

# A duality of the Macdonald-Koornwinder polynomials and its application to the integral representations

九州大学大学院数理学研究科・三町勝久

約10年ほど前に Jacobi 多項式

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} -n, \alpha + \beta + n + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix} ; \frac{1-z}{2} \right]$$

の新しい積分表示式が青本和彦先生により見いだされました.  $\Phi(x)$  を Selberg 積分の被積分函数

$$\Phi(x) = \prod_{1 \leq i \leq n} x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^{2\gamma}$$

としたとき,  $z$  についての函数

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i - z) \Phi(x) dx_1 \cdots dx_n \quad (1)$$

が, 定数倍を除いて

$$P_n^{(\frac{\alpha}{\gamma}-1, \frac{\beta}{\gamma}-1)}(z)$$

となるというものです.  $\gamma = 1$  の場合は直交多項式の一般論に現れるものであり古くから知られているものですが, それを必ずしも  $\gamma = 1$  でない場合に拡張したというのが大事な点です.

ちなみに

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \Phi(x) dx_1 \cdots dx_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1+\gamma(1+j))\Gamma(\alpha+j\gamma)\Gamma(\beta+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+(n+j-1)\gamma)}$$

が Selberg 積分でした.

この公式(1)における差積  $\prod_{i=1}^n (x_i - z)$  を  $\prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq m} (x_i - z_j)$  に取り替えると, 積分によって得られるものは勿論  $m$  変数  $z = (z_1, \dots, z_m)$  に関する多項式ですが, それがどのようなものになるかという問いに答えたのが金子譲一さんです. それによると, 1955 年の Herz に始まり, Constantine, James, Muirhead, Gross, Richards, Korány, Faraut そして Macdonald によ

り調べられた matrix argument の超幾何関数  ${}_2F_1$  というもので表されるというのです。さらに、同じころ金子さんとは独立に、Beerends-Opdam によって、この matrix argument の  ${}_2F_1$  が, Heckman-Opdam の定義したルート系に付随した Jacobi 多項式でルート系を  $BC_m$  とし, さらに多項式をパラメトライズするヤング図形を長方形にとったもの他ならないことが明らかにされました。ですから, これらをあわせると, 金子さんの考察した積分は  $BC_m$  型の Jacobi 多項式でヤング図形が  $(n^m)$  であるものの積分表示を与えているということになります。これらは 1990 年を少し過ぎた頃の進展でした。

さて, 一変数の場合に戻ります。Jacobi 多項式は適当な特殊化などにより, Gegenbauer, Laguerre, Hermite などさまざまな直交多項式を含みますし, 表現論的な意味合いなどもかなりよく分かっており, どのような点からも, もっとも基本的な直交多項式といえるものでしょう。しかし, 一方で Jacobi 多項式を特殊な物としてして含む直交多項式が幾つか見つかり, Continuous Hahn 多項式, Continuous dual Hahn 多項式, Wilson 多項式などがそれです。これらさまざまな直交多項式のいわば相関図は 1980 年頃 Askey によりまとめられていて, それは Askey scheme などと呼ばれています。Continuous Hahn 多項式, Continuous dual Hahn 多項式, Wilson 多項式などはほとんどの方が馴染みのないどころか名前も初めてでしょうから, 一つだけ, Wilson 多項式  $W_n$  をお目にかけましょう。それは,

$${}_4F_3 \left[ \begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix} ; z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n (a_3)_n (a_4)_n z^n}{(b_1)_n (b_2)_n (b_3)_n n!}.$$

を一般超幾何級数として

$$W_n(z^2; a, b, c, d) = (a+b)_n (a+c)_n (a+d)_n \times {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} -n, n+a+b+c+d-1, a+iz, a-iz \\ a+b, a+c, a+d \end{matrix} ; 1 \right],$$

で与えられます。ただし,  $i = \sqrt{-1}$  は imaginary unit で,  $(a)_n$  は rising factorial  $\prod_{0 \leq j \leq n-1} (a+j)$  です。直交関係は

$$\int_0^{\infty} W_n(t^2) W_m(t^2) \left| \frac{\Gamma(a+it)\Gamma(b+it)\Gamma(c+it)\Gamma(d+it)}{\Gamma(2it)} \right|^2 dt = 0, \quad m \neq n$$

で与えられます。この多項式は古典的 ( $q=1$ ) な直交多項式に関する Askey scheme において, 最上部に位置する親玉のようなものです。

それではこれらの多項式に関して, 先ほどの公式 (1) の対応物は得られないのでしょうか。実は, 答えは肯定的であることがわかりました。Continuous Hahn 多項式, Continuous dual Hahn 多項式, Wilson 多項式などすべてが旨くいっています。これらの証明法はどれも差分方程式を用いるものでした。これらがはっきりしたのは半年ほど前のことですが, こうなると金子さんが

やったような多変数の場合に拡張したくなります。実際、さまざまな経験から予想式は直ちに立ちます。

例えば  $\Phi^W(x)$  を

$$\Phi^W(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{\prod_{1 \leq s < k} \Gamma(a_s + x_k) \Gamma(a_s - x_k)}{\Gamma(2x_k) \Gamma(-2x_k)} \\ \times \prod_{1 \leq k < l \leq n} \prod_{\epsilon_k, \epsilon_l = \pm 1} \frac{\Gamma(\lambda + \epsilon_k x_k + \epsilon_l x_l)}{\Gamma(\epsilon_k x_k + \epsilon_l x_l)}$$

としたとき

$$\int_0^{i\infty} \cdots \int_0^{i\infty} \prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq m} (x_i^2 - z_j^2) \Phi^W(x) dx_1 \cdots dx_n$$

は van diejen が数年前に定義した多変数 Wilson 多項式でヤング図形  $(n^m)$  によりパラメトライズされているものになるであろうという予想などです。特に一変数  $m = 1$  の場合が

$${}_4F_3 \left[ \begin{matrix} -n, \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{\lambda} + n - 1, \frac{a_1 - z}{\lambda}, \frac{a_1 + z}{\lambda} \\ \frac{a_1 + a_2}{\lambda}, \frac{a_1 + a_3}{\lambda}, \frac{a_1 + a_4}{\lambda} \end{matrix} ; 1 \right]$$

という Wilson 多項式です。しかし、予想こそ立てども、どうにも証明出来ませんでした。2変数で且つヤング図形の箱が少ない場合ですら、差分方程式を満たすことが示せません。

そこで、少し気分を変えて  $q$  の場合にどうか試してみました。まず、手の着けやすい little  $q$ -Jacobi 多項式の場合は、何年か前に計算してあって、肯定的に解けることが分かっていたし、Askey-scheme を  $q$  の場合も込めて考えると、Wilson 多項式のもう一つ上に Askey-Wilson 多項式が究極の直交多項式として鎮座していることが知られていますので、この場合にどうなるかが、大事な問題です。結論を述べると、この場合も、肯定的でした。そして、 $q = 1$  の場合と同様に多変数化の予想もすぐに立ちますが、これまた同様に、いやそれ以上に証明することは困難であることがわかりました。とまれ予想式は次の通りです。

まず、 $0 < q < 1$  のもとで

$$\Phi^{(+)}(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{(x_k^2; q)_\infty}{(ax_k, bx_k, cx_k, dx_k; q)_\infty} \prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{(x_k/x_l, x_k x_l; q)_\infty}{(tx_k/x_l, tx_k x_l; q)_\infty}$$

とひとまずおき、これにより

$$\Phi(x) = \Phi^{(+)}(x) \Phi^{(+)}(x^{-1})$$

とします。このとき

$$\int_{T^n} \prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq m} (x_i + x_i^{-1} - z_j - z_j^{-1}) \Phi(x) \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_1 \cdots x_n}$$

が Koornwinder の定義した多変数 Askey-Wilson 多項式 ( $BC_m$  型 Macdonald 多項式の一般化で, Macdonald-Koornwinder 多項式とも呼ばれる) のヤング図形 ( $n^m$ ) によりパラメトライズされているものであろうという予想です. 一変数  $m = 1$  の場合に得られるのは

$${}_{4\varphi_3} \left[ \begin{matrix} t^{-n}, t^{n-1}abcd, az, az^{-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix} ; t, t \right]$$

です.

ここで, いつもの記号

$$(a; q)_n = (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(a; q)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n = \prod_{i=0}^{\infty} (1-aq^i),$$

$$(a_1, \dots, a_m; q)_n = (a_1; q)_n \cdots (a_m; q)_n,$$

$$(a_1, \dots, a_m; q)_\infty = (a_1; q)_\infty \cdots (a_m; q)_\infty$$

や

$${}_{4\varphi_3} \left[ \begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix} ; q, z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, a_3, a_4; q)_n}{(b_1, b_2, b_3, q; q)_n} z^n.$$

を用いています. 積分領域  $T^n$  は一般には複雑ですが, パラメータ  $t$  を  $q$  の正整数乗の場合に限れば簡単で, 変数ごとに単位円周上を正の方向に回ることと与えられます.

さて, ここで注意すべき点は, 被積分函数はいわゆる  $q$ -類似の式であっても, 積分して出てくる函数は  $t$ -類似の式だということです. 逆に, 出来上がりの函数を  $q$ -類似の式にしたいのならば, 被積分函数を  $t$ -類似の式にしなければなりません.  $t$  と  $\lambda$  が対応していることに注意すれば,  $q = 1$  の場合にも同様な構造があったことに気がつきます.

このような現象の背後に何らかの双対性を期待するのは自然です. 実際,  $A_{n-1}$  型の Macdonald 多項式  $P_\lambda(z; q, t)$  の間には

$$\sum_{\lambda} P_\lambda(x; q, t) P_{\lambda'}(y; t, q) = \prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq m} (1 + x_i y_j) \quad (2)$$

という関係式が知られています.  $q = 1$  の場合なら Jack 多項式  $P_\lambda(z; 1/\alpha)$  に対して

$$\sum_{\lambda} P_\lambda(x; \alpha) P_{\lambda'}(y; 1/\alpha) = \prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq m} (1 + x_i y_j)$$

です. ここで  $\lambda'$  はヤング図形  $\lambda$  を対角線でひっくり返して得られるヤング図形です.

しかし、これは一変数の場合で言えば、Gegenbauer 多項式 (Jacobi で  $\alpha = \beta$  としたものの) に対応するものですから、Jacobi 多項式や Continuous Hahn, Continuous dual Hahn, Wilson,... そして Askey-Wilson といった多項式達の双対性には遠く及ぶことが出来ません。

そこで、改めて問題を立て直してみることになります。つまり、双対性の式 (2) の対応物を Jacobi 多項式や Continuous Hahn,... そして Askey-Wilson といった多項式達にも通用するように構成できるかということです。究極の形でいうならば Macdonald-Koornwinder 多項式に関して (2) の対応物が構成できるかが問題です。そして、その答えが次の定理です。

**Theorem**  $P_\lambda(x : a, b, c, d : q, t)$  を monic な Macdonald-Koornwinder 多項式とすると

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq m} (x_i + x_i^{-1} - y_j - y_j^{-1}) \\ &= \sum_{\lambda \subseteq (n^m)} (-1)^{|\mu|} P_\lambda(x : a, b, c, d : q, t) P_\mu(x : a, b, c, d : t, q) \end{aligned}$$

が成立する。ただし、 $\mu = (m - \lambda'_n, m - \lambda'_{n-1}, \dots, m - \lambda'_1)$  とする。

これが、双対性のからくりだったのです。そして、この公式から出発すれば、次のような積分表示も簡単に得られます。

$$\begin{aligned} & P_\lambda(z : a, b, c, d : t, q) = \text{const.} \\ & \int_{T^n} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (x_i + x_i^{-1} - z_j - z_j^{-1}) P_\mu(x : a, b, c, d : q, t) \Phi(x) \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n}. \end{aligned}$$

ここで特に  $\lambda = (n^m)$  とすると  $P_\mu(x) = 1$  なので

$$\begin{aligned} & P_{(n^m)}(z : a, b, c, d : t, q) \\ &= \text{const.} \int_{T^n} \prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq m} (x_i + x_i^{-1} - z_j - z_j^{-1}) \Phi(x) \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n} \end{aligned}$$

が得られますが、これは、もともと証明しようとしていた積分表示式です。

この他にも、適当な特殊化を行えば、 $A_{n-1}, B_n, C_n, D_n$  及び  $BC_n$  型の Macdonald 多項式が満たす等式になり、 $q = 1$  の場合を考えれば Heckman-Opdam の Jacobi 多項式などにももちろん通用します。多変数 Wilson 等もまたしかりです。ここまで来てやっと、もともとの青本先生や金子さんの積分表示式のからくりがはっきりしてきた気になりました。

## 参考文献

- [1] K. Aomoto, Jacobi polynomials associated with Selberg integrals, *SIAM J. Math. Anal.* **18** (1987), 545-549.
- [2] R. Askey and J. A. Wilson, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **319** (1985).
- [3] R. J. Beerends, Some special values for the  $BC$  type hypergeometric function, *Contemporary Mathematics* **138** (1992), 27-49.
- [4] R. J. Beerends and E. Opdam, Certain hypergeometric series related to the root system  $BC$ , *Trans. Amer. Math. Soc.* **339** (1993), 581-609.
- [5] J. F. van Diejen, Commuting difference operators with polynomial eigenfunctions, *Compositio Mathematica* **95** (1995), 183-233.
- [6] J. F. van Diejen, Multivariable continuous Hahn and Wilson polynomials related to integrable difference systems, *J. Phys. A : Math. Gen.* **28** (1995), L369-L374.
- [7] J. F. van Diejen, Properties of some families of hypergeometric orthogonal polynomials in several variables, *Trans. Amer. Math. Soc.* (to appear)
- [8] R. A. Gustafson, A generalization of Selberg's beta integral, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **22** (1990), 97-105.
- [9] G. J. Heckman, Root systems and hypergeometric functions II, *Composit. Math.* **64** (1987), 353-374.
- [10] G. J. Heckman and E. M. Opdam, Root systems and hypergeometric functions I, *Composit. Math.* **64** (1987), 329-352.
- [11] M. Jimbo and T. Miwa, On a duality of branching rules for affine Lie algebras, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **6** (1985), 17-65.
- [12] J. Kaneko, Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **24** (1993), 1086-1110.
- [13] J. Kaneko,  $q$ -Selberg integrals and Macdonald polynomials, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup., série 4*, **29** (1996), 583-637.
- [14] T. H. Koornwinder, Askey-Wilson polynomials for root systems of type  $BC$ , *Contemp. Math.* **138** (1992), 189-204.

- [15] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its  $q$ -analogue, Delft Univ. of Tech. Report 98-17.
- [16] I. G. Macdonald, A new class of symmetric functions, in Actes Séminaire Lotharingen, Publ. Inst. Rech. Math. Adv., Strasbourg, 1988, 131-171
- [17] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials* (Second Edition), Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [18] K. Mimachi, A solution to quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations and its application to eigenvalue problems of the Macdonald type, Duke Math. J. **85** (1996), 635-658.
- [19] K. Mimachi, The little  $q$ -Jacobi polynomial associated with a  $q$ -Selberg integral, Funk. Ekvac. **41** (1998), 91-100.
- [20] K. Mimachi, Barnes type integral and the Meixner-Pollaczek polynomials, preprint 1998.
- [21] K. Mimachi, A multidimensional generalization of the Barnes integral and the continuous Hahn polynomial, preprint 1998.
- [22] K. Mimachi, Integral representations of the Wilson polynomials and the continuous dual Hahn polynomials, preprint 1998.
- [23] K. Mimachi, Askey-Wilson polynomials by means of a  $q$ -Selberg type integral, preprint 1998.
- [24] K. Mimachi and Y. Yamada, Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials, Commun. Math. Phys. **174** (1995), 447-455.
- [25] E. M. Opdam, Root systems and hypergeometric functions III, Compos. Math. **67** (1988), 21-49.
- [26] R. J. Muirhead, Aspects of multivariate statistical theory, Wiley, New York, 1982.
- [27] L. Vretare, Formulas for elementary spherical functions and generalized Jacobi polynomials, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), 805-833.
- [28] Z. Yan, generalized hypergeometric functions, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I **310** (1990), 349-354.