \mathbb{N} \}.$$

とおくとき、任意の $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a})$ に対して次が成立：

$$f = \mathcal{J}_c \mathcal{F} f - 2\pi\sqrt{-1} \sum_{z \in D(k)} \mathcal{J}_z \mathcal{F} f.$$

ただし $\mathcal{J}_c, \mathcal{J}_z$ は次で与えられる：

$$\mathcal{J}_c \sigma(t) = \int_{\sqrt{-1}\mathfrak{a}_+^*} \mathcal{J}_\lambda(\sigma(\lambda))(t) d\nu_k(\lambda),$$

$$\mathcal{J}_z \sigma(t) = \int_{z+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*} \mathcal{J}_\lambda(\sigma(\lambda))(t) \operatorname{res}_{\lambda=z} \sigma_k(\lambda) \delta(\lambda - z) d\omega(\lambda).$$

ここに出て来る k に関する条件は球測度が 2 位の極を持つと言う条件であり、 R が A_1 型の場合は k に対して無条件で逆公式が成立していることになる。

REFERENCES

- [1] I. Cherednik, *Ivan Inverse Harish-Chandra transform and difference operators*, **Internat. Math. Res. Notices**, 1997, 733–750.
- [2] G. Heckman and H. Schlichtkrull, *Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces*, Perspectives in Mathematics, 16. Academic Press
- [3] S. Helgason, *Groups and geometric analysis, Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions*, Pure and Applied Mathematics, 113. Academic Press, 1984.
- [4] T. Koornwinder, *A new proof of a Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform*, **Ark. Mat.** 13 (1975), 145–159.
- [5] E. M. Opdam, *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, **Acta Math.** 175 (1995), 75–121.