

NEWTON'S FORMULA FOR THE ORTHOGONAL LIE ALGEBRAS

伊藤 稔 (京大 理)

Introduction. 昨年の表現論シンポジウムでは Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ における Newton 型の関係式について述べた. 本講演では, 直交 Lie 環 $\mathfrak{o}_n$ においても同様の結果が得られたことを報告する. 直交 Lie 環 $\mathfrak{o}_n$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_n)$ に対し, Lie 群 O_n の adjoint 作用で不変な元のなす部分環 $U(\mathfrak{o}_n)^{O_n}$ を考える. この $U(\mathfrak{o}_n)^{O_n}$ の生成系として行列式とトレースで表される二種類のものが知られている. 本講演の主結果はこれらの間の具体的な関係式である. この関係式は $\mathfrak{gl}_n$ のときと同様に対称式に関する Newton の公式に類似したものとなっている.

以下, 固定された標数 0 の体 $\mathbb{K}$ の上で議論を行う. 直交 Lie 環 $\mathfrak{o}_n$ を n 次の交代行列全体のなす Lie 環として実現する. その生成系 $A_{ij} \in \mathfrak{o}_n$ を行列単位 $E_{ij} \in \mathfrak{gl}_n$ を用いて $A_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ と定め, これらを要素とする交代行列 $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}(n, U(\mathfrak{o}_n))$ を考える. また $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ に対し, 小行列 $A_I = (A_{ij})_{i, j \in I}$ を考える. 小行列式の和

$$(1) \quad C_{2k} = \sum_{|I|=2k} \det(A_I + \text{diag}(k, k-1, \dots, -k+1))$$

は普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心 $ZU(\mathfrak{o}_n)$ に属していることが知られている [HU]. より正確には $U(\mathfrak{o}_n)^{O_n}$ の元であり, $\{C_{2k} \mid 0 \leq 2k \leq n\}$ が $U(\mathfrak{o}_n)^{O_n}$ を生成している. この C_{2k} は $\mathfrak{gl}_n$ の普遍包絡環の中心元として有名な Capelli elements [Ca] の定義に非常に似ていることに注意する. また [IU] により C_{2k} は Pfaffian を用いて次のように書けることが分かっている:

$$(2) \quad C_{2k} = \sum_{|I|=2k} \text{Pf}(A_I)^2.$$

ただし, 非可換な要素の行列の行列式, Pfaffian は次のように定義する: n 次の正方行列 $\Phi = (\Phi_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $2m$ 次の交代行列 $\Psi = (\Psi_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2m}$ に対し

$$(3) \quad \det(\Phi) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) \Phi_{\sigma(1)1} \Phi_{\sigma(2)2} \cdots \Phi_{\sigma(n)n},$$

$$(4) \quad \text{Pf}(\Psi) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2m}} \text{sign}(\sigma) \Psi_{\sigma(1)\sigma(2)} \Psi_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots \Psi_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}.$$

(この (3) で定義された行列式はしばしば column-determinant と呼ばれる.)

また A の冪のトレース

$$(5) \quad \text{tr}(A^r) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \cdots A_{i_r i_1}$$

がやはり $U(\mathfrak{o}_n)^{O_n}$ に属する [Ge]. さらに $\{\text{tr}(A^r) \mid 0 \leq r \leq n\}$ が $U(\mathfrak{o}_n)^{O_n}$ を生成することが知られている.

本講演の第一の主結果はこの $U(\mathfrak{o}_n)^{O_n}$ の二つの生成系の関係を表す次の関係式である.

Theorem A. (Newton's formula for $\mathfrak{o}_n$) 次の $ZU(\mathfrak{o}_n)$ -係数形式的冪級数の等式が成立する:

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^{-1-r} \text{tr} \left(\left(A - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) I \right)^r \right).$$

ただし $D(\lambda), N(\lambda)$ は次のように定める C_{2k} の線型和である: $n = 2m$ のとき

$$(6) \quad D(\lambda) = \sum_{k=0}^m C_{2m-2k} \lambda^{\bar{k}} \lambda^k, \quad N(\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} (2k+2) C_{2m-2k-2} \lambda^{\bar{k}} \lambda^{k+1},$$

$n = 2m+1$ のとき

$$(7) \quad \begin{aligned} D(\lambda) &= \sum_{k=0}^m C_{2m-2k} (\lambda - 1/2)^{\bar{k}+1} (\lambda - 1/2)^k, \\ N(\lambda) &= \sum_{k=0}^m (2k+1) C_{2m-2k} (\lambda - 1/2)^{\bar{k}} (\lambda - 1/2)^k. \end{aligned}$$

ここで $\lambda^{\bar{k}} = \lambda(\lambda+1) \cdots (\lambda+k-1)$, $\lambda^k = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-k+1)$ としている.

行列 A を可換な要素からなる行列に置き換えてみると, ここで考えている二つの生成系はそれぞれ行列の固有値の基本対称式, 冪和対称式に対応する. したがってこれらの関係は古典的には Newton の公式として知られているものである. 実際に Theorem A は Newton の公式に相当する形をしている. 正確には対数微分で表された形のものに対応しており, その意味で [U2] で構成された $\mathfrak{gl}_n$ における Newton の公式の延長上にある. 左辺の分子は分母に対して, 古典的な Newton の公式では λ による微分, $\mathfrak{gl}_n$ における Newton の公式では後退差分をとったものになっていた. この Theorem A においても分子 $N(\lambda)$ は分母 $D(\lambda)$ の微分, 差分に近い形をしているが, 正確にはそのどちらでもない.

Lie 環 $\mathfrak{gl}_n$ においては, Cayley-Hamilton の定理の類似が成立した [U2]. 直交 Lie 環においてもやはり同様の結果が成立する. すなわち Theorem A の等式の左辺の分母 $D(\lambda)$ に $A - (n/2 - 1)I$ を代入すると 0 に等しくなる:

Theorem B. (The Cayley-Hamilton theorem for $\mathfrak{o}_n$) $\text{Mat}(n, U(\mathfrak{o}_n))$ において次の等式が成立する:

$$D\left(A - \left(\frac{n}{2} - 1\right)I\right) = 0.$$

これらの結果から $D(\lambda)$ は行列 A の“固有多項式”であると考えることができる.

以上の関係式は一般の非退化な対称二次形式で実現される直交 Lie 環にも拡張される (§5). 実際, 行列 A や その“固有多項式” $D(\lambda)$ に相当する F , $D_F(\lambda)$ が自然に定義でき, これらの間に Theorem A, B の等式がそのまま成立する.

Theorem A, B の証明は基本的には $\mathfrak{gl}_n$ における Newton の公式の証明 ([U2]) と同じ方針で行われる. すなわち $D(\lambda)$ に対し次の関係を満たす“余因子行列” $\Delta(\lambda)$ を構成することが主たる目標となる:

$$\Delta(\lambda) \left(A - \left(\frac{n}{2} - 1\right)I - \lambda I \right) = D(\lambda)I.$$

この関係式の Corollary として上記の Theorem A, B が得られる (§4).

この余因子行列のまた一つの応用例として, 直交 Lie 環の split した実現における“固有多項式” $D_F(\lambda)$ の Harish-Chandra homomorphism による像の計算がある (§6). この結果は Twisted Yangian の理論に現れる Sklyanin determinant と呼ばれる元の Harish-Chandra homomorphism による像 ([M]) に一致しており, これから $D_F(\lambda)$ が Sklyanin determinant と等しいことが分かる. このことは偶数次の直交 Lie 環で $\lambda = 0$ のときは [IU] で確かめられていたが, 一般の場合については分かっていなかった.

$D(\lambda)$ の余因子行列の構成は, §2 で説明する Pfaffian $\text{Pf}(A)$ の余因子を利用して行う. この計算は [IU] の結果から得られる $D(\lambda)$ の表示式 (19), (20) に基づいている. [IU] では行列式および Pfaffian を外積代数の元を変数とする母関数で表示して計算を行っているが, 本稿でもこの表示を利用して計算を進める.

1. Expression of determinants and Pfaffians with the exterior algebra. 行列式および Pfaffian の外積代数を用いた表示を説明しよう. この表示は非可換な要素からなる行列に対しても有効であり, これから行列式, Pfaffian の幾つかの基本的な性質が自然に導かれる. 次節以降ではこの表示を利用して $\text{Pf}(A)$ や $D(\lambda)$ の余因子の構成を行う.

$e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n$ を反可換な変数, Λ_{2n} をこれらから生成される外積代数とする. 結合的代数 $\mathcal{A}$ に対し, その元を要素とする $n \times n$ 行列 $\Phi = (\Phi_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ を考える. 以下, 外積代数 Λ_{2n} と代数 $\mathcal{A}$ のテンソル積環 $\Lambda_{2n} \otimes \mathcal{A}$ で計算を行う.

1.1. Φ が $2m$ 次の交代行列のとき Pfaffian $\text{Pf}(\Phi)$ は $\theta_\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n e_i e_j \Phi_{ij}$ という元を用いて, 次のように表される:

$$(8) \quad \theta_\Phi^m = m! e_1 \cdots e_n \text{Pf}(\Phi).$$

また式(3)で定義した行列式 (column-determinant) は $\eta_j = \sum_{i=1}^n e_i \Phi_{ij}$ という元を用いて

$$(9) \quad \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n = e_1 \cdots e_n \det(\Phi)$$

と書くことができる.

この column-determinant とは別に, Pfaffian の定義を参考にして次のような “対称化された行列式” とでも呼ぶべきものを導入する:

$$(10) \quad \text{Det}(\Phi) = \frac{1}{n!} \sum_{(\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\sigma') \Phi_{\sigma(1)\sigma'(1)} \Phi_{\sigma(2)\sigma'(2)} \cdots \Phi_{\sigma(n)\sigma'(n)}.$$

さらに次のようにパラメータ $u_1, u_2, \dots, u_n$ を持つものを考える:

$$(11) \quad \begin{aligned} \text{Det}(\Phi; u_1, u_2, \dots, u_n) \\ = \frac{1}{n!} \sum_{(\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\sigma') \Phi_{\sigma(1)\sigma'(1)}(u_1) \cdots \Phi_{\sigma(n)\sigma'(n)}(u_n). \end{aligned}$$

ただし $\Phi_{ij}(u) = \Phi_{ij} + \delta_{ij}u$ とする. これらは $\Xi_\Phi = \sum_{i,j=1}^n e_i e'_j \Phi_{ij}$ という元を用いて次のように表される:

$$(12) \quad \Xi_\Phi^n = n! e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n \text{Det}(\Phi),$$

$$(13) \quad (\Xi_\Phi + u_1 \tau)(\Xi_\Phi + u_2 \tau) \cdots (\Xi_\Phi + u_n \tau) = n! e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n \text{Det}(\Phi; u_1, u_2, \dots, u_n).$$

特に $\text{Det}(\Phi; u_1, u_2, \dots, u_n)$ はパラメータの順序によらない. $\Xi_\Phi = \sum_{j=1}^n \eta_j e'_j$ に注意すると, η_j が互いに反可換であれば (代数 $\mathcal{A}$ が可換であればこの条件は自動的に満たされる), $\det(\Phi)$ と $\text{Det}(\Phi)$ は一致することが分かる.

Remark. 上記の Pfaffian および行列式 Det の表示式 (8), (13) は, より一般に 次のような subpfaffian および小行列式の関係式に書き直すことができる. まず, Φ が交代行列のとき

$$(14) \quad \theta_\Phi^k = k! \sum_{|I|=2k} e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \text{Pf}(\Phi_I).$$

ただし $I = \{i_1, \dots, i_{2k}\}$ とする. また, Φ が一般の正方行列のとき

$$(15) \quad \begin{aligned} (\Xi_\Phi + u_1 \tau)(\Xi_\Phi + u_2 \tau) \cdots (\Xi_\Phi + u_k \tau) \tau^{n-k} \\ = k!(n-k)! e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n \sum_{|I|=k} \text{Det}(\Phi_I; u_1, u_2, \dots, u_k). \end{aligned}$$

1.2. 以下, 行列 A について考察する. $\psi_j = \sum_{i=1}^n e_i A_{ij}$ と置くと, これらは互いに反可換ではないが, そのかわり次のような交換関係を持つ: $\psi_j(u) = \psi_j + ue_j$ に対し,

$$(16) \quad \psi_i(u+1)\psi_j(u) + \psi_j(u+1)\psi_i(u) = -\delta_{ij} \cdot 2\theta_A.$$

これから column-determinant ‘det’ と対称化された行列式 ‘Det’ とを結ぶ次の等式が導かれる:

$$(17) \quad \det(A + \text{diag}(u, u-1, \dots, u-n+1)) = \text{Det}(A; u, u-1, \dots, u-n+1).$$

実際, $\Xi_A + u\tau = \sum_{j=1}^n \psi_j(u)e'_j$ に注意すると, (16) を用いて

$$(\Xi_A + u\tau)(\Xi_A + (u-1)\tau) \cdots (\Xi_A + (u-n+1)\tau) = n! \psi_1(u)e'_1 \cdots \psi_n(u-n+1)e'_n$$

という展開が得られ, これと (9), (13) から (17) が分かる. 特に C_{2k} は

$$C_{2k} = \sum_{|I|=2k} \text{Det}(A_I; k, k-1, \dots, -k+1)$$

と表される. また, $D(\lambda)$ は (15) に従って Ξ_A で表し, ある種の二項定理を施すことにより, 次のような “ A の固有多項式らしい” 表示で書くことができる:

$$(18) \quad D(\lambda) = \begin{cases} \text{Det}(\lambda I - A; m-1, m-2, \dots, 0, 0, \dots, -m+1), & (n=2m), \\ \text{Det}((\lambda - 1/2)I - A; m, m-1, \dots, 0, 0, \dots, -m+1), & (n=2m+1). \end{cases}$$

ここでドットは 1 ずつ下降していく数列を表している.

最後に $D(\lambda), N(\lambda)$ の $\theta = \theta_A, \theta' = \theta'_A = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n e'_i e'_j A_{ij}$ を用いた表示を述べる. これは Pfaffian による C_{2k} の表示 (2) に基づくものである. §3 ではこの表示を利用して $D(\lambda)$ の余因子行列の構成を行う. $n = 2m$ のとき

$$(19) \quad \begin{aligned} e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n D(\lambda) &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \theta^{(m-k)} \theta'^{(m-k)} \tau^{(2k)} \lambda^{\bar{k}} \lambda^{\underline{k}}, \\ e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n N(\lambda) &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k-1} (2k+2) \theta^{(m-k-1)} \theta'^{(m-k-1)} \tau^{(2k+2)} \lambda^{\bar{k}} \lambda^{\underline{k+1}}, \end{aligned}$$

$n = 2m+1$ のとき

$$(20) \quad \begin{aligned} e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n D(\lambda) &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} \theta^{(m-k)} \theta'^{(m-k)} \tau^{(2k+1)} (\lambda - 1/2)^{\bar{k+1}} (\lambda - 1/2)^{\underline{k}}, \\ e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n N(\lambda) &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} (2k+1) \theta^{(m-k)} \theta'^{(m-k)} \tau^{(2k+1)} (\lambda - 1/2)^{\bar{k}} (\lambda - 1/2)^{\underline{k}}. \end{aligned}$$

ただし 記号 $x^{(k)}$ は $\frac{1}{k!}x^k$ を意味する.

Remarks. (a) $\mathfrak{gl}_n$ における Capelli element についても対称化された行列式による (17), (18) と同様の表示が成立する [IU].

(b) 外積代数を用いた表示 (8), (12), (13) から Det , Pf の次のような不変性が自然に導かれる: $g, g' \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ に対し

$$\text{Det}(g\Phi g') = \det(g) \det(g') \text{Det}(\Phi),$$

$$\text{Det}(g\Phi g^{-1}; u_1, u_2, \dots, u_n) = \text{Det}(\Phi; u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Φ が交代行列のときは

$$\text{Pf}({}^t g \Phi g) = \det(g) \text{Pf}(\Phi).$$

これらの関係式は Φ の要素が非可換でも成立することに注意する. これを応用して $\text{Pf}(\mathbf{A})$, $\text{Det}(\mathbf{A}; u_1, u_2, \dots, u_n)$ がそれぞれ Lie 群 SO_n, O_n の adjoint 作用によって不変である (特に普遍包絡環の中心元である) ことを確かめることができる.

2. The cofactor for the Pfaffian $\text{Pf}(\mathbf{A})$. “固有多項式” $D(\lambda)$ の余因子は $\text{Pf}(\mathbf{A})$ の余因子を用いて構成される. そこで, まず $\text{Pf}(\mathbf{A})$ の余因子から説明する.

最初に 古典的な設定における Pfaffian の余因子を復習しよう ([Hi]). Φ を可換な要素からなる $2m$ 次交代行列とする. これに対し, 行列 Γ_Φ を

$$(21) \quad e_1 \cdots e_{2m} (\Gamma_\Phi)_{ij} = -e_i e_j \theta_\Phi^{(m-1)}$$

で定める. ただし $(\Gamma_\Phi)_{ij}$ は Γ_Φ の (i, j) 成分である. Pfaffian の表示式 (8) を使って言い換えると, $(\Gamma_\Phi)_{ij}$ は行列 Φ から i, j 行 i, j 列を取り除いた $2m - 2$ 次の小行列の Pfaffian に適当な符号を付けたものとなっている. この行列 Γ_Φ を $\text{Pf}(\Phi)$ の余因子行列と呼ぶ. 実際, Γ_Φ と Φ の積は $\text{Pf}(\Phi)$ を対角成分に持つスカラー行列に一致する:

$$\Gamma_\Phi \Phi = \Phi \Gamma_\Phi = \text{Pf}(\Phi) I.$$

非可換な要素からなる行列 $\mathbf{A} = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2m}$ の Pfaffian $\text{Pf}(\mathbf{A})$ に対しても, 上と同様に式 (21) で行列 $\Gamma_{\mathbf{A}}$ を定めると次のような類似の関係が成り立つ:

Proposition 1. 次の関係式が成立する:

$$\Gamma_{\mathbf{A}}(\mathbf{A} - (m-1)I) = (\mathbf{A} - (m-1)I)\Gamma_{\mathbf{A}} = \text{Pf}(\mathbf{A})I.$$

この関係は Pfaffian の表示式 (8) から, $\psi_j = \sum_{i=1}^n e_i A_{ij}$, $\psi_j(u) = \psi_j + ue_j$ を用いて

$$(22) \quad -\theta^{(m-1)} e_\beta \psi_\alpha(-m+1) = \delta_{\alpha\beta} \theta^{(m)}$$

と書き直すことができる.

Proof of Proposition 1. 等式 (22) を示せばよい. まず $\alpha = \beta$ の場合について確かめてみる. θ と $e_\alpha \psi_\alpha(u)$ は互いに可換であることに注意して, $\theta^m = (\theta_{(\alpha)} - e_\alpha \psi_\alpha)^m$ の展開を考える. ただし $\theta_{(\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq \alpha} e_i e_j A_{ij}$ とする. $e_\alpha \psi_\alpha(u) = e_\alpha \psi_\alpha$ に注意すると, $\theta_{(\alpha)}^m = 0$ で $k \geq 2$ に対しては $(e_\alpha \psi_\alpha)^k = 0$ であるから, 目標の

$$\theta^m = (\theta_{(\alpha)} - e_\alpha \psi_\alpha)^m = -m \cdot \theta_{(\alpha)}^{m-1} e_\alpha \psi_\alpha = -m \theta^{m-1} e_\alpha \psi_\alpha(-m+1)$$

を得る.

次に $\alpha \neq \beta$ の場合を確かめる. 上と同様の計算で次を得る:

$$\begin{aligned} \theta^{m-1} e_\beta \psi_\alpha(-m+1) &= (\theta_{(\alpha)} - e_\alpha \psi_\alpha)^{m-1} e_\beta \psi_\alpha(-m+1) \\ &= \{\theta_{(\alpha)}^{m-1} - (m-1) \theta_{(\alpha)}^{m-2} e_\alpha \psi_\alpha\} e_\beta \psi_\alpha(-m+1) \\ &= \theta_{(\alpha)}^{m-1} e_\beta \psi_\alpha(-m+1) - (m-1) \theta_{(\alpha)}^{m-2} e_\alpha \psi_\alpha e_\beta \psi_\alpha(-m+1). \end{aligned}$$

ここで右辺の第 1 項は変数 e_α に着目すると $\theta_{(\alpha)}^{m-1} e_\beta e_\alpha \cdot (-m+1) = (-m+1) \theta^{m-1} e_\beta e_\alpha$ に等しいことが分かる. 一方, 第 2 項は (16) より

$$\begin{aligned} &-(m-1) \theta_{(\alpha)}^{m-2} e_\beta e_\alpha \psi_\alpha(-m+2) \psi_\alpha(-m+1) \\ &= (m-1) \theta_{(\alpha)}^{m-2} e_\beta e_\alpha \cdot \theta = (m-1) \theta^{m-1} e_\beta e_\alpha \end{aligned}$$

と一致する. よって, 第 1 項と第 2 項は互いに打ち消し合い, $\theta^{m-1} e_\beta \psi_\alpha(-m+1) = 0$ を得る. 以上で Proposition 1 が示された. $\square$

3. The cofactor for $D(\lambda)$. この節では, 前節の $\text{Pf}(A)$ の余因子を利用して “固有多項式” $D(\lambda)$ の余因子を構成する. Introduction で述べたように, この余因子行列を利用して Newton の公式や Cayley-Hamilton の定理を導くことができる (§4).

行列 $\Delta(\lambda)$ を次で定義する: $n = 2m$ のとき

$$(23) \quad e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n (\Delta(\lambda))_{ij} = \sum_{k=0}^{m-1} (-)^{m-k} \theta^{(m-k-1)} \theta'^{(m-k-1)} \tau^{(2k+1)} e_i e'_j \lambda^{\bar{k}} \lambda^{k+1} \\ + \sum_{k=0}^{m-1} (-)^{m-k-1} \theta^{(m-k)} \theta'^{(m-k-1)} \tau^{(2k)} e_i e'_j \lambda^{\bar{k}} \lambda^k,$$

$n = 2m + 1$ のとき

$$\begin{aligned}
(24) \quad & e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n (\Delta(\lambda))_{ij} \\
&= \sum_{k=0}^m (-)^{m-k+1} \theta^{(m-k)} \theta'^{(m-k)} \tau^{(2k)} e_i e'_j (\lambda - 1/2)^{\bar{k}} (\lambda - 1/2)^{\underline{k}} \\
&+ \sum_{k=0}^{m-1} (-)^{m-k-1} \theta^{(m-k)} \theta'^{(m-k-1)} \tau^{(2k+1)} e'_i e'_j (\lambda - 1/2)^{\bar{k+1}} (\lambda - 1/2)^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

ただし $(\Delta(\lambda))_{ij}$ は $\Delta(\lambda)$ の (i, j) 成分を表す. この $\Delta(\lambda)$ を $D(\lambda)$ の余因子行列と呼ぶ. 実際, $\Delta(\lambda)$ と $A - (\frac{n}{2} - 1)I - \lambda I$ の積は $D(\lambda)$ を対角成分に持つスカラー行列に一致する:

Proposition 2. 次の等式が成立する:

$$\Delta(\lambda) \left(A - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) I - \lambda I \right) = \left(A - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) I - \lambda I \right) \Delta(\lambda) = D(\lambda) I.$$

Proposition 2 は次のような方針で証明される. $D(\lambda)$ の表示式 (19), (20) から, 次の等式を示せばよい: $n = 2m$ のとき

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{m-1} (-)^{m-k} \theta^{(m-k-1)} \theta'^{(m-k-1)} \tau^{(2k+1)} e_i \psi'_j (-(m-1) - \lambda) \lambda^{\bar{k}} \lambda^{\underline{k+1}} \\
&+ \sum_{k=0}^{m-1} (-)^{m-k-1} \theta^{(m-k)} \theta'^{(m-k-1)} \tau^{(2k)} e'_i \psi'_j (-(m-1) - \lambda) \lambda^{\bar{k}} \lambda^{\underline{k}} \\
&= \delta_{ij} \sum_{k=0}^m (-)^{m-k} \theta^{(m-k)} \theta'^{(m-k)} \tau^{(2k)} \lambda^{\bar{k}} \lambda^{\underline{k}},
\end{aligned}$$

$n = 2m + 1$ のとき

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^m (-)^{m-k+1} \theta^{(m-k)} \theta'^{(m-k)} \tau^{(2k)} e_i \psi'_j (-n/2 + 1 - \lambda) (\lambda - 1/2)^{\bar{k}} (\lambda - 1/2)^{\underline{k}} \\
&+ \sum_{k=0}^{m-1} (-)^{m-k-1} \theta^{(m-k)} \theta'^{(m-k-1)} \tau^{(2k+1)} e'_i \psi'_j (-n/2 + 1 - \lambda) (\lambda - 1/2)^{\bar{k+1}} (\lambda - 1/2)^{\underline{k}} \\
&= \delta_{ij} \sum_{k=0}^{m-1} (-)^{m-k} \theta^{(m-k)} \theta'^{(m-k)} \tau^{(2k+1)} (\lambda - 1/2)^{\bar{k+1}} (\lambda - 1/2)^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

ただし $\psi'_j(u) = \sum_{i=1}^n e'_i A_{ij} + u e'_j$ としている. これらの等式は次の Lemma 3, 4 を用いて示すことができる. 実際, 左辺は Lemma 3 を用いて $\psi'_j(u)$ を含まない式に変形され, さらに Lemma 4 を適用することでそれが右辺に一致することが分かる.

Lemma 3. 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\theta'^{(k-1)}\tau^{(n-2k+1)}\psi'_j(\lambda) &= (\lambda + k - 1)\theta'^{(k-1)}\tau^{(n-2k+1)}e'_j - \theta'^{(k)}\tau^{(n-2k)}e_j, \\ \theta'^{(k-1)}\tau^{(n-2k)}e'_i\psi'_j(\lambda) &= \begin{cases} -\theta'^{(k)}(\tau - e_i e'_i)^{(n-2k)}, & (i = j), \\ (\lambda + k - 1)\theta'^{(k-1)}\tau^{(n-2k)}e'_i e'_j - \theta'^{(k)}\tau^{(n-2k-1)}e'_i e_j, & (i \neq j). \end{cases}\end{aligned}$$

Lemma 4. 次の等式が成立する:

$$\theta^{(k)}\theta'^{(k-1)}\tau^{(n-2k)}e'_i e'_j = \theta^{(k-1)}\theta'^{(k)}\tau^{(n-2k)}e_i e_j.$$

$$\theta^{(k)}\theta'^{(k)}\tau^{(n-2k-1)}(e_i e'_j + e'_i e_j) + (n - 2k)\theta^{(k)}\theta'^{(k-1)}\tau^{(n-2k)}e'_i e'_j = 0.$$

Lemma 3 は $\text{Pf}(A)$ の余因子に関する等式 (22) を変形して得られる. Lemma 4 も (22) とよく似た方法で示すことができる.

4. Newton's formula and the Cayley-Hamilton theorem for $\mathfrak{o}_n$. 本稿の第一, 第二の主定理である Newton の公式と Cayley-Hamilton の定理は, 前節で述べた $D(\lambda)$ の余因子の応用として示すことができる.

Theorem 5. (Newton's formula for $\mathfrak{o}_n$) 次の $ZU(\mathfrak{o}_n)$ -係数形式的冪級数の等式が成立する:

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^{-1-r} \text{tr} \left(\left(A - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) I \right)^r \right).$$

Proof. (19), (20) により余因子行列 $\Delta(\lambda)$ のトレースは $-N(\lambda)$ に一致する:

$$\text{tr}(\Delta(\lambda)) = -N(\lambda).$$

よって, Proposition 2 の等式に右側から $(\lambda I - \{A - (n/2 - 1)I\})^{-1}$ を掛けてトレースを取ると次を得る:

$$\begin{aligned}N(\lambda) &= D(\lambda) \text{tr} \left(\left(\lambda I - \left\{ A - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) I \right\} \right)^{-1} \right) \\ &= D(\lambda) \text{tr} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^{-1-r} \left(A - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) I \right)^r \right) \\ &= D(\lambda) \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^{-1-r} \text{tr} \left(\left(A - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) I \right)^r \right).\end{aligned}$$

両辺を $D(\lambda)$ で割ることにより, Theorem 5 が得られる. $\square$

Theorem 6. (The Cayley-Hamilton theorem for $\mathfrak{o}_n$) $\text{Mat}(n, U(\mathfrak{o}_n))$ において次の等式が成立する:

$$D\left(A - \left(\frac{n}{2} - 1\right)I\right) = 0.$$

Proof. 古典的な Cayley-Hamilton の定理と同様に証明できる. $D(\lambda)$ と余因子行列 $\Delta(\lambda)$ を

$$D(\lambda) = \sum_{k=0}^n d_k \lambda^k, \quad \Delta(\lambda) = \sum_{k=0}^n B_k \lambda^k$$

と展開する. Proposition 2 から B_k と d_k の間に次の関係が成立する: $k = 0, \dots, n$ に対し

$$B_k \left(A - \left(\frac{n}{2} - 1\right)I\right) - B_{k-1} = d_k I.$$

これに $(A - (n/2 - 1)I)^k$ を掛けて, $k = 0, \dots, n$ に渡って和を取る. すると左辺は 0 になり, 右辺はちょうど $D(A - (n/2 - 1)I)$ に一致する. 以上で Theorem 6 が示された. $\square$

5. Relation to other realizations of the orthogonal Lie algebras. ここまで直交 Lie 環を交代行列全体のなす Lie 環として実現し, その標準的な基底を成分とする行列 A について考察してきた. このような考察は直交 Lie 環の他の実現から出発することも可能である. 実際, 以下に見るように一般的な実現においてもこれまでと同様の結果が成立する.

$S \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ を非退化な $n \times n$ 対称行列とし, S で定まる直交 Lie 環 $\mathfrak{o}(S)$ を考える:

$$\mathfrak{o}(S) = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mid {}^tXS + SX = 0\}.$$

Lie 環 $\mathfrak{o}(S)$, $\mathfrak{o}_n$ の $\mathfrak{gl}_n$ への自然な埋め込みを通じて, 普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(S))$, $U(\mathfrak{o}_n)$ を $U(\mathfrak{gl}_n)$ の部分代数と見なす. $\mathfrak{gl}_n$ の involution $i_S : X \mapsto S^{-1}{}^tXS$ を考えると, 任意の $X \in \mathfrak{gl}_n$ に対し $X - i_S(X) \in \mathfrak{o}(S)$ となる. そこで $F_{ij} = E_{ij} - i_S(E_{ij})$ と置く. $\mathfrak{o}(S)$ はこれら F_{ij} で張られている. この生成系 F_{ij} を要素とする行列 $F = (F_{ij})_{i,j=1}^n$ を考える. 行列 F は $E = (E_{ij})_{i,j=1}^n$ を用いて次のように表される:

$$F = E - \text{Ad}(S)^t E = E - S^t E S^{-1}.$$

特に FS , $S^{-1}F$ が交代行列であることが分かる.

$S = {}^tss$ を満たす行列 $s \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ を一つ固定する (このような s は基礎体 $\mathbb{K}$ を拡大することで取ることができる). すると自然な同型 $\mathfrak{o}_n \cong \mathfrak{o}(S)$ が $\mathfrak{gl}_n$ の自己同型 $\text{Ad}(s^{-1}) : X \mapsto s^{-1}XS$ の制限として得られる. この同型で A の像が $\text{Ad}(s^{-1})A = {}^t s^{-1}F^t s$ となることに注意すると, Pf , Det , tr の不変性から以下のような $\text{Ad}(s^{-1})$ による元の対応が分かる:

$$\begin{aligned} \text{Pf}(A) &\mapsto \det(s)^{-1} \text{Pf}(FS) = \det(s) \text{Pf}(S^{-1}F), \\ C_{2k} &\mapsto \sum_{|I|=2k} \text{Det}(F_I; k, k-1, \dots, -k+1), \quad \text{tr}(A^r) \mapsto \text{tr}(F^r). \end{aligned}$$

また $D(\lambda)$, $N(\lambda)$ の $\text{Ad}(s^{-1})$ による像をそれぞれ $D_F(\lambda)$, $N_F(\lambda)$ と表す. $D_F(\lambda)$ は (18) と同様に次のように簡潔に表される:

$$D_F(\lambda) = \begin{cases} \text{Det}(\lambda I - F; m-1, m-2, \dots, 0, 0, \dots, -m+1), & (n=2m), \\ \text{Det}((\lambda - 1/2)I - F; m, m-1, \dots, 0, 0, \dots, -m+1), & (n=2m+1). \end{cases}$$

Newton の公式と Cayley-Hamilton の定理 (Theorem 5, 6) は $D(\lambda)$, $N(\lambda)$, A をそれぞれ $D_F(\lambda)$, $N_F(\lambda)$, F に置き換えてそのまま成立する.

以下, §2, 3 で構成した $\text{Pf}(A)$, $D(\lambda)$ の余因子と, それに関する関係式 Proposition 1, 2 が F を使ってどう書き直されるかを見る. まず, $n=2m$ のとき Pfaffian の余因子行列に相当するものとして行列 $\Gamma_{S^{-1}F}$ を

$$(25) \quad e_1 \cdots e_n (\Gamma_{S^{-1}F})_{ij} = -e_i e_j \theta_{S^{-1}F}^{(m-1)}$$

で定める. ただし $\theta_{S^{-1}F} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n e_i e_j (S^{-1}F)_{ij}$ とする. すると Proposition 1 は次のように書き換えられる:

Proposition 7. 次の関係式が成立する:

$$\Gamma_{S^{-1}F} S^{-1} (F - (m-1)I) = \text{Pf}(S^{-1}F) I.$$

また, $D(\lambda)$ の余因子行列に相当するものとして行列 $\Delta_{S^{-1}F}(\lambda)$ を次で定義する: $n=2m$ のとき

$$(26) \quad \begin{aligned} e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n (\Delta_{S^{-1}F}(\lambda))_{ij} &= \sum_{k=0}^{m-1} (-)^{m-k} \theta_{S^{-1}F}^{(m-k-1)} \theta_{S^{-1}F}'^{(m-k-1)} \tau_{S^{-1}}^{(2k+1)} e_i e'_j \lambda^{\bar{k}} \lambda^{\underline{k+1}} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} (-)^{m-k-1} \theta_{S^{-1}F}^{(m-k)} \theta_{S^{-1}F}'^{(m-k-1)} \tau_{S^{-1}}^{(2k)} e_i e'_j \lambda^{\bar{k}} \lambda^{\underline{k}}, \end{aligned}$$

$n=2m+1$ のとき

$$(27) \quad \begin{aligned} e_1 e'_1 \cdots e_n e'_n (\Delta_{S^{-1}F}(\lambda))_{ij} &= \sum_{k=0}^m (-)^{m-k+1} \theta_{S^{-1}F}^{(m-k)} \theta_{S^{-1}F}'^{(m-k)} \tau_{S^{-1}}^{(2k)} e_i e'_j (\lambda - 1/2)^{\bar{k}} (\lambda - 1/2)^{\underline{k}} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} (-)^{m-k-1} \theta_{S^{-1}F}^{(m-k)} \theta_{S^{-1}F}'^{(m-k-1)} \tau_{S^{-1}}^{(2k+1)} e_i e'_j (\lambda - 1/2)^{\bar{k+1}} (\lambda - 1/2)^{\underline{k}}. \end{aligned}$$

ただし

$$\theta_{S^{-1}F}' = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n e'_i e'_j (S^{-1}F)_{ij}, \quad \tau_{S^{-1}} = \sum_{i,j=1}^n e_i e'_j (S^{-1})_{ij}$$

としている. すると Proposition 2 は次のように書き換えられる:

Proposition 8. 次の関係式が成立する:

$$\Delta_{S^{-1}F}(\lambda)S^{-1}\left(F - \left(\frac{n}{2} - 1\right)I - \lambda I\right) = \det(S^{-1})D_F(\lambda)I.$$

6. Image of $D(\lambda)$ under the Harish-Chandra homomorphism. 最後に直交 Lie 環の split した実現における $D_F(\lambda)$ の Harish-Chandra homomorphism による像について述べる. $\mathfrak{gl}_n$ における Capelli element は, その Harish-Chandra homomorphism による像を容易に求めることができた. この $D_F(\lambda)$ の場合はそれほど易しくはないが, 余因子を利用してやはり計算することができる. この結果は Sklyanin determinant の Harish-Chandra homomorphism による像 ([M]) に一致しており, このことから実は $D_F(\lambda)$ が Sklyanin determinant と等しいことが分かる.

Harish-Chandra homomorphism は reductive Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し, 以下のように定義される. Lie 環 $\mathfrak{g}$ の三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$$

を固定する. Poincaré-Birkhoff-Witt の定理から直和分解

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{n}_- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \mathfrak{n}_+)$$

が得られる. そこで $U(\mathfrak{g})$ から $U(\mathfrak{h})$ への projection を γ と置く. この γ は $U(\mathfrak{g})$ の中心 $ZU(\mathfrak{g})$ に制限すると代数の準同型になっている. さらに $\mathfrak{h} \ni H \mapsto H - \rho(H)$ から生成される $U(\mathfrak{h})$ の同型 rho-shift $T_{-\rho}$ を考える. ここで ρ は次で定められる $\mathfrak{h}^*$ の元である:

$$\rho(H) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathfrak{n}_+}(\operatorname{ad} H), \quad \text{for } H \in \mathfrak{h}.$$

するとこれらの合成 $\bar{\gamma} = T_{-\rho} \circ \gamma$ は $ZU(\mathfrak{g})$ に制限すると, $ZU(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{h})^W$ なる代数同型を与えることが知られている. ただし $U(\mathfrak{h})^W$ は Weyl 群で不変な元からなる $U(\mathfrak{h})$ の部分代数である. この $\bar{\gamma}$ を Harish-Chandra homomorphism と呼ぶ.

以下, 行列 $S_0 = (\delta_{i,n+1-j})_{i,j=1}^n$ を用いて実現される直交 Lie 環

$$\mathfrak{o}(S_0) = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mid {}^t X S_0 + S_0 X = 0\}$$

で議論する. この $\mathfrak{o}(S_0)$ は $F_{ij} = E_{ij} - E_{n-j-1, n-i-1}$ 達で張られ, 特に $\{F_{ij} \mid i+j \leq n+1\}$ を基底としている. また, それぞれ $i > j$, $i = j$, $i < j$ なる F_{ij} で張られる $\mathfrak{o}(S_0)$ の部分 Lie 環を $\mathfrak{n}_-, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+$ とすると, これらは $\mathfrak{o}(S_0)$ の三角分解を与えている. このとき rho-shift $T_{-\rho}$ は $\mathfrak{h}$ の基底 $\{F_{ii} \mid 1 \leq i \leq n/2\}$ に対し次のように書ける:

$$T_{-\rho} F_{ii} = F_{ii} - \frac{n}{2} + i.$$

Proposition 9. $n = 2m$ のとき $\text{Pf}(S_0^{-1}F)$ の Harish-Chandra homomorphism による像は次で与えられる:

$$\bar{\gamma}(\text{Pf}(S_0^{-1}F)) = (-)^m F_{11} F_{22} \cdots F_{mm}.$$

Theorem 10. $D_F(\lambda)$ の Harish-Chandra homomorphism による像は次で与えられる:

$$\bar{\gamma}(D_F(\lambda)) = \begin{cases} (\lambda^2 - F_{11}^2) \cdots (\lambda^2 - F_{mm}^2), & (n = 2m), \\ (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda^2 - F_{11}^2) \cdots (\lambda^2 - F_{mm}^2), & (n = 2m + 1). \end{cases}$$

これらは前節の Proposition 7, 8 を用いて示すことができる. まず Proposition 9 の証明の方針を述べよう. Proposition 7 の等式の (n, n) 成分に γ を作用させると次を得る:

$$\begin{aligned} \gamma(\text{Pf}(S_0^{-1}F)) &= \sum_{i=1}^n \gamma((\Gamma_{S_0^{-1}F})_{ni}(F - (m-1)I)_{n-i-1, n}) \\ &= \gamma((\Gamma_{S_0^{-1}F})_{n1}(-F_{11} - (m-1))). \end{aligned}$$

ここで $(\Gamma_{S_0^{-1}F})_{n1}$ は $2(m-1)$ 次の Pfaffian $\text{Pf}((S_0^{-1}F)_{(1n)})$ に一致する. (ただし $\Phi_{(1n)}$ で行列 $\Phi = (\Phi_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ の小行列 $(\Phi_{ij})_{2 \leq i, j \leq n-1}$ を表す.) この $\text{Pf}((S_0^{-1}F)_{(1n)})$ に Proposition 7 を適用してさらに同じ論法を繰り返す. こうしてより小さな小行列の計算に帰着させることで, 最終的に次の等式を得る:

$$\gamma(\text{Pf}(S_0^{-1}F)) = (-F_{mm})(-F_{m-1, m-1} - 1) \cdots (-F_{11} - (m-1)).$$

これから Proposition 9 はすぐに示される.

Theorem 10 も同じ論法で証明することができる. この際 Proposition 8 から導かれる次の等式が鍵となる:

$$\gamma(D_F(\lambda)) = \gamma(D_{F_{(1, n)}}(\lambda)(-F_{11} - (n/2 - 1) - \lambda)(-F_{11} - (n/2 - 1) + \lambda)).$$

普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}(S_0))$ の中心の元として Twisted Yangian の理論から導かれる Sklyanin determinant と呼ばれるものが知られている[MNO]. この Sklyanin determinant の Harish-Chandra homomorphism による像が[M]において計算されているが, これは Theorem 10 の結果に一致している. このことから $D_F(\lambda)$ が Sklyanin determinant に等しいことが分かる. また, §5 で見たようにこの $D_F(\lambda)$ は C_{2k} の線型和である $D(\lambda)$ と (基礎体 $\mathbb{K}$ を拡大することで) 自然な同型で対応している. これで [HU] で与えられた column-determinant, [MNO], [M] で議論されている Sklyanin determinant, そして対称化された行列式 'Det' の間の関係が明らかになった.

REFERENCES

- [Ca] A. Capelli, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.
- [Ge] I.M. Gelfand, *Center of the infinitesimal groups*, Mat. Sb. Nov. Ser. **26** (68) (1950), 103–112; English transl. in “Collected Papers” Vol. II, pp.22–30.
- [Hi] 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店, 1992.
- [H] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), 823.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.
- [I] M. Itoh, *Explicit Newton’s formulas for $\mathfrak{gl}_n$* , J. Alg. (to appear).
- [IU] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, preprint (1998).
- [M] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), 923–943.
- [MN] A. Molev and M. Nazarov, *Capelli identities for classical Lie algebras*, preprint (1997).
- [MNO] A. Molev, M. Nazarov and G. Olshanskii, *Yangians and classical Lie algebras*, Russian Math. Surveys **51** (1996), 205–282.
- [N1] M. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.
- [N2] ———, *Yangians and Capelli identities*, A.A. Kirillov Seminar on Representation Theory (ed. G.I. Olshanski), AMS Translations, Series 2, vol. 181, 1997, pp. 139–163.
- [NUW] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$* , Duke Math. J. **76** (1994), 567–594.
- [Ok] A. Okounkov, *Quantum immanants and higher Capelli identities*, Transformation Groups **1** (1996), 99–126.
- [T1] H.W. Turnbull, *The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants*, Dover, 1960.
- [T2] ———, *Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser.2 **8** (1947), 76–86.
- [U1] T. Umeda, *The Capelli identities, a century after*, Sugaku **46** (1994), 206–227; (in Japanese); English transl. in “Selected Papers on Harmonic Analysis, Groups, and Invariants”, AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1998), pp. 51–78, ed. by K. Nomizu
- [U2] ———, *Newton’s formula for $\mathfrak{gl}_n$* , Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
- [U3] ———, *On the proof of the Capelli identities*, preprint (1997).
- [Wy] H. Weyl, *The Classical Groups, their Invariants and Representations*, Princeton Univ. Press, 1946.
- [Z] D.P. Želobenko, *Compact Lie Groups and their Representations*, Transl. Math. Monographs **40** (Amer. Math. Soc.), 1973.